LECCIÓN 8. Optimización.

Un problema de optimización consta de varios elementos que hay que identificar:

1. Una función F que hay que **maximizar o minimizar**. Esta magnitud depende de ciertas variables

$$F = F(x, y, z, \cdots)$$

2. Una serie de relaciones entre las variables que llamamos **ligaduras** expresadas en forma de ecuaciones.

Una vez se tienen identificados estas tres cosas la estrategia es siempre la misma:

1. **Usar las ligaduras** para expresar la función F como una función de una sola de esas magnitudes

$$F = F(x)$$

   Siempre vamos a necesitar el mismo número de ligaduras que variables menos uno. Por ejemplo si tenemos dos variables necesitaremos 1 ligadura, y si tenemos 3 variables 2 ligaduras.

   Es importante tener claro el dominio de definición de la función resultante.

2. Determinamos los **puntos críticos** de F resolviendo la ecuación $F'(x) = 0$ para calcular los **candidatos a máximo/mínimo.**

3. Decidimos cuál de los puntos críticos obtenidos es **máximo/mínimo absoluto**, estudiando la **monotonía de la función.** También podría darse el caso de extremos absolutos que no fuesen puntos críticos en el caso de que el dominio no fuese un intervalo abierto.

EJEMPLO 1: Descomponer el nº 36 en dos sumandos cuyo producto sea el máximo posible.

Hay que maximizar la función:

$$P(x, y) = xy$$

Ligadura del problema:

$$x + y = 36$$

PASOS DE RESOLUCIÓN:

1) Despejamos una de las dos incógnitas en la ligadura: $y = 36 - x$

Usamos este despeje para expresar la función P como una función con una sola variable:

$$P(x) = x(36 - x) = -x^2 + 36x \qquad x \in \mathbb{R}$$

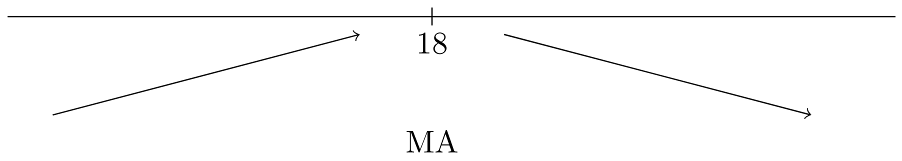
2) Determinamos los puntos críticos, resolviendo $P'(x) = 0$

$$P'(x) = -2x + 36 \longrightarrow -2x + 36 = 0 \longrightarrow -2x = -36 \longrightarrow x = 18$$

En este caso solo hay un punto crítico en $x = 18$*.*

3) Estudiamos la monotonía de la función para decidir si hay un máximo relativo en x=18:

$$P'(0) > 0 \qquad\qquad P'(18) = 0 \qquad\qquad P'(20) < 0$$



Por lo tanto hay un máximo absoluto en x=18. El otro número pedido será:

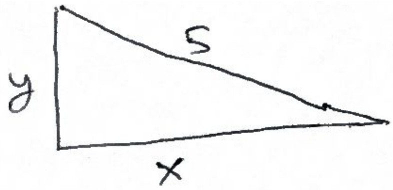
$$y = 36 - x = 36 - 18 = 18$$

SOLUCIÓN: Los dos números pedidos son 18 y 18.

EJEMPLO 2: De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 5 cm, determinar aquel que tenga área máxima.

$\text{Max}: A(x,y) = \frac{1}{2}xy \qquad x, y > 0$

$\text{Ligadura}: x^2 + y^2 = 5^2$



1) Despejamos una incógnita en la ligadura:

$$x^2+y^2=25 \rightarrow y^2 = 25 - x^2 \rightarrow y = \oplus\sqrt{25-x^2} \rightarrow y = \sqrt{25-x^2}$$

Sustituimos en la función A: $\qquad 0 < x < 5$

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2(25-x^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{25x^2-x^4}$$

2) Derivamos:

$$A'(x) = \left(\frac{1}{2}(25x^2-x^4)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}(25x^2-x^4)^{-\frac{1}{2}}(50x-4x^3) = \frac{50x-4x^3}{4\sqrt{25x^2-x^4}}$$

Resolvemos $A'(x)=0$:

$$\frac{50x-4x^3}{4\sqrt{25x^2-x^4}} = 0 \rightarrow 50x - 4x^3 = 0 \rightarrow x(50-4x^2)=0$$

$\nearrow \boxed{x=0}$ ✗ Fuera del dominio

$\searrow \boxed{50-4x^2=0}$ ✱

✱ $50-4x^2 = 0 \rightarrow 50 = 4x^2 \rightarrow x^2 = \frac{50}{4} \rightarrow x^2 = \frac{25}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{2}} = \pm\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}}$

$= \pm\frac{5}{\sqrt{2}} = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2} \rightarrow$

$\nearrow \boxed{x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}}$ ✗ Fuera del dominio

$\searrow \boxed{x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \simeq 3{,}54}$

Dentro del dominio $0<x<5$ solo hay un punto crítico.

$x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

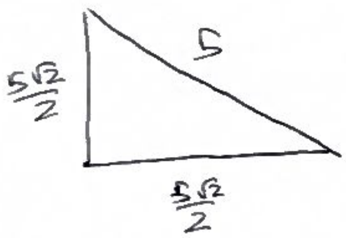
3) $\quad$ 0 —— $A'(1)>0$ ↗ —— $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ —— $A'(4)<0$ ↘ —— 5 $\qquad\Big|\qquad A'(x) = \frac{50x-4x^3}{4\sqrt{25x^2-x^4}}$

Hay un máximo absoluto en $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Determinamos el valor de y:

$$y=\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{25-\frac{25\cdot 2}{4}}=\sqrt{25-\frac{25}{2}}=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

SOLUCIÓN: Los catetos miden ambos $x=y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$



EJERCICIOS

1. Hallar dos números cuya suma sea 20 y su producto el mayor posible. (Soluc: 10 y 10)
2. Descomponer el número 49 en el producto de dos factores de tal forma que la suma de éstos sea mínima.
3. Descomponer el número 98 en dos sumandos tales que la suma de sus raíces cuadradas sea máxima.
4. Calcular las dimensiones del mayor rectángulo cuyo perímetro es 40 m. (Soluc: un cuadrado de lado 10 m.)
5. Una finca rectangular tiene 400 m 2 de superficie. Calcula las dimensiones de los lados para que el perímetro sea mínimo.
6. De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 5 m, determinar el que tiene área máxima. (Soluc: el que tiene ambos catetos de 5√2/2 m)
7. La vela de un barco tiene forma de triángulo rectángulo. Si la hipotenusa debe medir 6 m, calcula sus dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima. (Sol: $x=\sqrt{18}$ m)
8. ¿Qué dimensiones debe tener un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros para que en su fabricación se utilice la menor superficie de chapa posible? (Recordar: 1m3 = 1000 litros) (Soluc: x = 2 m, y = 1 m)
9. Se desea diseñar una lata de conservas cilíndrica de $160\,cm^3$. Hallar las dimensiones de la más económica, esto es, la que emplee menos chapa en su construcción. (Soluc: r ≅ 2,94 cm., h ≅ 5,88 cm)
10. Se desea construir un marco para una ventana que debe tener $1\,m^2$de luz. El coste del marco se estima en 4 € por cada metro de altura y 2,25 € por cada metro de anchura ¿Cuáles son las dimensiones del marco más económico? (Soluc: 4/3 m de ancho y 3/4 m de alto)

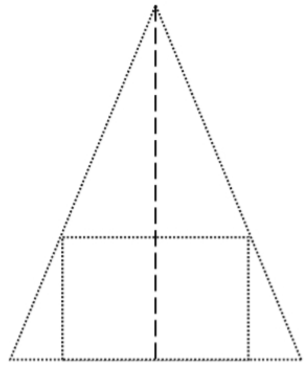
11. De todos los rectángulos de área $9\,cm^2$ halla las dimensiones del que tiene perímetro mínimo. (Soluc: un cuadrado de 3 cm de lado)

12. Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener $180000\,m^2$ ¿Qué dimensiones habrá de tener el terreno de forma que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado? (Soluc: x = 300 m, y = 600 m)

13. Un jardinero desea construir un parterre con forma de sector circular. Si dispone de 20 metros de alambre para rodearlo, ¿qué radio debe tener el sector para que el parterre tenga la mayor superficie posible? (Soluc: r = 5 m)

14. De entre todos los triángulos isósceles de perímetro 36, hallar el que tiene área máxima. (Soluc: un triángulo equilátero de lado 12)

15. En un triángulo isósceles de base 12 cm y altura 18 cm se quiere inscribir un rectángulo de área máxima, como muestra la figura. Hallar las dimensiones de este rectángulo. (Ayuda: Plantear semejanza de triángulos). (Soluc: Se trata de un rectángulo de base 6 cm y altura 9 cm)



16. Una finca rectangular tiene 400 m 2 de superficie. Calcula las dimensiones de los lados para que el perímetro sea mínimo.

17. De todos los cilindros de 36 m 3 de volumen, hallar el radio de la base y la altura del que tiene área total mínima