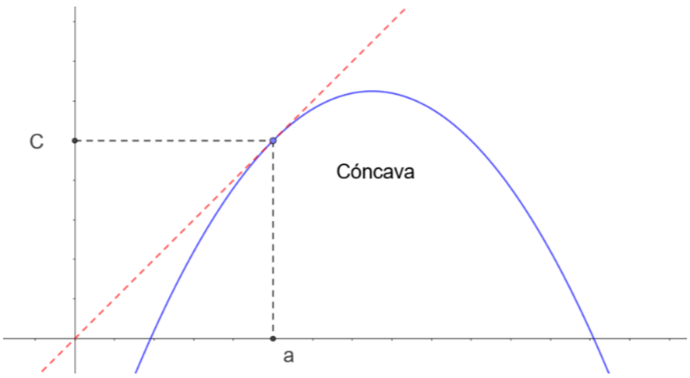
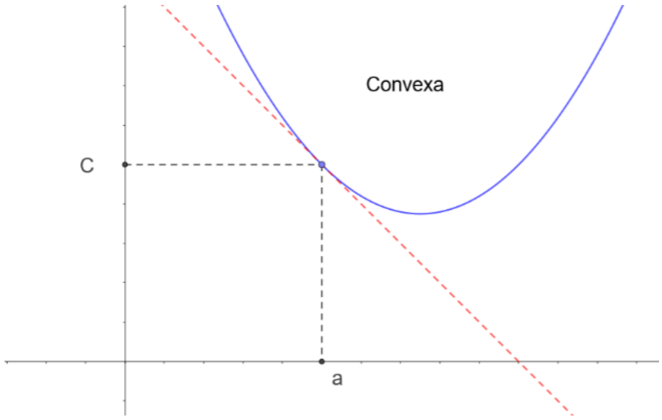
LECCIÓN 6. Curvatura.

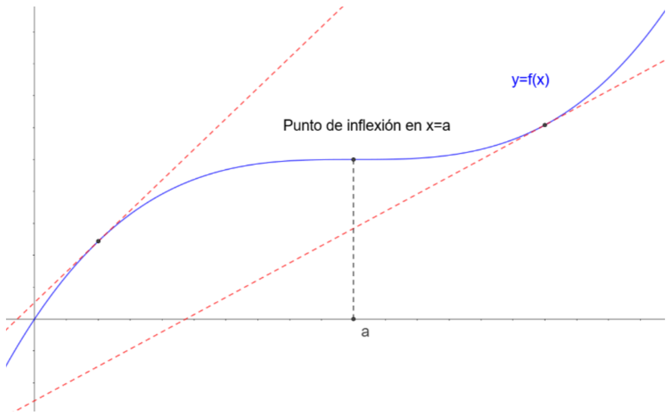
Una función es **convexa**[1] **(** $\cup$ **)** en a si la recta tangente en ese punto queda por debajo de la gráfica de la función en un entorno del punto.

Una función es **cóncava (** $\cap$ **)** en a si la recta tangente en ese punto queda por encima gráfica de la función en un entorno del punto.





Una función tiene un **punto de inflexión** en a si en ese punto la función pasa de cóncava a convexa o viceversa.



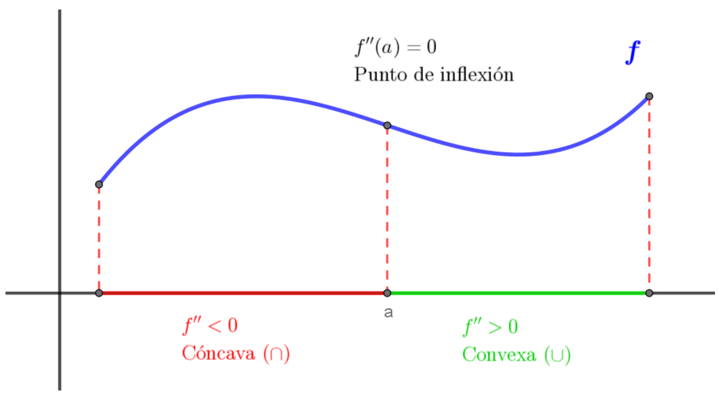
TEOREMA: Si f es una función 2 veces derivable en un entorno de a , entonces:

1. Si $f''(a) > 0 \Rightarrow$ es convexa ($\cup$) en un entorno de a.
2. Si $f''(a) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava ($\cap$) en un entorno de a.

- No ocurre el recíproco, es decir puede haber un punto a donde f es convexa(cóncava) y $f''(a) = 0$.
- Si f tiene un **punto de inflexión** en a y f es dos veces derivable, entonces $f''(a) = 0$. Esto no significa que necesariamente todos los puntos con derivada segunda nula sean de inflexión.

<u>DETERMINACIÓN DE LOS INTERVALOS DE CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN</u>.

En una función dos veces derivable, el procedimiento para calcular los **intervalos de curvatura** es similar al procedimiento para calcular los intervalos de monotonía.



1) **<u>DETERMINAR EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN.</u>**

2) **<u>CÁLCULO DE PUNTOS DE DERIVADA 2ª NULA</u>** Se resuelve la ecuación $f''(x) = 0$ para calcular los **candidatos a puntos de inflexión.**

---

1 Algunos autores llaman a las funciones cóncavas convexas y viceversa. Para evitar confusiones usar los símbolos $\cup$ y $\cap$.

3) **ESTUDIO DE LOS INTERVALOS DE CURVATURA** dentro del dominio de la función se estudia el **signo de la derivada 2ª** en los intervalos determinados por los puntos obtenidos en el paso 2 (es decir los puntos donde $f''(x) = 0$)

EJEMPLO 1: *Estudiar los intervalos de monotonía y de curvatura de la función :*

$$y = x^3 + 3x^2$$

Hallar también los extremos relativos, así como los puntos de inflexión. Representar la curva usando dicha información.

---

① Dom $y = \mathbb{R}$

② Monotonía $f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 + 6x = 0 \to x(3x+6) = 0 \to \boxed{x=0}$; $3x+6=0 \to 3x=-6 \to \boxed{x=-2}$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$: $f'(-3) > 0$ ↗ | -2 | $f'(-1) < 0$ ↘ | 0 | $f'(1) > 0$ ↗

MR (en -2), mR (en 0)

I. monotonía $\begin{cases} f \text{ creciente en } (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \\ f \text{ decreciente en } (-2, 0) \end{cases}$

E. Relativos

$\begin{cases} \text{Máximo relativo en } (-2, y(-2)) = (-2, 4) \\ \text{Mínimo relativo en } (0, y(0)) = (0, 0) \end{cases}$

③ Curvatura $f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0 \to 6x + 6 = 0 \to 6x = -6 \to \boxed{x = -1}$

$f''(x) = 6x + 6$: $f''(-2) < 0$ ∩ | -1 | $f''(0) > 0$ ∪

PI (en -1)

$f''(-2) = -6 < 0$

$f''(0) = 6 > 0$

I. curvatura $\begin{cases} f \text{ cóncava en } (-\infty, -1) \\ f \text{ convexa en } (-1, \infty) \end{cases}$

P. Inflexión $(-1, y(-1)) = (-1, 2)$

Representación