LECCIÓN 5. MONOTONÍA. EXTREMOS RELATIVOS.

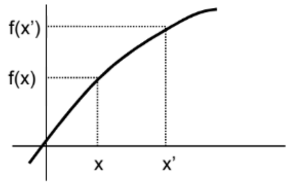
MONOTONÍA:

Una función f es **(estrictamente) creciente** en un intervalo (a, b) si:

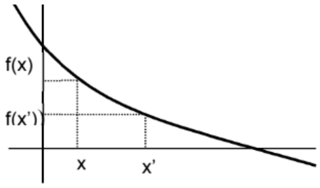
$$x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x') \quad \text{para todos los valores x,x' del intervalo}$$

Una función f es **(estrictamente) decreciente** en un intervalo (a, b) si:

$$x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x') \quad \text{para todos los valores x,x' del intervalo}$$



FUNCIÓN CRECIENTE



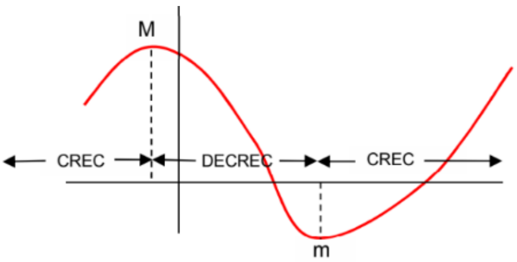
FUNCIÓN DECRECIENTE

En general omitiremos el término estricto y hablaremos directamente de función creciente o decreciente.
Una función se dice **monótona en un intervalo** si es creciente o decreciente en dicho intervalo.

EXTREMOS RELATIVOS:

Una función tiene un **máximo relativo (estricto)** en el punto $(a, f(a))$ si en un entorno del valor $x = a$, todos los valores x del entorno verifican que $f(x) < f(a)$

Una función tiene un **mínimo relativo (estricto)** en el punto $(a, f(a))$ si en un entorno del valor $x = a$, todos los valores x del entorno verifican que $f(a) < f(x)$



- Claramente en un punto donde la función pasa de **creciente a decreciente** se tiene un **máximo relativo (M)**.

- De manera similar, en un punto donde la función pasa de **decreciente a creciente** se tiene un **mínimo relativo (m)**.

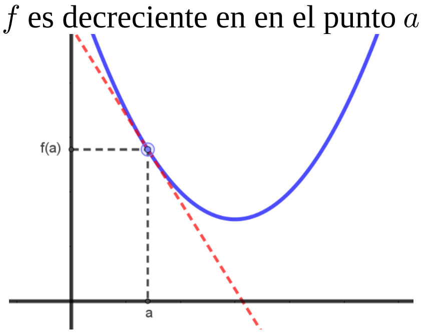
TEOREMA DE MONOTONÍA: Si f es una función derivable en un entorno del punto a, entonces:

a) Si $f'(a) > 0 \Longrightarrow f$ es creciente en un entorno del punto $x = a$.

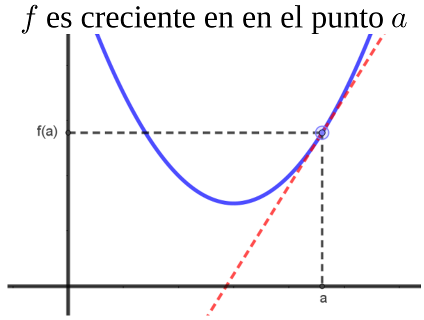
b) Si $f'(a) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en un entorno del punto $x = a$.

Justificación geométrica: una función con derivada positiva(negativa) en $x = a$ tiene recta tangente con pendiente positiva(negativa) y por lo tanto la función será creciente cerca de ese punto.

$f'(a) < 0$ Tangente de pendiente negativa
f es decreciente en en el punto a



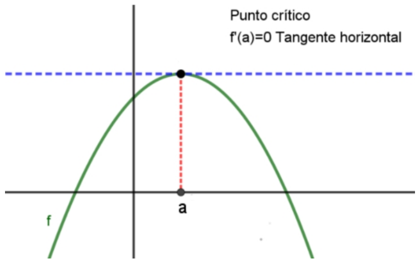
$f'(a) > 0$ Tangente de pendiente positiva
f es creciente en en el punto a



PUNTO CRÍTICO: si f es derivable en un entorno de $a \in Dom f$, entonces a se dice punto crítico si:

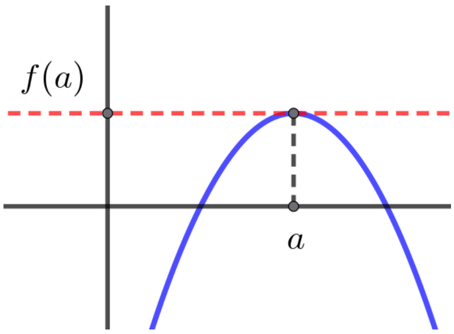
$$f'(a) = 0$$

Esto es lo mismo que decir que, en ese punto, la recta tangente a f es horizontal.

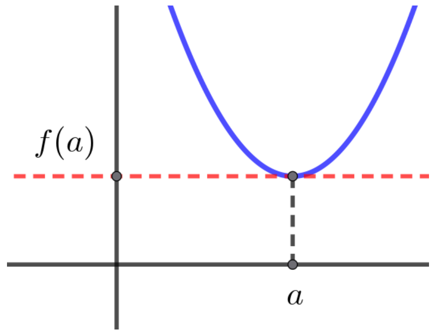


CANDIDATOS A EXTREMOS RELATIVOS: si f es una función derivable y a es un **punto crítico** entonces en ese punto pueden ocurrir tres cosas

A) f tiene un **máximo relativo** en a.
f pasa de decreciente a creciente.

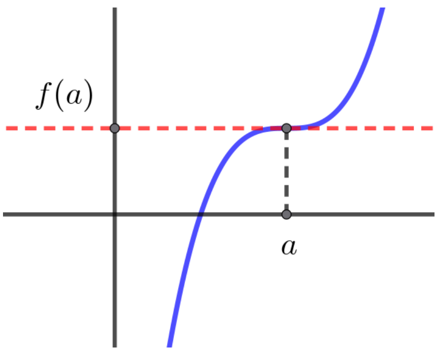


B) f tiene un **mínimo relativo** en a.
f pasa de creciente a decreciente

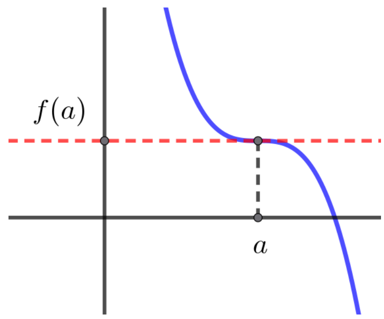


C) f no tiene un extremo en $x = a$

f pasa de creciente a creciente

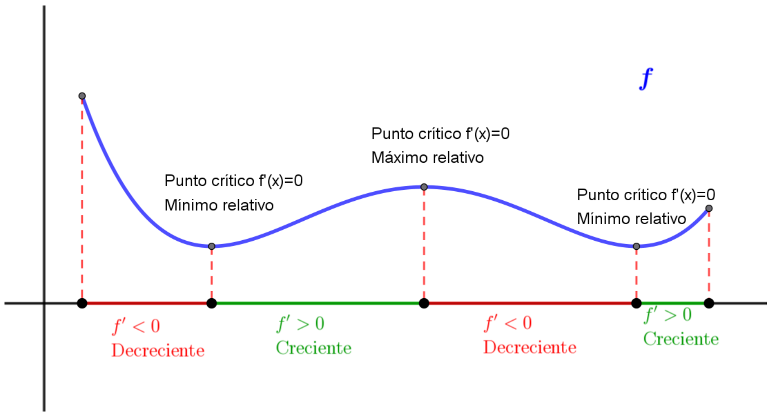


f pasa de decreciente a decreciente



DETERMINACIÓN DE LOS INTERVALOS DE MONOTONÍA Y LOS EXTREMOS RELATIVOS.

Para que una función f derivable pase de ser creciente a ser decreciente tiene que haber un punto crítico intermedio donde se produzca dicho cambio



Por lo tanto, para determinar los intervalos de monotonía y extremos relativos de una función f derivable se sigue el siguiente proceso:

1) **DETERMINAR EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN.**

2) **CÁLCULO DE PUNTO CRÍTICOS:** Son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$.

3) **<u>ESTUDIO DE LOS INTERVALOS DE MONOTONÍA</u>:** dentro del dominio de la función se estudia el signo de la derivada en los intervalos determinados por los puntos críticos.
- En los intervalos con derivada positiva la función es creciente.
- En los intervalos con derivada negativa la función es decreciente.

EJEMPLO 1: *Calcular los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función*

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

Esboza la gráfica de la función.

---

1) <u>Dominio:</u> $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

2)<u>P. Críticos</u>:$(f'(x) = 0)$

La derivada de la función es: $f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$

Resolvemos la ecuación y obtenemos dos puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{52}}{6} = \begin{cases} x_1 \approx 0,13 \\ x_2 \approx 2,54 \end{cases}$$

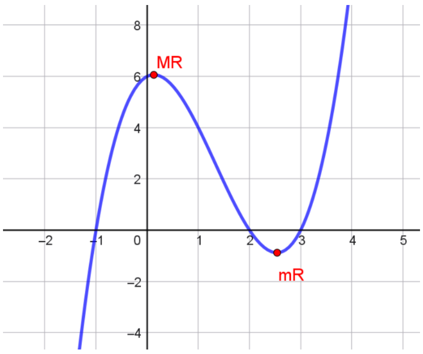
3) <u>Monotonía</u>: Dibujamos el dominio de la función, que en este caso es $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ *y colocamos ordenados los puntos críticos. Estudiamos el signo de* f' *en cada intervalo para ver si es creciente o decreciente:*

$f'(0) > 0$ $\quad$ $f'(1) < 0$ $\quad$ $f'(3) > 0$

0,13 $\quad$ 2,54

$\nearrow$ $\quad$ $\searrow$ $\quad$ $\nearrow$

MR $\quad$ mR



<u>INTERVALOS DE MONOTONÍA</u>:

f es creciente en: $(-\infty, 0.13) \cup (2.54, \infty)$

f es decreciente en:$(0.13, 2.54)$

<u>EXTREMOS RELATIVOS</u>:

Máximo relativo en: $MR \approx (0.13, f(0.13)) = (0.13, 6.06)$

Mínimo relativo en: $mR \approx (2.54, f(2.54) = (2.54, -0.88)$

EJEMPLO 2 : *Calcular los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función*

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

Esboza la gráfica de la función.

---

① Dom $f = \mathbb{R}$

② P. CRÍTICOS $(f'(x)=0)$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 12x^3 - 12x^2 = 0 \rightarrow 12x^2(x-1) = 0$ $\begin{cases} 12x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow \boxed{x=0} \\ x - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x=1} \end{cases}$

③ MONOTONÍA

Dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

$f'(-1) = -24$

$f'(0,5) = -1,5$

$f'(2) = 48$

$f'(-1) < 0$ $\quad 0 \quad$ $f'(0,5) < 0$ $\quad 1 \quad$ $f'(2) > 0$

$\searrow \qquad \searrow \qquad \nearrow$

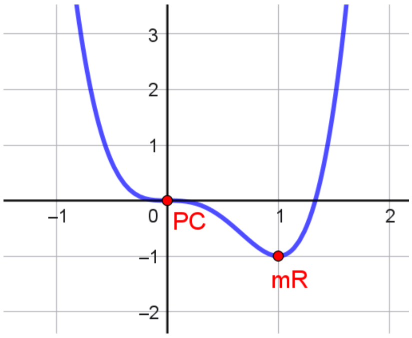
PC $\qquad$ mR

I. monotonía: f creciente $(1, \infty)$

f decreciente $(-\infty, 1)$

E. Relativos: Mínimo relativo en $(1, f(1)) = (1, -1)$

ESBOZO



En los ejemplos anteriores el dominio de la función era todo $\mathbb{R}$. Cuando los dominios son más complicados hay que tenerlo en cuenta.

EJEMPLO 3 : *Calcular los intervalos de monotonía y extremos relativos de la función*

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x}$$

Esboza la gráfica de la función.

---

1) <u>Dominio:</u> $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

Esta claro que en x=0 hay una asíntota vertical, pues: $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+2}{x} = \frac{2}{0} = \pm\infty$

2)<u>P. Críticos</u>: $(f'(x) = 0)$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+2}{x}\right)' = \frac{2x \cdot x - (x^2+2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos dos puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-2}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

3) <u>Monotonía</u>:

$f'(-2) > 0 \qquad f'(-1) < 0 \qquad f'(1) < 0 \qquad f'(2) > 0$

$-\sqrt{2} \qquad 0 \qquad \sqrt{2}$

$\nearrow \qquad \searrow \qquad \searrow \qquad \nearrow$

MR $\qquad$ AV $\qquad$ mR

__INTERVALOS DE MONOTONÍA__:

f es creciente en: $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\infty\right)$

f es decreciente en: $\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)$

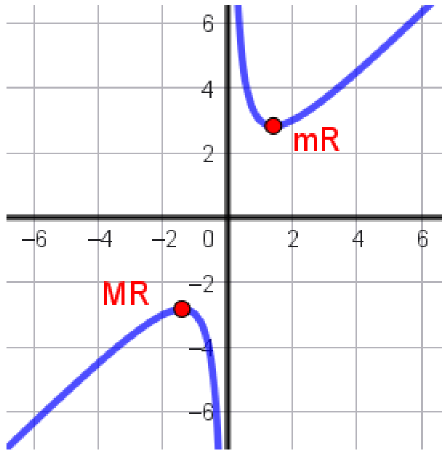
__EXTREMOS RELATIVOS__:

Máximo relativo en:

$MR=(-\sqrt{2},f(-\sqrt{2})=\left(-\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right)\approx(-1.41,-2.83)$

Mínimos relativo en:

$mR=\left(\sqrt{2},f(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)\approx(1.41,2.83)$



EJEMPLO 4 : *Calcular los intervalos de monotonía y extremos relativos de la función*

$$f(x)=\frac{x^3}{x+1}$$

Esboza la gráfica de la función.

---

① Dom $f=\mathbb{R}-\{-1\}$ En $x=-1$ hay una AV porque $\lim_{x\to-1}\frac{x^3}{x+1}=\frac{-1}{0}$ INDT

② P. CRÍTICOS ($f'(x)=0$)

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+1)-x^3\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{3x^3+3x^2-x^3}{(x+1)^2}=\frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$$

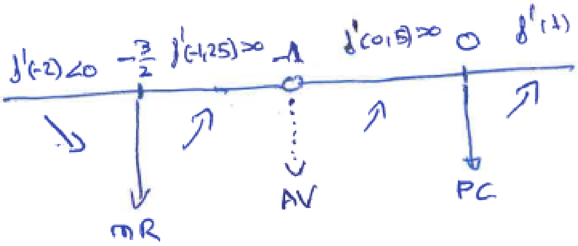
$$f'(x)=0\to\frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}=0\to 2x^3+3x^2=0\to x^2(2x+3)=0$$

$\to$ $x^2=0\to\boxed{x=0}$; $2x+3=0\to\boxed{x=-\frac{3}{2}}$

③ MONOTONÍA

Dom $f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$f'(x)=\frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$



$f'(-2)=-4$

$f'(-1{,}25)=12{,}5$

$f'(0{,}5)=0{,}44$

$f'(1)=\frac{5}{4}$

Intervalos de monotonía

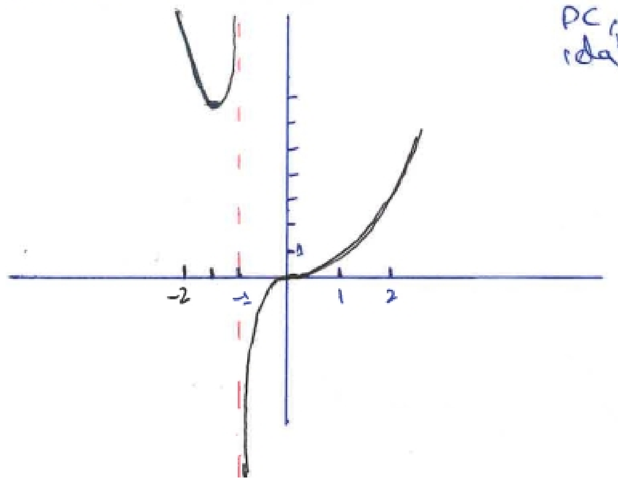
f creciente en: $(-\frac{3}{2},-1)\cup(-1,\infty)$

f decreciente en: $(-\infty,-\frac{3}{2})$

Extremos relativos

Mínimo relativo en: $\left(-\frac{3}{2},f(-\frac{3}{2})\right)=(-1'5,\ 6'75)$

ESBOZO DE LA GRÁFICA



En $(a,f(a))=(0,0)$ hay un PC, pero no un extremo relativo

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES CON MEDIOS INFORMÁTICOS

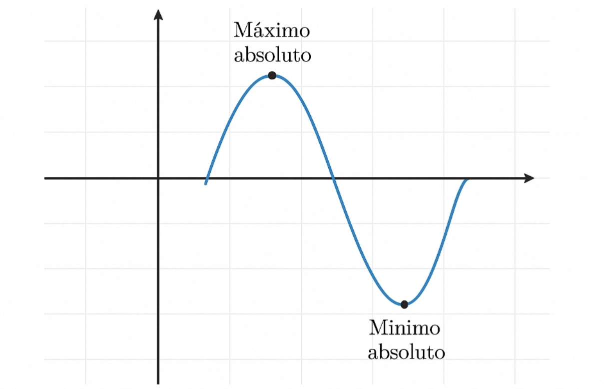
Se puede usar GeoeGebra o un programa similar para representar graficamente las funciones. También nos sirve para determinar la derivada y los puntos críticos.

EXTREMOS ABSOLUTOS

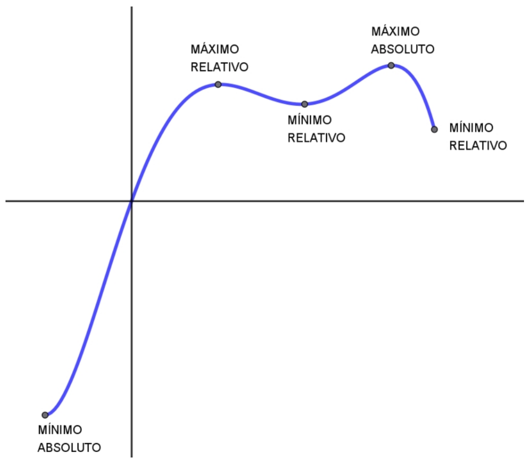
f tiene un **máximo absoluto (estricto)** en a si $f(a) > f(x)$ para cualquier x en del dominio de f.

f tiene un **mínimo absoluto (estricto)** en a si $f(a) < f(x)$ para cualquier$x$ en del dominio de$f$.

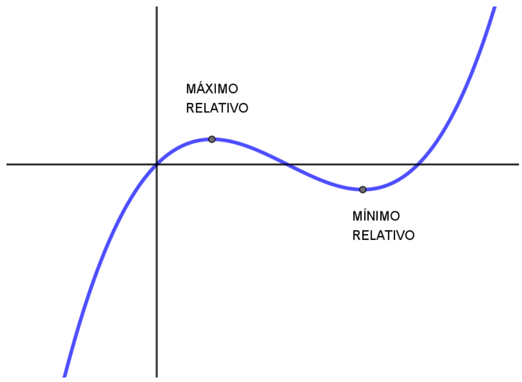
f tiene un **extremo absoluto (estricto)** en a si tiene un máximo absoluto o un mínimo absoluto en a.



Los extremos absolutos son siempre extremos relativos pero no al revés. Una función puede tener como mucho un máximo absoluto y un mínimo absoluto.



Una función no tiene que tener extremos absolutos.



EJERCICIOS

1. Estudiar la monotonía de las siguientes funciones polinómicas. Usar dicha infomación para realizar un esbozo de la gráfica:

   a) $f(x) = x^3 - 1$

   b) $g(x) = x^4 - x^2$

   c) $h(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

   d) $k(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$

2. Estudiar la monotonía de las siguientes funciones racionales. Usar dicha información para realizar un esbozo de la gráfica:

   a) $f(x) = \dfrac{-2x+3}{x+1}$

   b) $g(x) = \dfrac{-x^2+4x+7}{x+1}$

   c) $h(x) = \dfrac{x^2+4x+6}{x+2}$

   d) $m(x) = \dfrac{-2x^3}{-2x+1}$

3. El nivel del agua (medido en meses) en un embalse varía a lo largo del año debido a las lluvias, el consumo y la evaporación. Este nivel, en porcentaje, se puede modelar mediante la siguiente función polinómica:

$$N(t) = 0{,}35t^3 - 6t^2 + 25t + 40, \quad \text{con } t \in [0, 12]$$

   a) Estudia la monotonía de la función y sus extremos relativos.
   b) Usa esta información para hacer un esbozo de la gráfica de la función.
   c) ¿En qué momentos alcanza el embalse su nivel máximo y mínimo?
   d) Interpreta los resultados obtenidos.
   e) ¿Cuántas veces alcanza un nivel exacto del 50%?

4. El número de bacterias en una colonia (en miles) en función del tiempo (en horas) está dado por:

$$B(t) = 5t^3 - 45t^2 + 90t + 100, \quad 0 \leq t \leq 6$$

   a) Estudia la monotonía de la función y sus extremos relativos.
   b) Usa esta información para hacer un esbozo de la gráfica de la función.
   c) Interpreta los resultados.
   d) Cuál es el número máximo y mínimo de individuos que alcanza la colonia.

5. La velocidad de un automóvil durante un viaje de 5 horas está dada por la función:

$$v(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2 + 30, \quad 0 \leq t \leq 5$$

   a) Estudia la monotonía de la función y sus extremos relativos.
   b) Usa esta información para hacer un esbozo de la gráfica de la función.
   c) Indica el momento de mayor velocidad y el de menor.
   d) Otro coche avanza simultáneamente con una velocidad de

$$V(t) = -10t + 70$$

   Representa la función conjuntamente con v y razona si en algún momento ambos coches llevarán la misma velocidad.