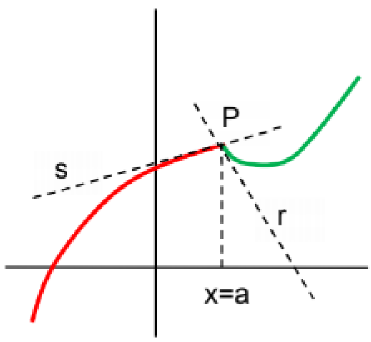
LECCIÓN 4. DERIVADAS LATERALES. CONTINUIDAD.

Recordad que f es derivable en $x=a$ si existe el siguiente límite: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

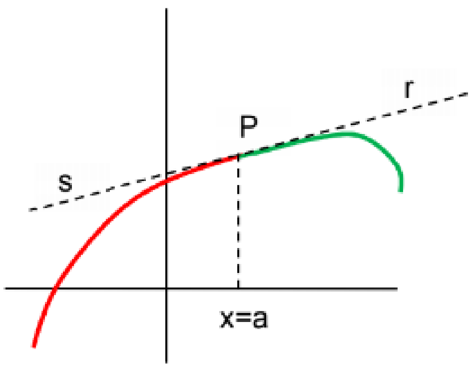
DERIVADAS LATERALES: las derivadas laterales de una función en un punto a son los siguientes límites laterales:

$$f'(a^-)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad\qquad f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Para que exista $f'(a)$ han de existir ambas derivadas laterales y coincidir. La derivada es ese valor común.



PUNTO ANGULOSO = NO DERIVABLE



PUNTO NO ANGULOSO = DERIVABLE

$f'(a^-)$: Pendiente de la tangente por la izquierda (s)

$f'(a^+)$: Pendiente de la tangente por la derecha (r)

1º CASO: No coinciden. $\nexists f'(a)$ Función no derivable en a.

2º CASO: Coinciden. $f'(a)$. Función derivable en a.

EJEMPLO 1. *Comprobar si la función $f(x)=\left|x^2-1\right|$ es derivable en $x=0$ y en $x=1$. Representarla.*

Por comodidad escribimos la función como una función definida a trozos. Para ello recuérdese que :

$$|g(x)|=\begin{cases}-g(x) & si \quad f(x)<0\\ g(x) & si \quad f(x)\geq 0\end{cases}$$

En nuestro caso estudiamos el signo de $g(x)=x^2-1$ en los intervalos determinados por las raíces de f, que son -1 y $+1$.

		-1		1	
Signo g(x)=x^2-1	+	0	-	0	+

Y por lo tanto:

$$f(x)=\left|x^2-1\right|=\begin{cases}x^2-1 & si \quad x\leq -1\\ -(x^2-1) & si \quad -1<x<1\\ x^2-1 & si \quad 1\leq x\end{cases}=\begin{cases}x^2-1 & si \quad x\leq -1\\ -x^2+1 & si \quad -1<x<1\\ x^2-1 & si \quad 1\leq x\end{cases}$$

<u>DERIVABILIDAD EN x=0:</u> *Como en el intervalo (-1,1) la función es polinómica, es derivable. Por lo tanto f es derivable en x=0.*

Como la derivada en el intervalo es $f'(x)=-2x$, entonces $f'(0)=0$.

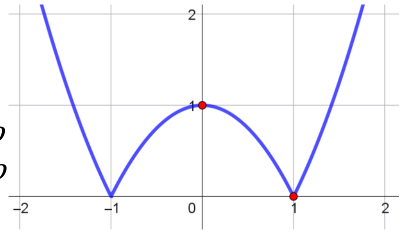
<u>DERIVAVILIDAD EN x=1:</u> *Como el punto x=1 es un punto de cambio de definición el estudio no es tan sencillo. Para comprobar si es derivable t<u>endremos que comprobar que ambas derivadas laterales coincidan</u>:*

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2+1-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}-(x+1)=-2$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$*, la función no es derivable en x=1.*

Obsérvese como la función tiene en x=1 un punto anguloso y por lo tanto no derivable. Sin embargo en x=0 tenemos un punto no anguloso y por lo tanto derivable.



Para que una función sea derivable, previamente hay que cercionarse de que es continua; esto se debe al siguiente resultado:

TEOREMA: Si f es derivable en $x = a$ entonces f es continua en $x = a$.

Demostración: Como f es derivable en $x = a$, se sabe que existe el siguiente límite:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Para ver que f es continua en $x = a$ se debe comprobar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, o lo que es lo mismo, comprobar que:

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0$$

Pero esto es cierto, ya que:

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Por lo que f es continua en $x = a$.

NOTA: el recíproco no se verifica, una función continua en un punto no tiene por qué ser derivable en dicho punto.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: que una función sea derivable en $x = a$ significa que es continua (ramas enganchen bien) y que además en ese punto no se forma ningún pico (punto anguloso)

Sin embargo, si se forma un pico hay un cambio de tangente en ese punto (ver sección anterior) por lo que las derivadas laterales no coinciden y la función no sería derivable.

En la página anterior tenemos un ejemplo de función no derivable en $x = 1$ pero si continua en dicho punto.

Esta relación entre derivabilidad y continuidad tiene consecuencias muy importantes. Una de ellas es que si estudiamos la derivabilidad de una función en punto podemos evitar el farragoso procedimiento visto en el ejemplo 1 que impica calcular las derivadas laterales como límites.

MÉTODOS PARA ESTUDIAR LA DERIVABILIDAD DE UN FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS EN EL PUNTO DE CAMBIO DE DEFINICIÓN:

Dada una función

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & si \quad x \leq a \\ f_2(x) & si \quad a < x \end{cases}$$

con f_1 y f_2 derivables en un entorno de a, entonces podemos estudiar la derivabilidad de la función f en $x = a$ de la siguiente manera:

1. Estudiar la continuidad de f en $x = a$ comprobando si se verifica:

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Si f es discontinua en $x = a$ no puede ser derivable en $x = a$.
Si f es continua en $x = a$ pasamos al siguiente apartado.

2. Estudiar la derivabilidad de f en $x = a$. Derivamos f en los puntos distintos de a

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) & si \quad x < a \\ f_2'(x) & si \quad a < x \end{cases}$$

Si $f'(a^-) = f_1'(a)$ coincide con $f'(a^+) = f_2'(a)$ entonces será derivable. Si no coinciden, no será derivable.

EJEMPLO 2. *Comprobar si la función*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & si \quad x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & si \quad 1 < x \end{cases}$$

es derivable en x = 1.

Las funciones $f_1(x) = -x^2 + 3$ *y* $f_2(x) = \dfrac{2}{x}$ *son derivables en todo su dominio por ser la primera polinómica y la segunda racional. Por lo tanto, son derivables en un entorno de a .*

1) Continuidad en x=1: *Hay que comprobar que:* $f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

$f(1) = -1^2 + 3 = 2$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-x^2 + 3) = -1^2 + 3 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{x} = 2$$

Por lo que f es continua en $x = 1$.

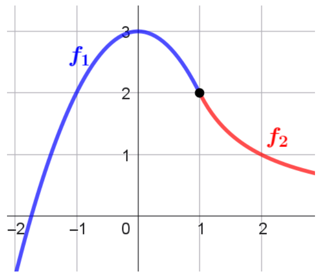
2) ***Derivabilidad en x=1:*** *Hay que comprobar que :* $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si \quad x < 1 \\ \frac{-2}{x^2} & si \quad 1 < x \end{cases}$$

Tenemos entonces que:

$$f'(1^-) = -2 \cdot 1 = -2 \qquad\qquad f'(1^+) = \frac{-2}{1^2} = -2$$

Como $f'(1^-) = f'(1^+)$*, la función es derivable en* $x = 1$*.*

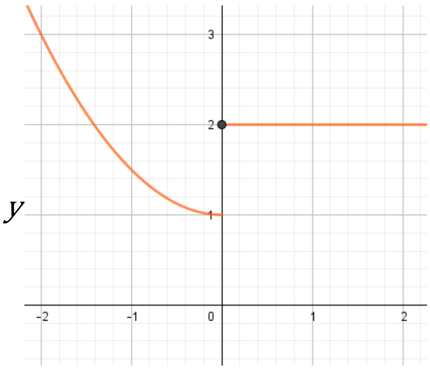


NOTA: este método es más sencillo que el visto en el ejemplo 1, pero es importante comprobar primero la continuidad. En dicho caso la función no sería continua y por lo tanto no derivable.

EJEMPLO 3 . *Si al estudiar la derivabilidad de la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 1 & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad 0 \leq x \end{cases}$$

se nos olvidará estudiar la continuidad en x=0 previamente y pasásemos al 2º paso obtendríamos



$$f'(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad 0 \leq x \end{cases}$$

Se tendría entonces que: $f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$ *lo que nos podría llevar a decir que dicha función es derivable en x=0. Pero realmente no lo es, pues no es continua en x=0 . De hecho, siendo estrictos , al no ser continua no sería cierto que* $f'(0^-) = 0$ *o que* $f'(0^+) = 0$*.*

EJEMPLO 4 (SELECTIVIDAD 2019). *Calcular a y b para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ ax + b & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$$

sea derivable en $x = e$*.*

Las funciones $f_1(x) = \ln x$ *y* $f_2(x) = ax + b$ *son derivables en todo su dominio por ser logarítmica la primera y polinómica la segunda. Por lo tanto son derivables en un entorno de* $x = e$*.*

1) Continuidad en x=e: *Para ser continua debe verificarse:* $f(e) = \lim_{x \to e^-} f(x) = \lim_{x \to e^+} f(x)$

$f(e) = \ln e = 1$

$$\lim_{x \to e^-} f(x) = \lim_{x \to e^-} \ln x = \ln e = 1$$

$$\lim_{x \to e^+} f(x) = \lim_{x \to e^+} (ax + b) = a \cdot e + b$$

Se deduce entonces: $a \cdot e + b = 1$

2) ***Derivabilidad en x=e:*** *Para ser derivable tiene que verificarse:* $f'(e^-) = f'(e^+)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x \in (0, e) \\ a & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$$

Tenemos entonces que:

$$f'(e^-) = \frac{1}{e} \qquad f'(e^+) = a$$

Se deduce entonces: $a = \frac{1}{e}$.

Sustituyendo el valor obtenido para a en la ecuación obtenida en el apartado 1) deducimos:

$$a \cdot e + b = 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \cdot e + b = 1 \Rightarrow 1 + b = 1 \Rightarrow b = 0$$

SOLUCIÓN: $a = \frac{1}{e}$ *y* $b = 0$

EJERCICIOS

1. Determinar si las siguientes funciones son derivables en los puntos dados:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x-2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x-5} & \text{si } x \leq 3 \\ x-1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ en $x = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+1} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{3}{\sqrt{5}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

e) $f(x) = \begin{cases} -5x+17 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{2x+3}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

f) $f(x) = \begin{cases} e^{2x+6} & \text{si } x \leq -3 \\ \frac{2x+5}{x+2} & \text{si } x > -3 \end{cases}$ en $x = -3$

g) $g(x) = \begin{cases} \ln(2x+5) & \text{si } x \leq -2 \\ \sin(2x+4) & \text{si } x > -2 \end{cases}$ en $x = -2$

h) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3x+4}{x+1}} & \text{si } x \leq 0 \\ -\frac{1}{4}x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$

i) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3x+1}{x}} & \text{si } x \leq 1 \\ 2e^{3x-3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

j) $h(x) = \begin{cases} \ln(2x-4) & \text{si } x \leq 2{,}5 \\ \frac{2x-5}{2x-4} & \text{si } x > 2{,}5 \end{cases}$ en $x = 2,5$

2. Determina el valor de los parámetros a y b para que las siguientes funciones sean derivables en el punto dado:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } x \leq 1 \\ ax+b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+2}{x+1} & \text{si } x \leq 1 \\ ax+b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1) & \text{si } x \leq 1 \\ ax+b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+5} & \text{si } x \leq 2 \\ ax+b & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{ax+b}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

f) $f(x) = \begin{cases} ae^{2x+3} & \text{si } x \leq -1 \\ bx+(b+3) & \text{si } x > -1 \end{cases}$ en $x = -1$

SOL: a) Sol : $a = -1/4$, $b = 3/4$; b); Sol: $a = 0, b = 2$; c) Sol: $a = 1, b = \ln 2 - 1$; d) Sol: $a = 2/3$, $b = 5/3$; e) Sol: $a = 3, b = 1$; f) Sol: $a = 3/e$; $b = 6$

3. Escribe una función definida a trozos que no sea derivable en $x = 3$ pero si continua.

4. Determina una función con un punto anguloso en x=1 y una discontinuidad de salto en x=2.

5. ¿Cuántas veces es derivable en 0 la función $f(x) = |x|x$? ¿Y la función f$(x) = |x|x^2$?. ¿Y la función $f(x) = |x|x^n$ con n número natural?