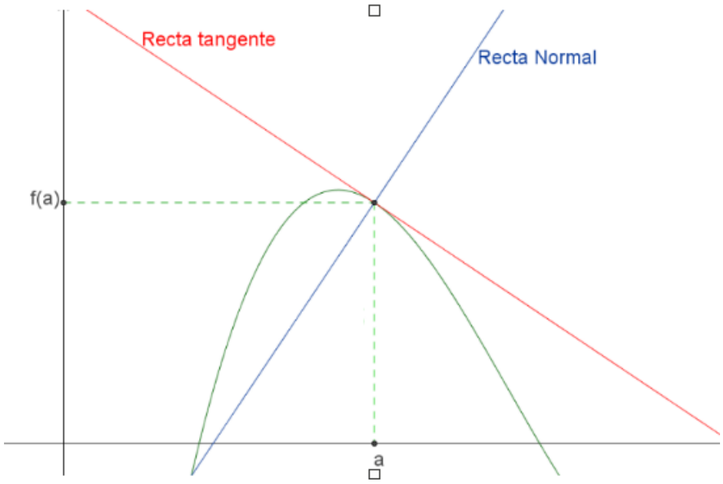
LECCIÓN 3. RECTA TANGENTE Y NORMAL.

Por lo visto en la lección 1 se sabe que la pendiente de la recta tangente a f en el punto $A=(a,f(a))$ es $f'(a)$. Se deduce entonces que:



Recta tangente a f en el punto $A=(a,f(a))$:

$$\boxed{T:\ y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

Teniendo en cuenta que la recta normal a una recta de pendiente $m\neq 0$, tiene pendiente;

$$m'=\frac{-1}{m}$$

Recta normal a f en el punto $A=(a,f(a))$:

$$\boxed{N:\ y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)}$$ siempre que $f'(a)\neq 0$

EJEMPLO 1: *Determinar las ecuaciones de la recta tangente y la normal a la función* $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ *en el punto de abscisa* $x=2$*. ¿Qué ángulo forma la recta tangente con el eje OX?*

Las ecuaciones de las rectas tangente y normal son:

$$T:\ y-f(2)=f'(2)(x-2) \qquad N:\ y-f(2)=\frac{-1}{f'(2)}(x-2)$$

Para hallar ambas ecuaciones debemos calcular $f(2)$ *y* $f'(2)$*. Por un lado:* $f(2)=\dfrac{2}{2-1}=2$

Por otro lado, la derivada de f es:

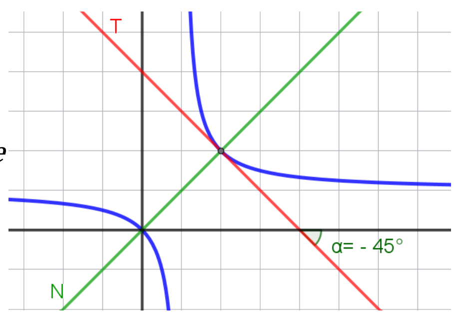
$$f'(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)'=\frac{x'(x-1)-(x-1)'x}{(x-1)^2}=\frac{1(x-1)-1x}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

Se deduce entonces que: $f'(2)=\dfrac{-1}{(2-1)^2}=-1$*. Se tiene entonces que la ecuación de la recta tangente es:*

$$T:\ y-2=(-1)(x-2)\Longrightarrow y-2=-x+2\Longrightarrow y=-x+4$$

y la ecuación de la recta normal es:

$$N:\ y-2=\frac{-1}{-1}(x-2)\Longrightarrow y-2=x-2\Longrightarrow y=x$$



Para determinar el ángulo que forma la recta tangente con el eje OX usamos que:

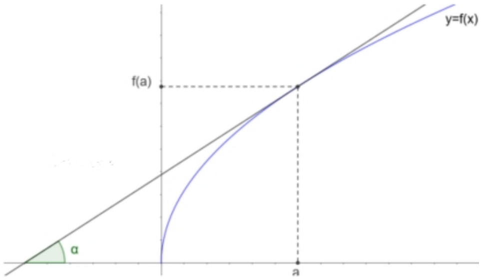
$$\tan\alpha=-1\Longrightarrow\alpha=\arctan(-1)\Longrightarrow\alpha=-45^\circ$$

NOTA: Conviene recordar que la pendiente de una recta m coincide con la tangente del ángulo α que forma la recta con el eje OX

$$m = tan\,\alpha$$

Y por lo tanto se puede obtener α a partir de m como:

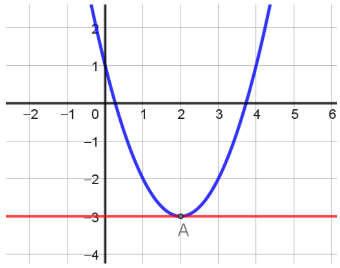
$$\alpha = arg tan\, m$$



EJEMPLO 2: *Dada la función $f(x) = x^2 - 4x + 1$, calcular los puntos donde la tangente:*
a) Sea paralela al eje OX.
b) Forme un ángulo de 60^o con el eje OX.
c) Sea paralela a la recta $r: -3x + 2y = 1$.

---

a) Hay que encontrar los puntos donde la tangente tiene pendiente $m = 0$:

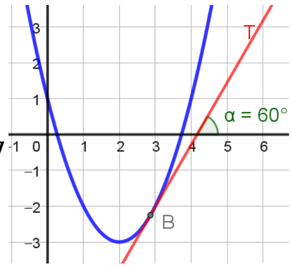


$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Por lo tanto solo hay un punto donde la tangente a f sea horizontal, el punto:

$$A = (2, f(2)) = (2, -3)$$

b) Hay que encontrar los puntos donde la tangente tiene pendiente $m = \tan 60^\circ$



$$f'(x) = \tan 60^\circ \Rightarrow 2x - 4 = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}+4}{2}$$

Entonces, solo hay un punto donde la tangente a f forme un ángulo de 60° con el eje OX, el punto:

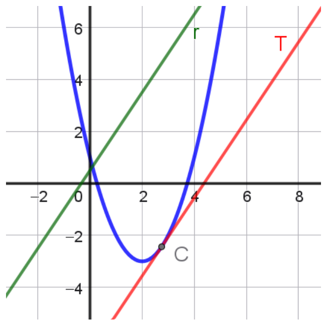
$$B = \left(\frac{\sqrt{3}+4}{2}, f\left(\frac{\sqrt{3}+4}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}+4}{2}, \frac{-9}{4}\right) \approx (2.867, 2.25)$$

c) Calculemos la pendiente de la recta r.

$$r: -3x + 2y = 1 \Rightarrow 2y = 3x + 1 \Rightarrow y = \frac{3x+1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

y por lo tanto la pendiente de r es $m = \frac{3}{2}$.
Para que la recta tangente a f en un punto x sea paralela a r tiene que tener su misma pendiente. Por lo tanto, hay que encontrar los puntos donde:

$$f'(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x - 4 = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = \frac{3}{2} + 4 \Rightarrow 2x = \frac{11}{2} \Rightarrow x = \frac{11}{4}$$

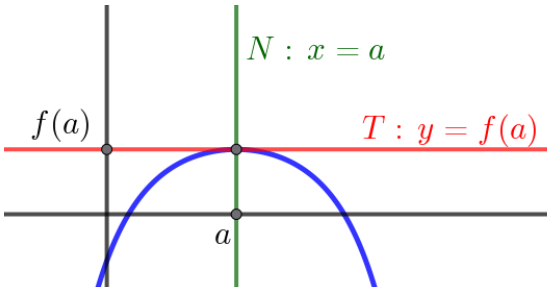


Por lo tanto, solo hay un punto donde la tangente a f sea paralela a la recta r, el punto:

$$C = \left(\frac{11}{4}, f\left(\frac{11}{4}\right)\right) = \left(\frac{11}{4}, \frac{-39}{16}\right) \approx (2.75, 2.44)$$

<u>NOTA:</u> Cuando $f'(a) = 0$ entonces, en el punto de abscisa $x = a$, la tangente T es una recta horizontal y la normal es la recta vertical $x = a$.

$$T: \ y = f(a) \qquad\qquad N = a$$



EJEMPLO 3: *Dada la función $f(x) = e^{x^2}$, determinar sus rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 0$.*

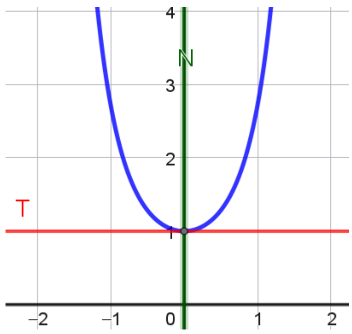
Tenemos que

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

Como $f'(0) = 0$ la tangente será una recta horizontal y la normal una recta vertical. Sus ecuaciones serán:

$$T: \ y - f(2) = 0(x - 2) \Rightarrow y = f(2) \Rightarrow y = 1$$

$$N: \ x = 0$$



EJERCICIOS

1. Determina la recta tangente y la normal a $f(x) = \sqrt{3x-6}$ en el punto $x = 5$. ¿Qué ángulo forma la normal con el eje X? ¿Dónde corta la tangente al eje Y?

2. Determina las ecuaciones de las rectas tangente y normal en los siguientes casos:
   a) $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 1$ $\quad$ $(Sol:\ T:\ \ y = 2x, \quad N:\ \ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2})$
   b) $f(x) = 2x^3 - x$ en $x = 0$ $\quad$ $(Sol:\ T:\ \ y = -1, \quad N:\ \ y = x)$
   c) $f(x) = e^{2x+1}$ en $x = 0$ $\quad$ $(Sol:\ T:\ \ y = 2ex + e, \quad N:\ \ y = -\dfrac{1}{2e}x + e)$
   d) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ en $x = 0$ $\quad$ $(Sol:\ T:\ \ y = 1, \quad N:\ \ x = 0)$
   e) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ en $x = 1$ $\quad$ $(Sol:\ T:\ \ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad N{:}\ y = -\sqrt{5}x + 2\sqrt{5})$
   f) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ en $x = 0$ $\quad$ $(Sol:\ T:\ \ y = -x + 1, \quad N:\ \ y = x + 1)$
   g) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ en $x = -1$ $\quad$ $(Sol:\ T:\ \ y = -x, \quad N:\ \ y = x + 2)$
   h) $f(x) = \ln(x^2+1)$ en $x = 1$ $\quad$ (*Sol:* T: $y = x - 1 + \ln 2$, N: $y = -x + 1 + \ln 2$)

3. Determina los puntos en los que la función $f(x) = 3x + \dfrac{2}{x}$ tenga tangente paralela a la recta $4x - 2y = 5$.

4. Determina los puntos donde la recta tangente a la función dada cumple la condición indicada:

   a) $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x}$, que sea **paralela al eje** OX
   (Sol: $x = \pm 2$, puntos $(2,\ 8)$ y $(-2,\ -8)$)

   b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$, que forme un **ángulo de** $45°$ con el eje OX
   (Sol: $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1.155$, puntos $(\pm 1.155,\ f(\pm 1.155))$)

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x+2)$, que sea **paralela al eje** OX
   (Sol: $x = -1,618$ y $x = 0,618$, puntos $(-1'618, -2'58)$ y $(0'618,\ 1'58)$)

   d) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, que forme un **ángulo de** $60°$ con el eje OX
   (Sol: $x \approx \pm 1.225$, puntos $(1.225,\ 0.707)$ y $(-1.225,\ 0.707)$)

   e) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$, que sea **paralela a la recta** $y = -x + 5$
   (Sol: $x = 0$, punto $(0,\ 3)$)

   f) $f(x) = \sqrt{2x+3}$, que forme un **ángulo de** $45°$ con el eje OX
   (Sol: $x = -1$, punto $(-1,\ 1)$)

   g) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1} + \ln(x+1)$, que sea **paralela a la recta** $y = x + 3$
   (Sol: $x = 1$, punto $(1,\ 1 + \ln 2)$)

   h) $f(x) = \ln(x) + \dfrac{1}{x^2}$, que forme un **ángulo de** $135°$ con el eje OX
   (Sol: $x = 1$, punto $(1,\ 1)$)

5. Sea la función $f(x) = ax^2 + bx$. Se pide calcular los valores de a y b para que su tangente en $x = 1$ coincida con la tangente a $y = \ln x$. (Sol: $a = 1, b = -1$)

6. Ajusta los parámetros a y b para que la función $f(x) = ax^3 + b$ tenga como recta tangente en $x = 1$ la recta $y = 2x + 3$. (Sol: $a = 2/3$, $b = 13/3$)

7. ¿Cuánto tienen que valer a y b para que la función $f(x) = \sqrt{ax^2 + b}$ tenga como tangente en $x = 1$ la recta $y = 3x + 2$? (Sol: $a = 15, b = 10$)

8. ¿Cuánto tienen que valer a y b para que la función $f(x) = \dfrac{ax + b}{x + 1}$ tenga como tangente en $x = 0$ la recta $y = 2x + 3$? (Sol: $a = 5, b = 3$)

9. Determina el valor de k de m para que la función $f(x) = ke^{2x} + m$ tenga como tangente en $x = 0$ a la recta $y = 4x + 1$ (Sol: $k = 2$, $m = -1$)