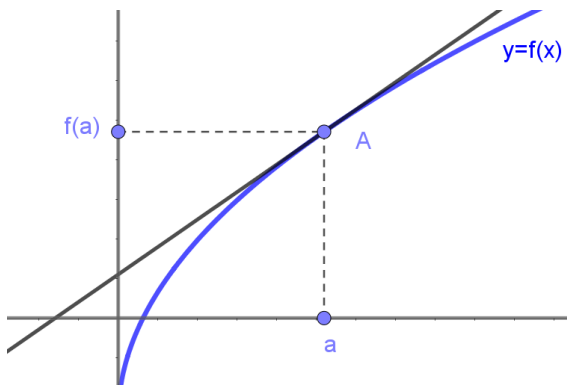




LECCIÓN 1. CONCEPTO DE DERIVADA.



El concepto de derivada fue descubierto por en el siglo XVII por Isaac Newton y por Gottfried Leibniz de manera independiente, lo que llevo a una gran controversia sobre su autoría. Surge a partir del siguiente problema:

Dada una función f y un punto a de su dominio, **determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $A = (a, f(a))$** . Por recta tangente se entiende la recta que mejor aproxima a la curva en un entorno cercano del punto.

La derivación tiene mucha aplicaciones. Entre las más destacadas:

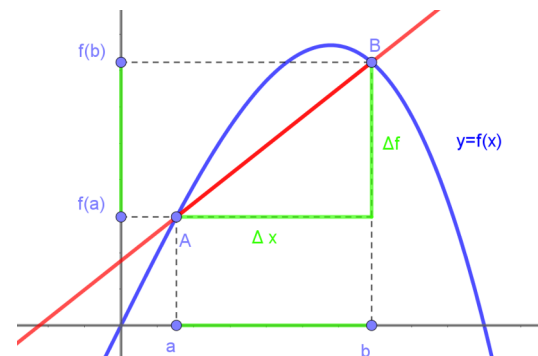
- **Sirve para estudiar el crecimiento de una función (y su curvatura) y por lo tanto para representar funciones gráficamente.** Esta aplicación será la que trabajamos más directamente a lo largo de esta unidad.
- Determinar los valores máximos y mínimos de la función, lo cual tiene mucha importancia en problemas de la vida real donde se quiere optimizar algún proceso. Este tipo de problema es muy frecuente dentro de la ingeniería.
- Dentro de la física , permite determinar la velocidad (instantánea) de movimiento de una masa puntual a partir de su vector posición.
- En óptica sirve para determinar ángulos de reflexión y refracción.

TASA DE VARIACIÓN MEDIA DE UNA FUNCIÓN

Se define la tasa de variación media de una función f en el intervalo $[a, b]$ como el siguiente cociente:

$$TVM f_{[a,b]} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

NOTAS:



- Nótese que la tasa de variación media de la función f en el intervalo $[a, b]$ coincide la pendiente de la cuerda determinada por los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$

$$m_{AB} = TVM f_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Recuerda que la pendiente de una recta coincide con el la tangente del ángulo que forma dicha recta con el eje OX.
- La tasa de variación media de f en $[a, b]$ indica la velocidad media con la que crece la función en dicho intervalo.

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

La derivada de la función f (coloreada de azul) en el punto A va a ser la pendiente m de la recta tangente a f en A (la recta de color negro).

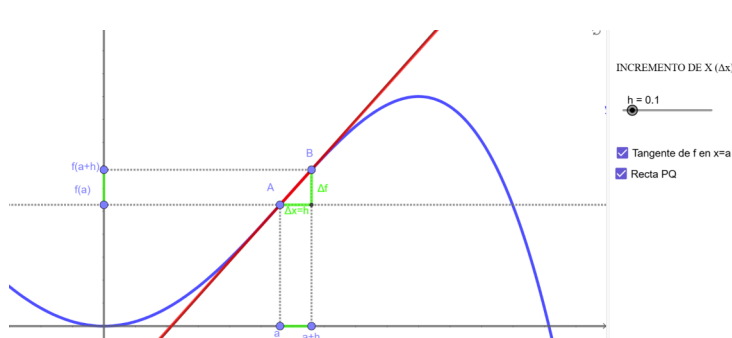
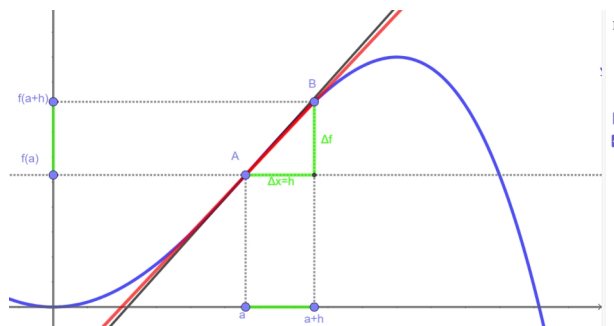
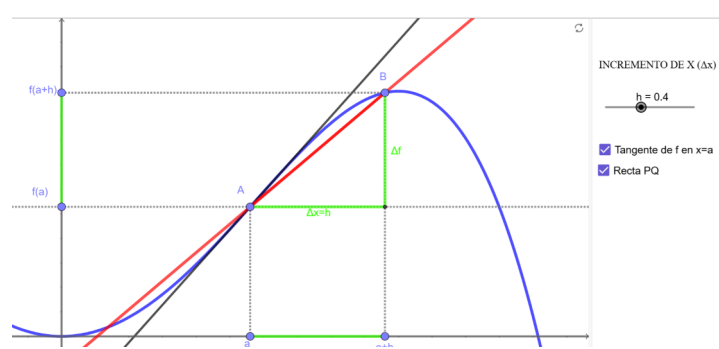
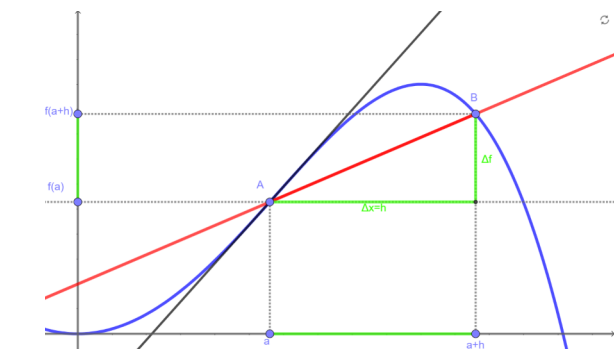
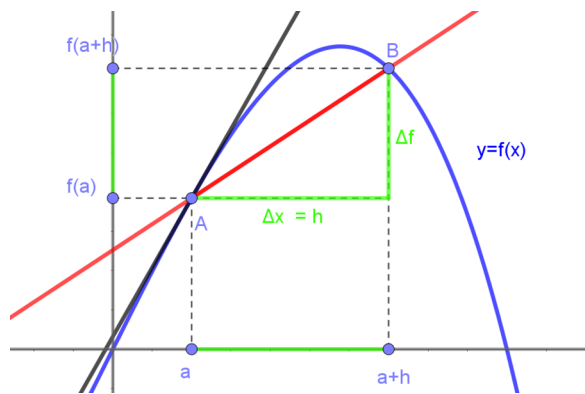
Esa pendiente no se puede calcular directamente, pero podemos aproximarla de la siguiente manera:

Calculamos la tasa de variación media de una función f en el intervalo $[a, a + h]$.

$$TVM f_{[a, a+h]} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Este número coincide con la pendiente de la cuerda AB (la recta de color rojo).

Cuanto más pequeño tomemos el valor de h , la cuerda AB se aproximará cada vez más a la recta tangente a f en el punto A .



Se deduce entonces que a medida que $h \rightarrow 0$ la pendiente m_{AB} de la cuerda AB se aproximará cada vez más a la pendiente m de la recta tangente a f en A . Es decir:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} m_{AB} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

DEFINICIÓN DE DERIVADA: una función f es derivable en $x = a$ si existe el siguiente límite:

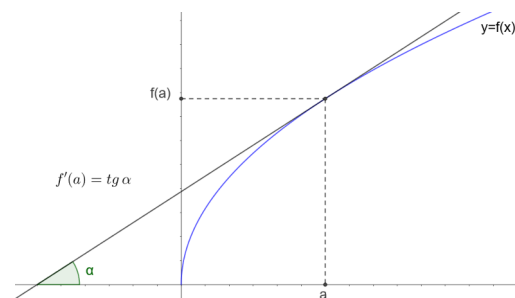
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si dicho límite existe, lo llamamos **derivada de f en a** .

Decimos que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable si es derivable en todos los puntos del intervalo (a, b) .

INTREPRETACIÓN GEOMÉTRICA: la derivada de la función f en el punto $x = a$ coincide con la pendiente m de la recta tangente a la función en el punto $x = a$.

$$f'(a) = m = \tan \alpha$$



EXPRESIÓN ALTERNATIVA (sustituyendo $h = x - a$)

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

EJEMPLO 1

a) Estudiar la derivabilidad de $f(x) = x^2$ en $x = 4$ usando la definición de derivada.

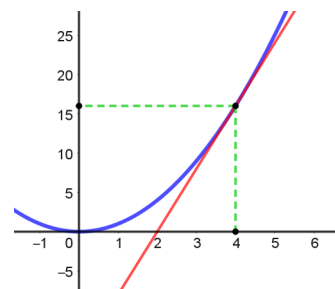
b) Estudiar la derivabilidad de $f(x) = \frac{x-1}{x}$ en $x = 3$ usando la definición de derivada.

a) Recordemos que: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. En nuestro caso: $f(x) = x^2$ y $a = 4$. Por lo tanto:

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4^2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{0}{0} \text{ IND.T.} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 8$$

La pendiente de la recta tangente a f en el punto $(4, f(4))$ es

$$m = f'(4) = 8.$$



b) En este caso:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x-1}{x} - \frac{2}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3(x-1) - 2x}{3x}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-1) - 2x}{3x(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{3x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{3x} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

FUNCIÓN DERIVADA: dada la función f , su función derivada (o directamente derivada) es la función f' cuyo valor en cada punto es la derivada de f en ese punto.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

EJEMPLO 2: Estudiar la derivabilidad de $f(x) = x^2$ usando la definición de derivada. Usar la función derivada para calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $x = 3$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Por lo tanto: $f(x) = 2x$

Entonces: $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

PROPIEDADES: son derivables en su dominio de definición las siguientes funciones

	EJEMPLOS
1. Funciones polinómicas	$f(x) = 2x^3 - 2x + 1$
2. Funciones racionales	$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$
3. Funciones irracionales	$f(x) = \sqrt{3x + 1}$
4. Funciones exponenciales	$f(x) = e^{3x-2}$
5. Funciones logarítmicas	$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
6. Funciones trigonométricas directas e inversas	$\begin{matrix} \text{sen } x & \text{cos } x & \text{tan } x \\ \text{arcsen } x & \text{arccos } x & \text{arctan } x \end{matrix}$

NOTA: Sobre todo en física se usa mucho la notación de Leibniz para la derivada de una función

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$$

Esta expresión proviene de la expresión del límite de la función derivada en un punto:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{df}{dx}$$

EJERCICIOS

- 1. Demostrar usando la definición la derivada que $f(x) = x^2 - 2x + 3$ es derivable $x=2$. (SOL: $\exists f'(2)=2$).**
- Dada la función $f(x) = x^3$, se pide calcular usando la definición de derivada:
 - a) la derivada en $x=-2$ (SOL $f'(-2)=12$)
 - b) Calcular su función derivada. (Sol: $f'(x)=3x^2$)
- Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$, se pide calcular usando la definición de derivada:
 - a) la derivada en $x=2$ (SOL $f'(2) = \frac{-1}{4}$)
 - b) Calcular su función derivada. (Sol: $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$)
- 4. Dada la función $f(x) = \frac{2x+3}{x}$, se pide calcular usando la definición de derivada:**
 - a) la derivada en $x=1$ (SOL $f'(1) = -3$)
 - b) Calcular su función derivada. (Sol: $f'(x) = \frac{-3}{x^2}$)
- 5. Dada la función $f(x) = \frac{x+5}{2x}$, se pide calcular usando la definición de derivada:**
 - a) la derivada en $x=2$ (SOL $f'(2) = -5/8$)
 - b) Calcular su función derivada. (Sol: $f'(x) = \frac{-5}{2x^2}$)
- Dada la función $f(x) = \frac{x+2}{3x-2}$, se pide calcular usando la definición de derivada:
 - a) la derivada en $x=2$ (SOL $f'(2) = \frac{-1}{2}$)
 - b) Calcular su función derivada. (Sol: $f'(x) = \frac{-8}{(3x-2)^2}$)
- Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$, se pide calcular usando la definición de derivada:
 - a) la derivada en $x=1$ (SOL $f'(1) = 0.5$)
 - b) Calcular su función derivada. (Sol: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$)

8. Determina el valor de la derivada a partir de la gráfica de la función f en: $x = -4$, $x = -1$ y $x = 2$.

