

LECCIÓN 2. CÁLCULO DE DERIVADAS.

DERIVADAS SIMPLES

Se obtienen usando la definición de derivada como límite. Hay más, pero en este curso solo usaremos las siguientes

FUNCIÓN	DERIVADA	EJEMPLOS
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 5 \quad f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	
$f(x) = kx$	$f'(x) = k$	$f(x) = 5x \quad f'(x) = 5$
$f(x) = x^n \quad (n \neq 0)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^7 \quad f'(x) = 7x^6$ $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad f'(x) = \frac{-2}{x^3}$ $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$f(x) = 7^x \quad f'(x) = 7^x \ln 7$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$f(x) = \log_7 x \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln 7}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$	
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$	
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	

EJERCICIO 1. Derivar a) $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$ b) $m(x) = \frac{1}{x^6}$ c) $g(x) = 6^x$ d) $h(x) = \log_9 x$

REGLAS DE DERIVACIÓN:

Dadas dos funciones f y g derivables, entonces:

1. **MULTIPLICACIÓN POR UNA CONSTANTE** La función kf es derivable y su derivada es:

$$(kf)' = kf'$$

Demostración:
$$\begin{aligned}(k \cdot f)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot f'(x)\end{aligned}$$

EJEMPLO 1. Derivar a) $f(x) = 5x^7$ b) $h(x) = -3x^9$ c) $g(x) = \frac{-8}{x^6}$

$$a) f'(x) = (5x^7)' = 5(x^7)' = 5 \cdot 7x^6 = 35x^6 \quad b) h'(x) = (-3x^9)' = (-3)(x^9)' = (-3) \cdot 9x^8 = -27x^8$$

$$c) g'(x) = (-8x^{-6})' = (-8)(x^{-6})' = (-8) \cdot (-6x^{-6-1}) = 48x^{-7} = \frac{48}{x^7}$$

EJERCICIO 2. Derivar: a) $g(x) = -5x^6$ b) $h(x) = \frac{9}{x^5}$ c) $f(x) = \frac{-3}{\sqrt[3]{x^7}}$

2. **DERIVADA DE UNA SUMA/RESTA:** La función $f \pm g$ es derivable y su derivada es:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

Demostración:

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

La derivada de una resta se demuestra de manera análoga.

EJEMPLO 2. Derivar:

a) $f(x) = 7x^5 - 8x$ b) $g(x) = 2x^5 + x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ c) $h(x) = \frac{4}{x} - 5 \sin x$

$$a) f'(x) = (7x - 8x)' = (7x^5)' - (8x)' = 7 \cdot 5x^4 - 8 \cdot 1 = 35x^4 - 8$$

$$\begin{aligned} b) g'(x) &= (2x^5 + x^3 - 3x^2 + 2x + 1)' = (2x^5)' + (x^3)' - (3x^2)' + (2x)' + (1)' \\ &= 10x^4 + 3x^2 - 6x + 2 + 0 = 10x^4 + 3x^2 - 6x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) h'(x) &= \left(\frac{4}{x} - 5 \sin x \right)' = (4x^{-1} - 5 \sin x)' = (4x^{-1})' - (5 \sin x)' = 4 \cdot (-1)x^{-2} - 5 \cos x \\ &= \frac{-4}{x^2} - 5 \cos x \end{aligned}$$

EJERCICIO 3. Derivar: a) $g(x) = x^7 - 5x^4 + 2x - 8$ b) $f(x) = 5 \cdot e^x + \cos x$

3. **DERIVADA DE UN PRODUCTO:** La función $f \cdot g$ es derivable y su derivada es:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Derivar: a) $f(x) = 5x^7(2x + 3)$ b) $g(x) = x^3e^x$ c) $h(x) = \sqrt{x^3} \cos x$

$$\begin{aligned}
 a) \quad f'(x) &= [5x^7(2x + 3)]' = (5x^7)'(2x + 3) + 5x^7(2x + 3)' = 35x^6(2x + 3) + 5x^7 \cdot 2 \\
 &= 35x^6(2x + 3) + 10x^7
 \end{aligned}$$

$$b) \quad g'(x) = (x^3e^x)' = (x^3)'e^x + x^3(e^x)' = 3x^2e^x + x^3e^x$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad h'(x) &= (x^{3/2} \cos x)' = (x^{3/2})' \cos x + x^{3/2}(\cos x)' = \frac{3}{2}x^{1/2} \cos x + x^{3/2}(-\sin x) \\
 &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \cos x - \sqrt{x^3} \sin x
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 4. Derivar las funciones: a) $g(x) = (5x + 3)8x^2$ b) $f(x) = e^x \cdot \sin x$

4. **DERIVADA DE UN COCIENTE:** La función $\frac{f}{g}$ es derivable y su derivada es:

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

EJEMPLO 4: Derivar: a) $f(x) = \frac{2x + 3}{-x^2 + 3}$ b) $m(x) = \frac{2^x}{\sin x + 5x}$

$$\begin{aligned}
 a) \quad f'(x) &= \left(\frac{2x + 3}{-x^2 + 3} \right)' = \frac{(2x + 3)'(-x^2 + 3) - (2x + 3)(-x^2 + 3)'}{(-x^2 + 3)^2} = \frac{2(-x^2 + 3) - (2x + 3)(-2x)}{(-x^2 + 3)^2} \\
 &= \frac{-2x^2 + 6 - (-4x^2 - 6x)}{(-x^2 + 3)^2} = \frac{-2x^2 + 6 + 4x^2 + 6x}{(-x^2 + 3)^2} = \frac{2x^2 + 6x + 6}{(-x^2 + 3)^2}
 \end{aligned}$$

$$b) \quad m'(x) = \left(\frac{2^x}{\sin x + 5x} \right)' = \frac{(2^x)'(\sin x + 5x) - 2^x(\sin x + 5x)'}{(\sin x + 5x)^2} = \frac{2^x \ln 2(\sin x + 5x) - 2^x(\cos x + 5)}{(\sin x + 5x)^2}$$

EJERCICIO 5: Derivar la función: a) $f(x) = \frac{x^2}{x + 3}$ b) $m(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

5. **DERIVADA DE LA COMPOSICIÓN (Regla de la cadena)**

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

Si se toma $g(x) = u$, entonces la regla de la cadena queda como:

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u'$$

Demostración:

$$\begin{aligned}(f(g(x)))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \left(\lim_{u \rightarrow g(x)} \frac{f(u) - f(g(x))}{u - g(x)} \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

Veamos cómo se aplica la regla de la cadena en distintas situaciones:

a. **FUNCIONES POTENCIALES**

Versión simple	Versión compuesta
$f(x) = x^n \quad f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = u^n \quad f'(x) = nu^{n-1}u'$

EJEMPLO 5. Derivar: a) $f(x) = (8x^2 + 3x - 7)^{11}$ b) $g(x) = \sqrt{5x^3 - 7x^2}$ c) $h(x) = \sin^2 x$

a) $f'(x) = [(8x^2 + 3x - 7)^{11}]' = 11(8x^2 + 3x - 7)^{10}(8x^2 + 3x - 7)' = 11(8x^2 + 3x - 7)^{10}(16x + 3)$

b) $g'(x) = [\sqrt{5x^3 - 7x^2}]' = [(5x^3 - 7x^2)^{1/2}]' = \frac{1}{2}(5x^3 - 7x^2)^{-1/2}(5x^3 - 7x^2)'$
 $= \frac{1}{2}(5x^3 - 7x^2)^{-1/2}(15x^2 - 14x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(5x^3 - 7x^2)^{1/2}} (15x^2 - 14x) = \frac{15x^2 - 14x}{2\sqrt{5x^3 - 7x^2}}$

c) $h'(x) = [\sin^2 x]' = [(\sin x)^2]' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x$

Curiosidad: usando la famosa fórmula del seno del ángulo doble:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

tenemos: $(\sin^2 x)' = \sin 2x$.

EJERCICIO 6. Derivar: a) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^7$ b) $y = \sqrt[3]{2x + 3}$ c) $m(x) = \cos^3 x$

b. **FUNCIONES EXPONENCIALES**

Versión simple	Versión compuesta
$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$	$f(x) = e^u \quad f'(x) = e^u u'$
$f(x) = a^x \quad f'(x) = a^x \ln a$	$f(x) = a^u \quad f'(x) = a^u \ln a u'$

EJEMPLO 6. Derivar: a) $f(x) = e^{x^2+x+1}$ b) $g(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$ c) $h(x) = 2^{\cos x}$

a) $f'(x) = (e^{x^2+x+1})' = e^{x^2+x+1}(x^2 + x + 1)' = e^{x^2+x+1}(2x + 1)$

$$b) g'(x) = [e^{\frac{x}{1-x}}]' = e^{\frac{x}{1-x}} \left(\frac{x}{1-x} \right)' = e^{\frac{x}{1-x}} \frac{(1-x) \cdot 1 - x(-1)}{(1-x)^2} = e^{\frac{x}{1-x}} \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{e^{\frac{x}{1-x}}}{(1-x)^2}$$

$$c) h'(x) = [2^{\cos x}]' = 2^{\cos x} \ln 2 (\cos x)' = 2^{\cos x} \ln 2 (-\sin x) = -2^{\cos x} \ln 2 \sin x$$

EJERCICIO 7. Derivar: a) $f(x) = e^{4x+3}$ b) $y = 5^{\frac{1+x}{1-x}}$

c. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Versión simple	Versión compuesta
$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln u \quad f'(x) = \frac{u'}{u}$
$f(x) = \log_a x \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$f(x) = \log_a u \quad f'(x) = \frac{u'}{u \ln a}$

EJEMPLO 7. Derivar: a) $f(x) = \ln(x^2 + 3)$ b) $g(x) = \ln\left(\frac{-7x+3}{4x-1}\right)$ c) $h(x) = \log_3(5x^2 + 3x)$

$$a) f'(x) = [\ln(x^2 + 3)]' = \frac{1}{x^2 + 3} (x^2 + 3)' = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

$$\begin{aligned} b) g'(x) &= \left[\ln\left(\frac{-7x+3}{4x-1}\right) \right]' = \frac{1}{\frac{-7x+3}{4x-1}} \left(\frac{-7x+3}{4x-1} \right)' = \frac{1}{\frac{-7x+3}{4x-1}} \frac{(-7)(4x-1) - (-7x+3) \cdot 4}{(4x-1)^2} \\ &= \frac{4x-1}{-7x+3} \frac{-28x+7+28x-12}{(4x-1)^2} = \frac{4x-1}{-7x+3} \frac{-5}{(4x-1)^2} = \frac{-5(4x-1)}{(-7x+3)(4x-1)^2} \\ &= \frac{-5}{(-7x+3)(4x-1)} \end{aligned}$$

ALTERNATIVA: Para simplificar la derivada, podemos usar las propiedades de los logaritmos antes de derivar:

$$g(x) = \ln\left(\frac{-7x+3}{4x-1}\right) = \ln(-7x+3) - \ln(4x-1)$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} g'(x) &= [\ln(-7x+3) - \ln(4x-1)]' = [\ln(-7x+3)]' - [\ln(4x-1)]' = \frac{-7}{-7x+3} \frac{4}{4x-1} \\ &= \frac{-7(4x-1)}{(-7x+3)(4x-1)} - \frac{4(-7x+3)}{(-7x+3)(4x-1)} = \frac{-28x+7}{(-7x+3)(4x-1)} - \frac{-28x+12}{(-7x+3)(4x-1)} = \\ &= \frac{-5}{(-7x+3)(4x-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) h'(x) &= [\log_3(5x^2 + 3x)]' = \frac{1}{(5x^2 + 3x) \ln 3} (5x^2 + 3x)' = \frac{1}{(5x^2 + 3x) \ln 3} (10x + 3) \\ &= \frac{10x + 3}{(5x^2 + 3x) \ln 3} \end{aligned}$$

EJERCICIO 8: Derivar: a) $t(x) = \ln(5x + 3)$ b) $y = \ln\left(\frac{2x+3}{5x+1}\right)$

d. **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

Versión simple	Versión compuesta
$f(x) = \operatorname{sen} x \quad f'(x) = \cos x$	$f(x) = \operatorname{sen} u \quad f'(x) = \cos u \cdot u'$
$f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x$	$f(x) = \cos u \quad f'(x) = -\operatorname{sen} u \cdot u'$
$f(x) = \tan x \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan u$ $f'(x) = \frac{u'}{\cos^2 u} = [1 + \tan^2 u] u'$

EJEMPLO 8. Derivar: a) $f(x) = \cos(x^2 + 5x)$ b) $g(x) = \sin(2^x + 1)$ c) $m(x) = \tan(8x + 3)$

a) $f'(x) = [\cos(x^2 + 5x)]' = -\operatorname{sen}(x^2 + 5x)(x^2 + 5x)' = -\operatorname{sen}(x^2 + 5x)(2x + 5)$

b) $g'(x) = [\sin(2^x + 1)]' = \cos(2^x + 1)(2^x + 1)' = \cos(2^x + 1) 2^x \ln 2$

c) $m'(x) = [\tan(8x + 3)]' = \frac{1}{\cos^2(8x + 3)}(8x + 3)' = \frac{1}{\cos^2(8x + 3)} \cdot 8 = \frac{8}{\cos^2(8x + 3)}$

EJERCICIO 9: Derivar: a) $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt[3]{x} + x)$ b) $g(x) = \cos(\sqrt[5]{x} + 7)$

EJERCICIO 10. (DERIVADAS TIPO EXAMEN.) Derivar las funciones:

a) $f(x) = (8x^2 - 5x - 3)^9 \cdot (4x + 3)^7$ b) $y = 3^x \cdot \ln \sqrt{x+1}$ c) $g(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

d) $h(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{4x+5}{x-1}}\right)$ e) $m(x) = \cos^2(x^7 + 1) \cdot e^x$

CÁLCULO DE DERIVADAS USANDO MEDIOS INFORMÁTICOS

Podemos usar [Symbolab](#) o cualquier otro programa matemático para hacer cálculos con derivadas:

Soluciones > $(5x+3)^5$

$(5x+3)^5$

Pasos Gráfica Ejemplos

$(5x+3)^5$

Solución

5

Ocultar pasos

Pasos de solución

$(5x+3)^5$

Aplicar la regla de la suma/diferencia: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

$= (5x)' + 3'$