

## LECCIÓN 5. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.



En este curso solo vamos a tratar la noción de límite de manera intuitiva. El año que viene se estudiará la definición teórica. De todas maneras, por si a alguien le interesa profundizar aquí le dejo un enlace en el que se explica de manera más profunda.

**IDEA INTUITIVA DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO:** El límite de la función  $f$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$ , es el valor al que se aproxima  $f(x)$  a medida que se toman valores  $x$  cada vez más próximos a  $x_0$ , sin llegar a ser exactamente  $x_0$ . Se representa por:

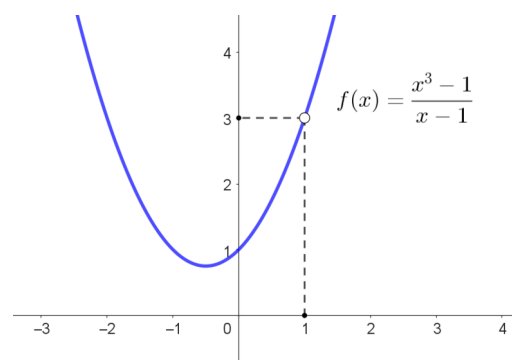
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

EJEMPLO 1: Estudiemos el límite  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$$

Evidentemente no podemos calcular  $f(1)$ , pero se puede estudiar el límite de la función en ese punto.

|                     |      |        |       |
|---------------------|------|--------|-------|
| $x \rightarrow 1^+$ | 1,1  | 1,01   | 1,001 |
| $f(x)$              | 3,31 | 3,0301 | 3,003 |
| $x \rightarrow 1^-$ | 0,9  | 0,99   | 0,999 |
| $f(x)$              | 2,71 | 2,9701 | 2,997 |



de donde se deduce que:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

Como se observa en el ejemplo anterior, el concepto de límite es fundamental para estudiar el comportamiento de una función cerca de un punto, independientemente de que la función esté o no definida en dicho punto.

### LÍMITES LATERALES:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  : **El límite lateral por la izquierda** de una función  $f$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$ , es el valor al que se aproxima  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima al valor  $x_0$  con números menores que  $x_0$ .
- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  : **El límite lateral por la derecha** de una función  $f$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$ , es el valor al que se aproxima  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima al valor  $x_0$  con números mayores que  $x_0$ .

**CONDICIÓN PARA LA EXISTENCIA DE LÍMITE:** Para que exista límite de una función  $f$  en un punto  $x_0$  es necesario y suficiente que ambos límites laterales existan y que sean iguales entre sí. Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

EJEMPLO 2: Dada la gráfica de la función  $f$ , está claro que en el punto  $x=6$  los límites laterales son

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 3$$

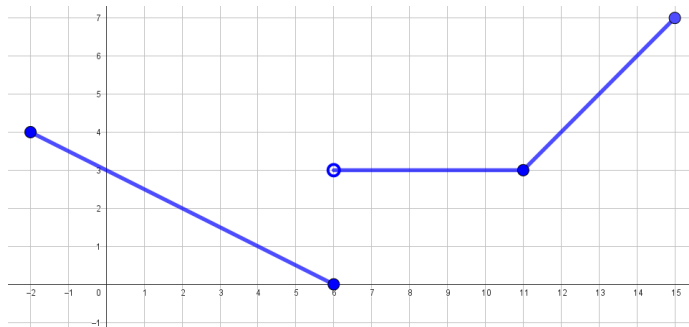
y como son distintos no existe  $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ .

Sin embargo en el punto  $x = 11$

$$\lim_{x \rightarrow 11^-} f(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 11^+} f(x) = 3$$

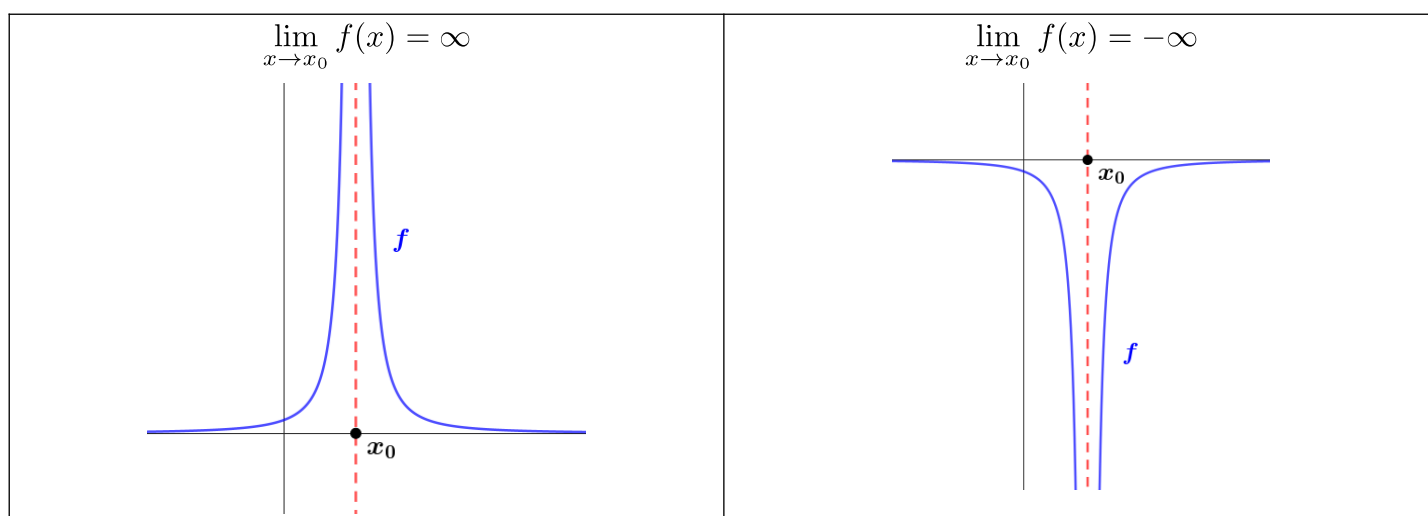
y por lo tanto existe el límite de  $f$  en  $x = 11$  y es igual a:

$$\lim_{x \rightarrow 11} f(x) = 3$$

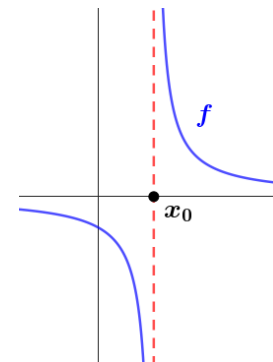


Como se ve en el ejemplo 2, el valor de la función en un punto y el valor del límite en ese punto **no tienen por qué coincidir**, ni siquiera existir ambos.

**LÍMITES INFINITOS:** Cuando los valores que obtenemos al calcular el límite son cada vez más grandes (o pequeños) tenemos que:



En todo caso para decir que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  es necesario que ambos límites laterales coincidan. En caso contrario el límite no existirá, como en el ejemplo de la imagen.

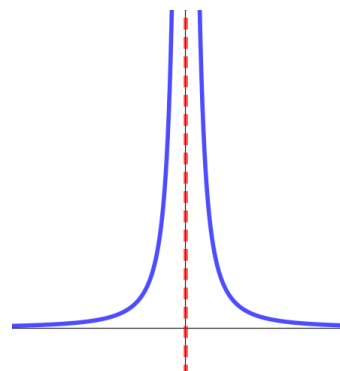


NOTA: Siempre que algunos de los límites laterales valga  $\pm\infty$  se dice que hay una **asíntota vertical de ecuación**  $x = x_0$  independientemente del valor de la función en el punto.

EJEMPLO 3:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

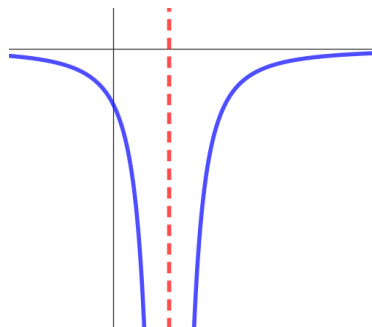
|                     |      |        |           |
|---------------------|------|--------|-----------|
| $x \rightarrow 0^-$ | -0,1 | -0,01  | -0,001    |
| $f(x)$              | 100  | 10 000 | 1 000 000 |
| $x \rightarrow 0^+$ | 0,1  | 0,01   | 0,001     |
| $f(x)$              | 100  | 10 000 | 1 000 000 |



La función tiene una asíntota vertical de ecuación  $x = 0$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$

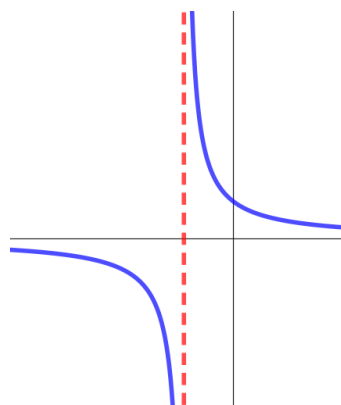
|                     |      |         |         |
|---------------------|------|---------|---------|
| $x \rightarrow 1^-$ | 0,9  | 0,99    | 0,999   |
| $f(x)$              | -100 | $-10^4$ | $-10^6$ |
| $x \rightarrow 1^+$ | 1,1  | 1,01    | 1,001   |
| $f(x)$              | -100 | $-10^4$ | $-10^6$ |



La función tiene una asíntota vertical de ecuación  $x = 1$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3}{x+2} = \nexists$

|                      |      |       |        |
|----------------------|------|-------|--------|
| $x \rightarrow -2^-$ | -2,1 | -2,01 | -2,001 |
| $f(x)$               | -30  | -300  | -3 000 |
| $x \rightarrow -2^+$ | -1,9 | -1,99 | -1,999 |
| $f(x)$               | 30   | 300   | 3 000  |



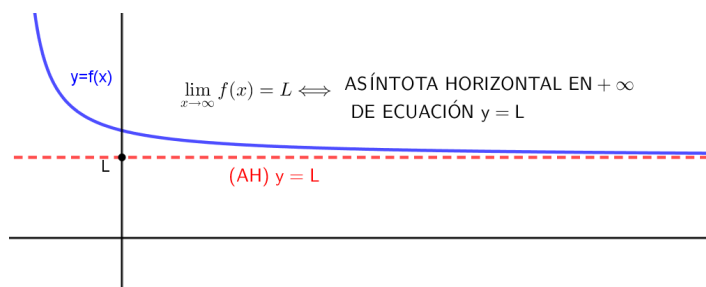
En este caso el límite no existe ya que los límites laterales son distintos:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{x+2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3}{x+2} = \infty$$

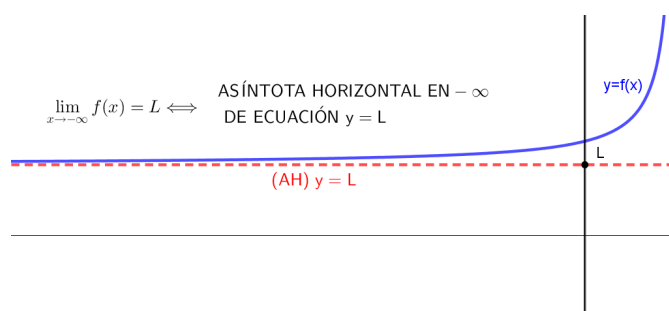
Sin embargo si que hay asíntota vertical de ecuación  $x = -2$ , pues la única condición que debe cumplirse es que por lo menos uno de los dos límites laterales de  $\pm\infty$ .

## LÍMITES EN EL INFINITO:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ : es el valor al que tiende  $f$  si se dan valores cada vez más grandes a la  $x$ .



$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ : es el valor al que tiende  $f$  si se dan valores cada vez más pequeños a la  $x$ .



**NOTA:** obsérvese que cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  no tiene sentido hablar de límites laterales.

EJEMPLO 4: Dada la función

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$$

Se pide calcular a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  y b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

a) Para estudiar  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  hacemos la siguiente tabla:

|                        |        |        |       |
|------------------------|--------|--------|-------|
| $x \rightarrow \infty$ | 10     | 100    | 1000  |
| $f(x)$                 | 3,4444 | 3,0404 | 3,004 |

De donde se deduce:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ .

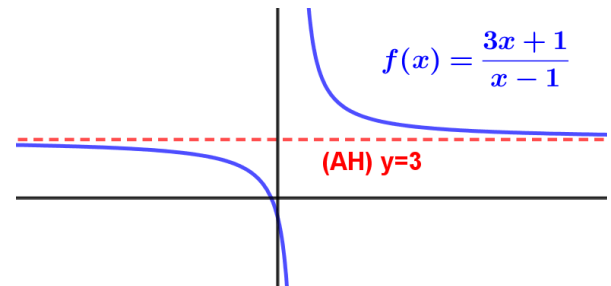
Por lo tanto, la función tiene una asíntota horizontal de ecuación  $y = 3$  cuando  $x \rightarrow \infty$

b) De manera semejante, para estudiar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  construimos la siguiente tabla:

|                         |        |        |        |
|-------------------------|--------|--------|--------|
| $x \rightarrow -\infty$ | -10    | -100   | -1000  |
| $f(x)$                  | 2,6364 | 2,9604 | 2,9960 |

De donde se deduce:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

Por lo tanto, la función tiene una asíntota horizontal de ecuación  $y = 3$  cuando  $x \rightarrow -\infty$

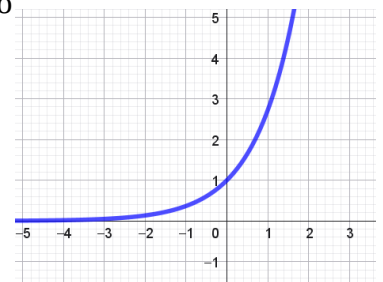


**NOTA :** El ejemplo anterior muestra una característica propia de las **funciones racionales** es que las asíntotas horizontales en  $+\infty$  coinciden con las de  $-\infty$ . Esto no es cierto para funciones no racionales.

Un ejemplo evidente es la función exponencial  $f(x) = e^x$  en la que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

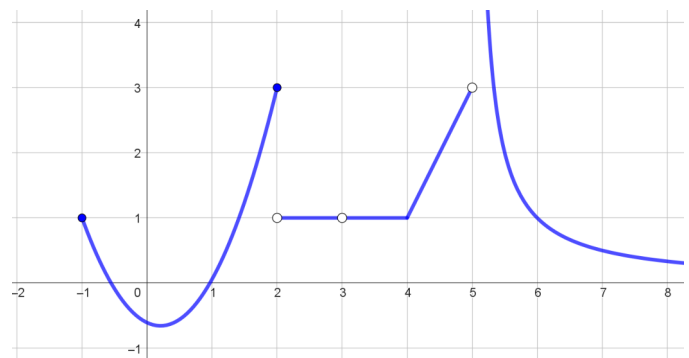
Como se observa en esta función hay una asíntota horizontal de ecuación  $y = 0$  cuando  $x \rightarrow -\infty$  pero no cuando  $x \rightarrow \infty$



## EJERCICIOS

1. Dada la función  $f$  dada por la gráfica, determinar:

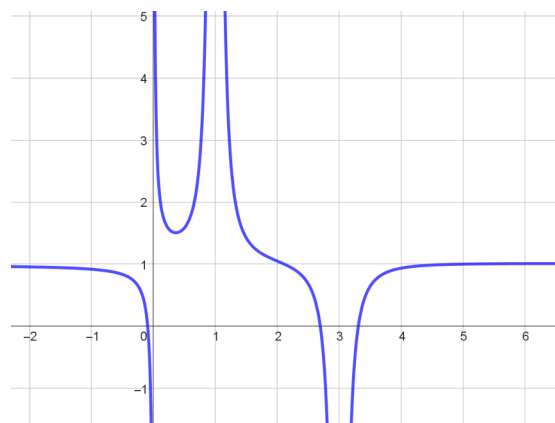
- |                                        |                                        |
|----------------------------------------|----------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$       | b) $f(2)$                              |
| c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$       | d) $f(3)$                              |
| e) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$       | f) $f(4)$                              |
| g) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$       | h) $f(5)$                              |
| i) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  | j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ |
| k) Asíntotas verticales y horizontales | l) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$      |
| m) $Rgf$ y $Domf$                      |                                        |



2. Dada la función  $f$  dada por la gráfica, determinar:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$       b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$       d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

e) Asíntotas verticales y horizontales.  
 f) Dominio y rango



3. Representar gráficamente, de forma esquemática, una función con las siguientes características:

- $\text{Dom } f = (-2, 1) \cup (1, \infty)$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) > \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$
- $f$  creciente en  $(-2, 1) \cup (1, \infty)$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

Responde a las siguientes preguntas sobre la función estudiada:

- a) ¿Cuánto vale  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ?  
 b) ¿Tiene sentido intentar calcular  $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ ?  
 c) Si se cambia la primera condición por  $\text{Dom } f = [-2, 1) \cup (1, \infty)$ , ¿cómo quedaría la función?

4. Representar gráficamente una función con las siguientes características:

- $\text{Dom } f = (-\infty, 1) \cup (1, 2]$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- $f$  decreciente en todo su dominio
- La función tiene una asíntota vertical en  $x = 1$
- $f(2) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2)$

Responde razonadamente a las siguientes preguntas sobre la función estudiada:

- a) ¿Cuánto vale  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ?  
 b) ¿Sería posible con estas condiciones que  $f(0) = 2$ ?  
 c) ¿Sería posible con estas condiciones que  $f(1) = 1$ ?  
 d) ¿Sería posible con estas condiciones que  $f(1, 5) = -2$ ?  
 e) ¿Qué valores posibles puede tener  $f(0)$ ?

5. Se considera una función  $f$  con las siguiente características:

- $\text{Dom } f = [-5, \infty)$
- $f(-5) = 1$
- $f$  es creciente en todo su dominio
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$

Razona apoyándote en dibujos si son posibles los siguientes valores para  $f(1)$

- a)  $f(1) = 4$       b)  $f(1) = 2$       c)  $f(1) = 0$       d)  $f(1) = 3$

Si se elimina la condición de que  $f$  sea creciente ¿son posibles los resultado?

6. Supóngase que una función  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = 2$ . ¿Puede estar  $x = 2$  en el dominio de  $f$ ? ¿Puede no estarlo?