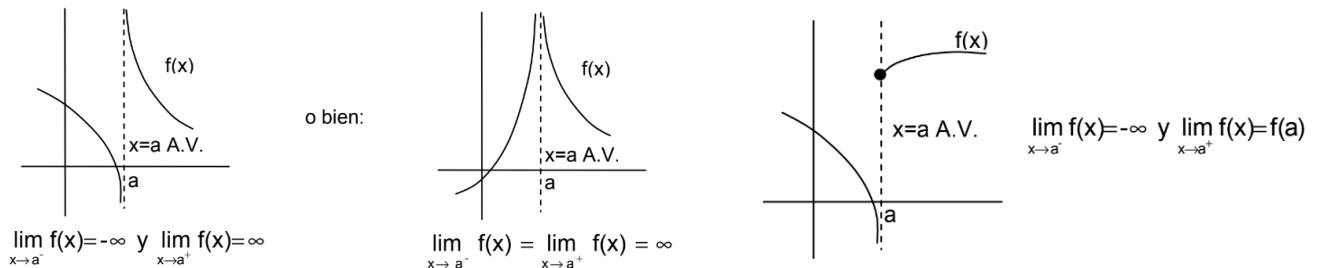


LECCIÓN 9. ASÍNTOTAS

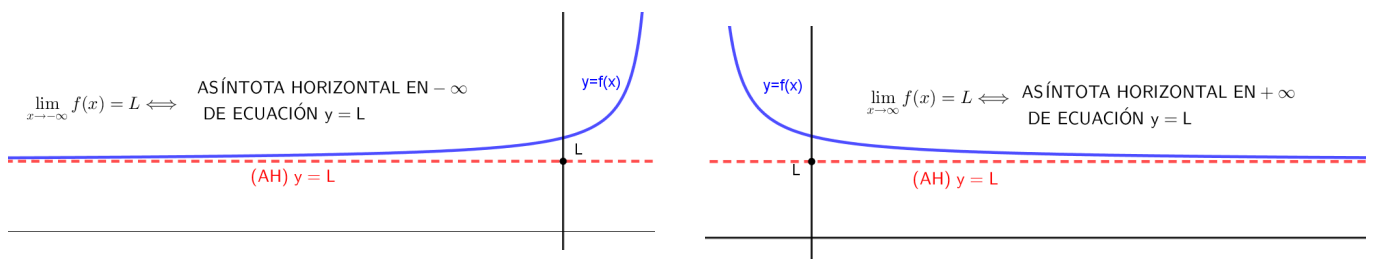
Una **asíntota** es una recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función; es decir que la distancia entre las dos tiende a ser 0.

ASÍNTOTAS VERTICALES: se dice f tiene una asíntota vertical en $x = a$ si alguno de los límites laterales de la función cuando x tiende a a es $\pm\infty$.



ASÍNTOTA HORIZONTAL: f tiene una asíntota horizontal cuando x tiende a $\pm\infty$ si:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$$



NOTA :

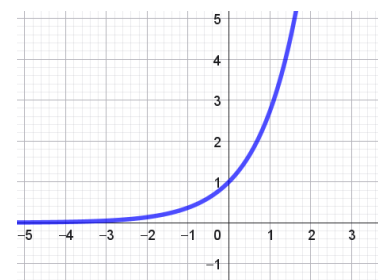
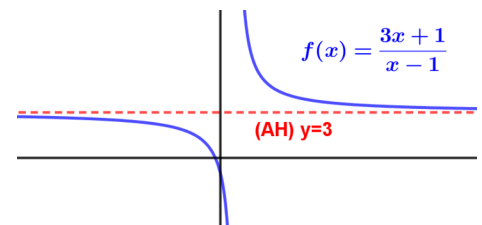
Una característica propia de las funciones racionales es que las Asíntotas Horizontales en $+\infty$ coinciden con las de $-\infty$.

Esto no es cierto para funciones no racionales.

Un ejemplo evidente es la función exponencial $f(x) = e^x$ en la que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Como se observa en esta función hay una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$ pero no cuando $x \rightarrow \infty$



APLICACIÓN: REPRESENTACIÓN DE HIPÉRBOLAS

Una función racional de la forma:

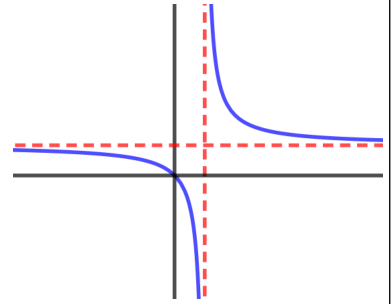
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad c \neq 0$$

es una hipérbola. Se descarta el caso en el que el numerador es un múltiplo del denominador.

Una hipérbola siempre tiene:

- una asíntota horizontal de ecuación $y = a/c$
- una asíntota vertical en el punto fuera del dominio

La hipérbola va a ser una función creciente o decreciente en todo su dominio que nunca va a cortar a sus asíntotas. Teniendo en cuenta este dato va a ser fácil de representar a partir de las ecuaciones de cada una de sus asíntotas.



EJEMPLO 1: Representar las hipérbolas:

$$a) f(x) = \frac{4x + 3}{2x + 2}$$

$$b) g(x) = \frac{3x}{2x - 1}$$

$$a) f(x) = \frac{4x + 3}{2x + 2} \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

ASÍNTOTA VERTICAL: f tiene una asíntota vertical en $x = -1$ ya que

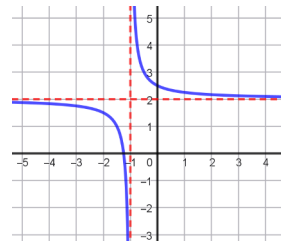
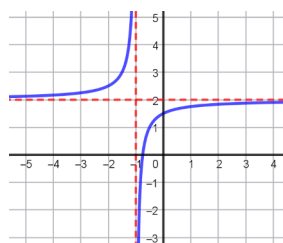
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x + 3}{2x + 2} = \frac{7}{0} \text{ INDT} = \pm\infty$$

Como es del tipo $\frac{k}{0}$ ya sabemos que es un límite infinito y que por lo tanto tiene una asíntota vertical.

ASÍNTOTA HORIZONTAL: en $y = 4/2 = 2$ ya que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{2x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

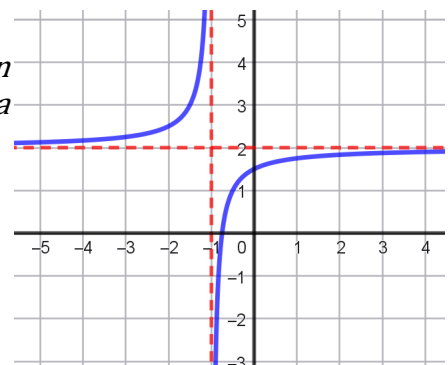
Una vez tenemos representadas las asíntotas tenemos dos opciones para la función:



Para saber cual de las dos es, basta evaluar la función en un punto y ver si queda por debajo o encima de la asíntota horizontal.

Por ejemplo, en nuestro caso podemos hacer:

$$f(0) = \frac{4 \cdot 0 + 3}{2} = \frac{3}{2} < 2$$



Se deduce entonces que la gráfica pedida es la primera de las dos alternativas,

$$b) g(x) = \frac{6x}{2x-1} \quad \text{Dom } g = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

PASOS PARA REPRESENTAR

1) *Asíntota Vertical:* $x = \frac{1}{2}$

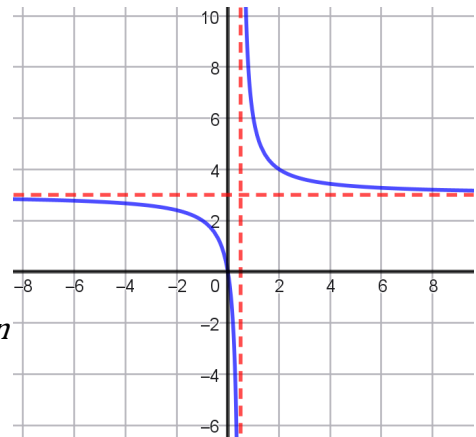
2) *Asíntota Horizontal:* $y = 6/2 = 3$

3) *Evaluamos la función en un punto:* $g(0) = 0 < 3$

4) *Representar:*

- Primero representamos ambas asíntotas.

- Luego representamos la hipérbola teniendo en cuenta el valor obtenido en el paso 3)

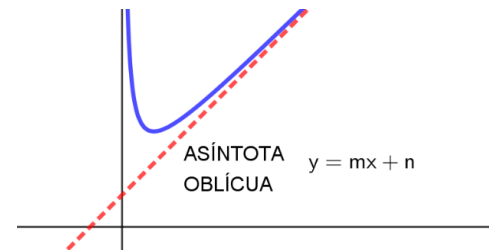


ASÍNTOTA OBLÍCUA: la función f se aproxima cada vez más a una recta oblicua $y = mx + n$ a medida que $x \rightarrow \pm\infty$. Esto se traduce en:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (mx + n) = 0$$

Para determinar la pendiente m y la ordenada en el origen n de la recta se usan las siguientes fórmulas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx$$



Para que haya una asíntota horizontal los límites anteriores tienen que ser finitos. Si $m=0$ lo que se obtiene es una asíntota horizontal.

Idea de la demostración:

Sí $y = mx + n$ es una asíntota de f , entonces para valores grandes de x se tiene que

$$f(x) \approx mx + n$$

Por lo tanto $n \approx f(x) - mx$ de donde se deduce que $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx$. Por otro lado:

$$f(x) \approx mx + n \implies \frac{f(x)}{x} \approx \frac{mx + n}{x} \implies \frac{f(x)}{x} \approx m + \frac{n}{x}$$

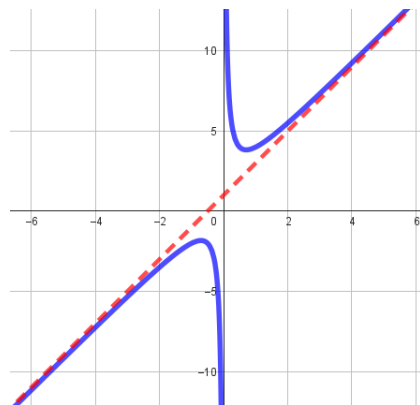
y como el término $\frac{n}{x}$ va a ser muy pequeño, tenemos que:

$$\frac{f(x)}{x} \approx m$$

y por lo tanto $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.

NOTA : una función racional que tiene una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \infty$ tendrá la misma asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

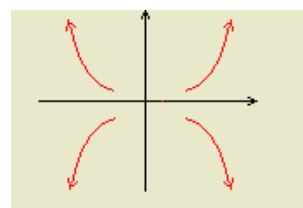
Por lo tanto solo hace falta estudiar las asíntotas oblicuas cuando $x \rightarrow \infty$.



RAMAS PARABÓLICAS: Cuando no hay ni asíntotas horizontales ni oblicuas puede haber una rama parabólica:

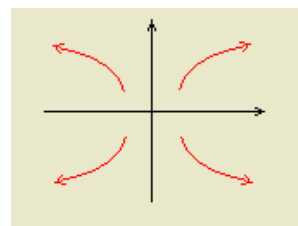
- Se tiene una **rama parabólica de eje vertical** si:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$



- Se tiene una **rama parabólica de eje horizontal** si:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

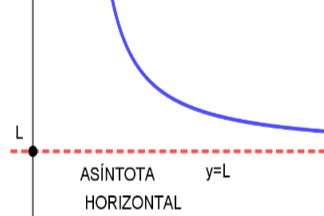


RESUMEN: ESTUDIO DE LAS RAMAS INFINITAS (CUANDO $x \rightarrow \infty$)

Se calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Si
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$

f tiene asíntota horizontal de ecuación $y=L$



Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

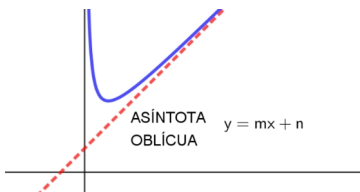
Se calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

Si:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$$

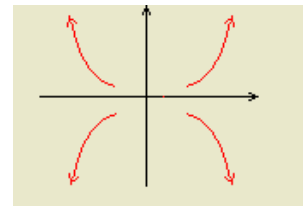
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = n$$

f tiene una asíntota oblicua de ecuación $y = mx + n$



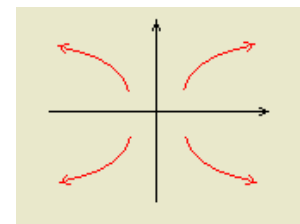
- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$

RAMA PARABÓLICA DE EJE VERTICAL



- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

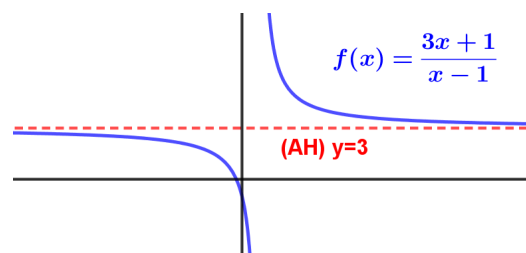
RAMA PARABÓLICA DE EJE HORIZONTAL



En los casos concretos que nos interesa:

Funciones polinómicas : siempre tiene ramas parabólicas (de eje vertical), salvo que el polinomio sea de grado 1. En ese caso la función es una recta.

Funciones racionales: Una característica importante de las funciones racionales es que las ramas en ∞ coinciden con las de $-\infty$, por lo que solo hace falta estudiarlas por un lado.



Otra característica importante de las funciones racionales viene dada por las siguientes propiedades:

GRADO NUMERADOR $\leq$ GRADO DENOMINADOR	$\Rightarrow$	ASÍNTOTA HORIZONTAL
GRADO NUMERADOR = GRADO DENOMINADOR + 1	$\Rightarrow$	ASÍNTOTA OBLICUA
GRADO NUMERADOR > GRADO DENOMINADOR + 1	$\Rightarrow$	RAMA PARABÓLICA (DE EJE VERTICAL)

Se exponen a continuación varios ejemplos para visualizar estas propiedades de las funciones racionales.

EJEMPLO 1:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

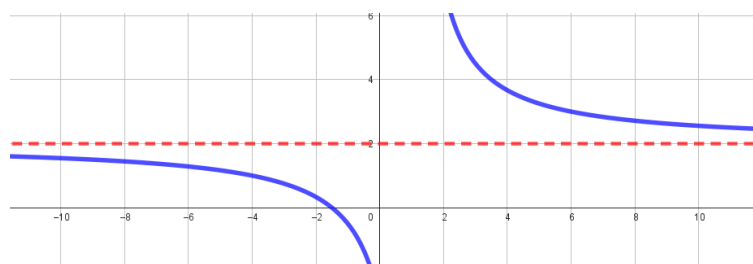
Grado numerador = 1

Grado denominador = 1

Tiene una **asíntota horizontal**. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

La asíntota tiene ecuación $y = 2$



EJEMPLO 2:

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+2}{x+1}$$

Grado numerador = 2

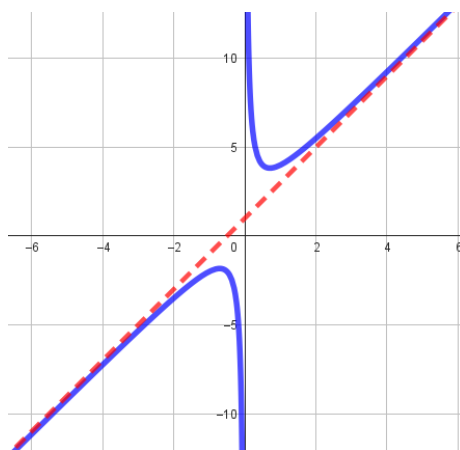
Grado denominador = 1

Tiene una **asíntota oblicua** $y = mx + n$. Los coeficientes se obtienen con los siguientes límites:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2+3x+2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3x+2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3x+2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3x+2}{x+1} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3x+2}{x+1} - \frac{2x^2-2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+1} = 1$$

La ecuación de la asíntota es $y = 2x + 1$



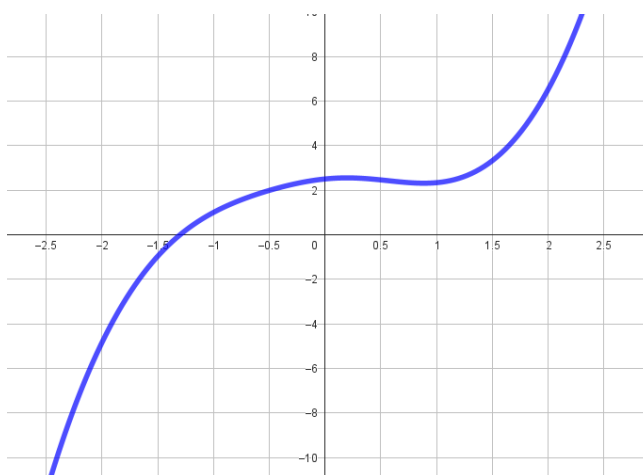
EJEMPLO 3:

$$f(x) = \frac{x^5 + x + 5}{x^2 + 2}$$

Grado numerador =5

Grado denominador=2

Rama parabólica (de eje vertical).



EJERCICIOS

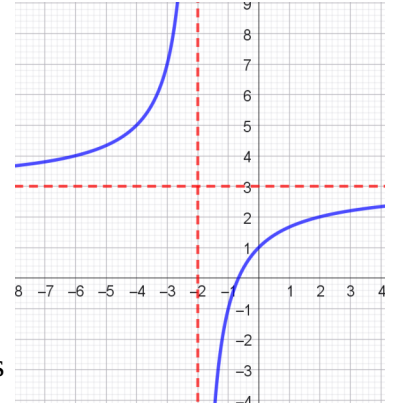
1. Representa gráficamente a partir de sus asíntotas:

a) $f(x) = \frac{8x + 1}{4x - 2}$

b) $f(x) = \frac{-3x + 2}{5x + 10}$

c) $h(x) = \frac{-3x + 6}{-3x + 10}$

2. Dada la hipérbola $f(x) = \frac{ax + 4}{cx + d}$, determina los valores de los parámetros a,c y d para que la gráfica de la hipérbola sea:
(SOL: a=6,c=2,d=4)



3. Estudia las asíntotas verticales y las ramas infinitas de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \frac{5x + 1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{4x^2}{2x^2 - x}$

c)

d)

e)

f) $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

g) $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$

h) $f(x) = \frac{-x^3 + x^2 + 1}{x^2}$

i) $f(x) = \frac{-2x^3 + x^2 - 8x - 1}{x^2 - 4}$

4. Halla una función racional que tenga asíntotas verticales en $x = 0$ y en $x = 1$, con una asíntota horizontal en $y = 3$.

5.

