

LECCIÓN 8. CONTINUIDAD

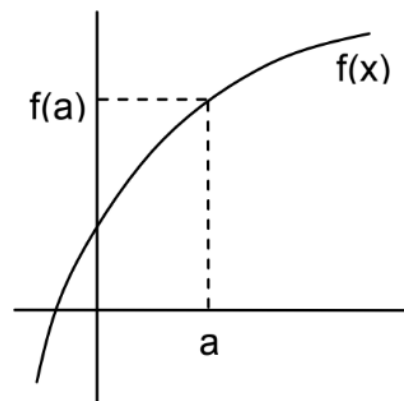
Intuitivamente, una función es continua cuando su gráfica no presenta saltos ni roturas en los puntos de su dominio.

FUNCIÓN CONTINUA: Una función f se dice continua en un punto a de su dominio si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Una función se dice continua si es continua en todos los puntos de su dominio.

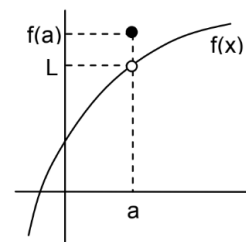
Cuando una función no es continua en un punto a de su dominio decimos que es discontinua en a .



TIPOS DE DISCONTINUIDADES:

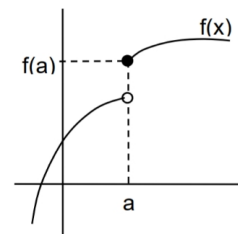
- 1) **Discontinuidad evitable:** se da cuando $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y es finito, pero :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$



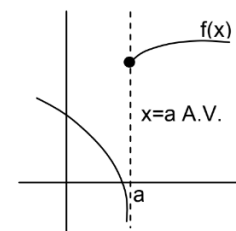
- 2) **Discontinuidad de salto finito:**

Los límites laterales son finitos pero distintos entre ellos, y por lo tanto no existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.



- 3) **Discontinuidad de salto infinito:**

Por lo menos uno de los límites laterales da $+\infty$ o $-\infty$. En ese caso tenemos una asíntota vertical de ecuación $x = a$.



- 4) **Discontinuidad esencial:** Alguno de los límites laterales no existe. No se trabajan en este curso.

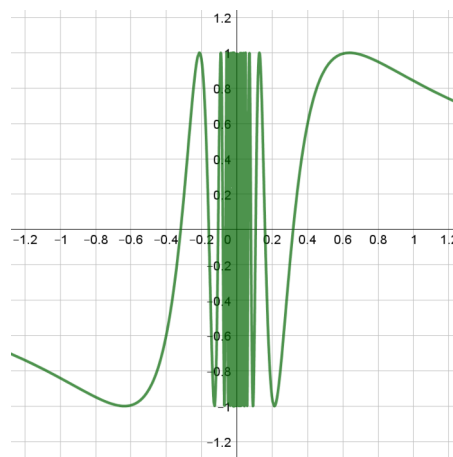
EJEMPLO DE DISCONTINUIDAD ESENCIAL:

La función

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$ ya que no existe ninguno de sus límites laterales cuando $x \rightarrow 0$

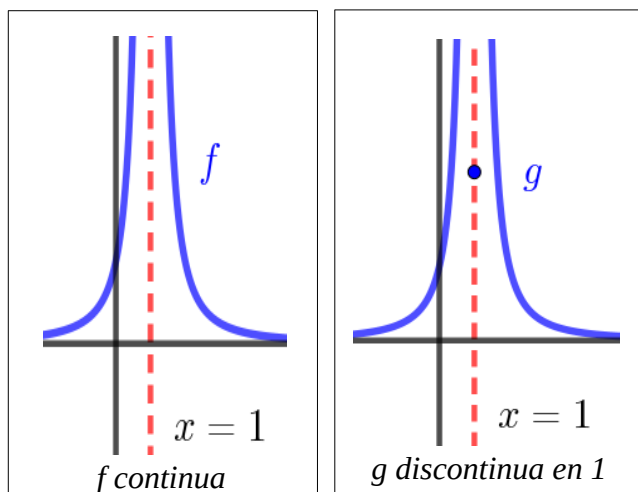
Esto se debe a que al aproximarse a 0 la función hace oscilaciones entre -1 y 1 que hacen que no tienda a ningún valor concreto



ERROR FRECUENTE: una función f solo puede ser discontinua en un punto a de su dominio.

Por ejemplo, la función f de la imagen puede parecer discontinua en el punto 1, debido a la asíntota vertical. Pero el punto 1 está fuera del dominio de la función, por lo que no tiene sentido decir que es discontinua en ese valor. Por lo tanto, la función f de la imagen es continua.

Si que sería discontinua en 1 la función g , ya que en este caso si que estaría definida en el valor 1. Tendríamos una discontinuidad de salto infinito



PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS: Dadas dos funciones continuas f y g , entonces también son continuas (en su dominio) las siguientes funciones:

- i. $f \pm g$
- ii. $f \cdot g$
- iii. $\frac{f}{g}$
- iv. $f \circ g$

FUNCIONES CONTINUAS IMPORTANTES: son continuas (en su dominio) las siguientes funciones:

	EJEMPLOS
1. Funciones polinómicas	$f(x) = 2x^3 - 2x + 1$
2. Funciones racionales	$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$
3. Funciones irracionales	$f(x) = \sqrt{3x + 1}$
4. Funciones exponenciales	$f(x) = e^{3x-2}$
5. Funciones logarítmicas	$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
6. Función valor absoluto:	$f(x) = x $
7. Funciones trigonométricas	$\sin x \quad \cos x \quad \tan x$

Debido a las propiedades anteriormente citadas, también serán continuas (en su dominio) todas las funciones de la tabla que podamos obtener combinando las funciones anteriores mediante sumas, restas, productos, divisiones y composiciones. Veámoslo con un ejemplo:

EJEMPLO 1: Las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = e^{3x}$ son ambas continuas por ser la primera polinómica y la segunda exponencial. Por lo tanto son continuas también:

a) $(f + g)(x) = 2x + 1 + e^{3x}$

b) $(f \cdot g)(x) = (2x + 1)e^{3x}$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x + 1}{e^{3x}}$

d) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^{3x}) = 2e^{3x} + 1$

e) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = e^{3(2x+1)} = e^{6x+3}$

En muchas ocasiones tiene interés el estudio de funciones cuya definición en un punto dado viene dada aparte. Por ejemplo, cuando tenemos una función racional es interesante dar un valor en los puntos fuera del dominio para estudiar su continuidad.

EJEMPLO 2: Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no ser continua, clasificar sus discontinuidades y esbozar la función en el entorno de la discontinuidad. En caso de tener una discontinuidad evitable, redefinir la función para que la función sea continua.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad b) h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$$

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ por ser una función racional cuyo denominador no se anula.

CONTINUIDAD EN $x=1$: Se tiene que cumplir la condición

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$- f(1) = 1$$

$$- \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ INDT} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ se deduce que f no es continua en $x = 1$.

SOLUCIÓN: f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ y tiene una discontinuidad evitable en $x=1$.

Podemos construir una nueva función continua redefiniendo el valor de f en el punto $x=1$ de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

Ya que de esta manera $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 = g(1)$.

$$b) h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 2, & x = 3 \end{cases} \quad \text{Dom } h = \mathbb{R}$$

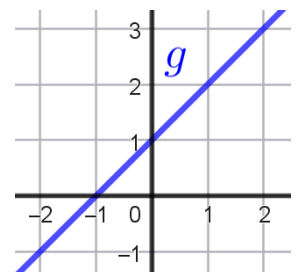
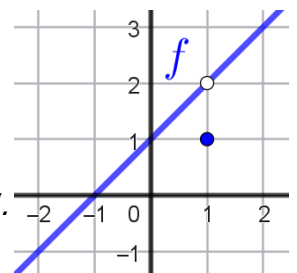
La función es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$ por ser una función racional cuyo denominador no se anula.

CONTINUIDAD EN $x=3$: Se tiene que cumplir la condición

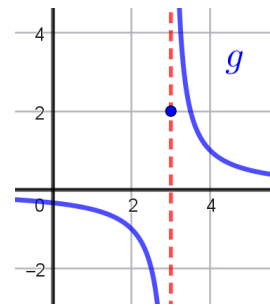
$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = h(3)$$

$$- h(3) = 2$$

$$- \lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{0} \text{ INDT} \Rightarrow h(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{3^- - 3} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{3^+ - 3} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$



SOLUCIÓN: f es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$ y tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.



CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS: Supóngase que estudiamos la continuidad de una función definida por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq a \\ f_2(x), & x > a \end{cases}$$

Donde cada una de las funciones f_1 y f_2 son continuas en sus respectivos intervalos. El único punto donde la función f puede no ser continua es en el punto de cambio de definición $x = a$.

Debido a la forma en la que está definida f , para estudiar la continuidad en $x = a$, conviene hacer el estudio de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a partir de sus límites laterales, de manera que la condición de continuidad queda de la siguiente forma:

$$f \text{ continua en } x = a \iff f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

A nivel geométrico, la continuidad en $x = a$ significa que las gráficas de f_1 y f_2 se encuentren en el mismo punto y coincidan con el valor definido de $f(a)$.

f discontinua en $x = a$	f continua en $x = a$
$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

EJEMPLO 3: Estudiar la continuidad de la siguiente función. En caso de no ser continua, clasificar sus discontinuidades y esbozar la función en el entorno de la discontinuidad.

$$f(x) = \begin{cases} \log(3x + 4), & 0 \leq x < 2 \\ x + 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

Se tiene que $\text{Dom } f = [0, \infty)$.

f es continua en $[0, 2)$ por ser función logarítmica (cuyo argumento es siempre > 0)

f es continua en $(2, \infty)$ por ser función polinómica.

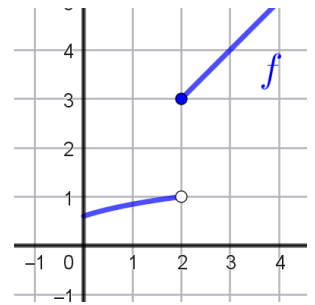
CONTINUIDAD EN $x=2$: Hay que comprobar si se verifica $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$f(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \log(3x + 4) = \log(3 \cdot 2 + 4) = \log(10) \approx 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 1 = 2 + 1 = 3$$

Por lo tanto f no es continua en $x = 2$. Como ambos límites laterales son finitos y distintos, tenemos una discontinuidad de salto finito:



EJERCICIOS:

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ x^2 - 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } q(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{x-1}, & x < 1 \\ x^2 + 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } h(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1 \\ x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x \leq 1 \\ \sqrt{x+3}, & 1 < x < 3 \\ \frac{x+2}{x-1}, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{g) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ \sqrt{x+1}, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{h) } f(x) = \begin{cases} \ln(x+2), & x \leq 0 \\ x^2 - 2x + 1, & 0 < x < 3 \\ \frac{1}{x-3}, & x \geq 3 \end{cases}$$

2. Determinar el valor del parámetro para que estas funciones sean continuas.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - a, & x \leq 1 \\ ax + 2, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + ax + 3, & x \leq 2 \\ \frac{x+a}{x+1}, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+a}, & x < 2 \\ a \sin(\pi \frac{x}{4}), & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } h(x) = \begin{cases} \ln(x+a) + 1, & x < 2 \\ e^{x-2} - 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{e) } m(x) = \begin{cases} \sqrt{x+a} + 1, & x \leq 3 \\ ax^2 - x + 2, & x > 3 \end{cases}$$

$$\text{f) } t(x) = \begin{cases} e^{ax} - 1, & x \leq 2 \\ \frac{x^2-4}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{g) } g(x) = \begin{cases} \ln(x+a), & x \leq 0 \\ \frac{x^2+2x}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{h) } j(x) = \begin{cases} a \cos(x), & x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^2 - \pi x + a}{x - \frac{\pi}{2}}, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. Determina una función definida a trozos que:

- Tenga una discontinuidad de salto finito en $x=3$ y una evitable en $x=1$.
- Tenga una discontinuidad de salto finito en $x=-2$ y otra de salto infinito en $x=2$.

4. Dibujar una función f verificando:

- $\text{Dom } f = [0, \infty)$
- f creciente
- $f(0) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$
- $f(x) \neq 2$ para cualquier valor $x \in [0, \infty)$

¿Sería esto posible si exigiéramos que la función f fuese continua? Razónalo con un dibujo.

5. Responde razonadamente usando dibujos:

- ¿Es posible que tengamos una función continua f con $\text{Dom } f = [0, 4]$ y con $\text{Rg } f = [1, 2) \cup [3, 5]$?
- ¿Es posible que tengamos una función continua f con $\text{Dom } f = [0, 3) \cup (3, 4]$ y con $\text{Rg } f = [1, 2) \cup [3, 5]$?

6. Dadas dos funciones f y g con dominio $[0, 5]$, razona apoyándote en dibujos si son ciertas las siguientes afirmaciones:
- a) Si f es creciente, entonces $\text{Rg } f = [f(0), f(5)]$
 - b) Si f es continua y creciente, entonces $\text{Rg } f = [f(0), f(5)]$.
 - c) Si f es continua y $f(0) = f(5)$, entonces existen dos puntos $x, y \in (0, 5)$ tales que $f(x) = f(y)$.
 - d) Si $f(0) = f(5)$, entonces existen dos puntos $x, y \in (0, 5)$ tales que $f(x) = f(y)$.
 - e) Si f y g son funciones continuas con $f(0) < g(0)$ y $f(5) > g(5)$, entonces las funciones f y g se cortan en algún punto.
 - f) Si f y g son funciones continuas con $f(0) < g(0)$ y $f(5) > g(5)$, entonces las funciones f y g se cortan en un único punto.
 - g) Sean f y g funciones continuas con $f(0) < g(0)$ y $f(5) > g(5)$. Además se sabe que f es creciente y g decreciente. Entonces las funciones se cortan en un único punto.