

LECCIÓN 6. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

En esta sección vamos a estudiar las propiedades de los límites y como se utilizan para calcularlos. En cada apartado va a haber una serie de excepciones que se conocen como límites indeterminados o indeterminaciones. Veremos en la siguiente sección como calcular límites indeterminados.

En cada una de las propiedades se asume que los límites:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

existen, pudiendo tener un valor finito o infinito ($\pm\infty$). Además x_0 puede referirse a un número real o a $\pm\infty$.

I) Suma/resta: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ excepto cuando $\infty - \infty$

EJEMPLO 1: Determinar:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} (x + 2) =$ **b)** $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + x^2) =$ **c)** $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - x^2) =$

a) $\lim_{x \rightarrow 5} (x + 2) = 5 + 2 = 7$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + x^2) = 2 \cdot \infty + \infty^2 = \infty + \infty = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - x^2) = \infty - \infty$ *INDT*

Hay que tener en cuenta que como se opera con límites infinitos:

$$\infty + \infty = \infty \quad -\infty - \infty = -\infty \quad \infty - \infty = \text{INDT} \quad \infty + k = \infty \quad -\infty + k = -\infty$$

II) Producto: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ excepto cuando $0 \cdot (\pm\infty)$

EJEMPLO 2: Determinar:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} (x \cdot (x - 3)) =$ **b)** $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot (x + 5)) =$ **c)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot x^2) =$ **d)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x + 1) \cdot \frac{1}{x} \right) =$

a) $\lim_{x \rightarrow 5} (x \cdot (x - 3)) = 5 \cdot (5 - 3) = 5 \cdot 2 = 10$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot (x + 5)) = \infty \cdot (\infty + 5) = \infty \cdot \infty = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot x^2) = (-\infty) \cdot (-\infty)^2 = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x + 1) \cdot \frac{1}{x} \right) = (\infty + 1) \cdot \frac{1}{\infty} = \infty \cdot 0$ *INDT*

Hay que tener en cuenta que como se opera con límites infinitos:

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$

$$\infty \cdot k = \infty$$

$$\infty \cdot (-k) = -\infty$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = \text{INDT}$$

$$\text{III) Cociente: } \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \text{excepto cuando } \frac{k}{0}, \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

EJEMPLO 3: Determinar:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+1} = \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x-2} = \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+1} = \quad e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x+1} =$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{2+3}{2+1} = \frac{5}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x-2} = \frac{2+3}{2-2} = \frac{5}{0} \quad \text{INDT}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{2^3-8}{2-2} = \frac{0}{0} \quad \text{INDT}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+1} = \frac{3}{\infty+1} = \frac{3}{\infty} = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3\infty-1}{\infty+1} = \frac{\infty-1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{INDT}$$

Hay que tener en cuenta que como se opera con límites infinitos:

$$\frac{\infty}{k} = \infty \quad (k > 0)$$

$$\frac{\infty}{-k} = -\infty \quad (k > 0)$$

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

$$\frac{k}{0} = \text{INDT}^*$$

$$\frac{0}{0} = \text{INDT}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{INDT}$$

* k puede ser un número distinto de cero o $\pm\infty$.

$$\text{IV) Potencias : } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \text{excepto cuando } 1^{\pm\infty}, \infty^0, 0^0$$

Asumiendo que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ y que $f(x) > 0$ en un entorno de x_0 .

EJEMPLO 4: Determinar:

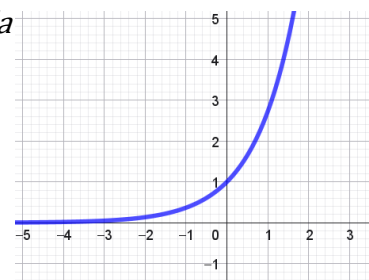
$$a) \lim_{x \rightarrow 5} x^x \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x+3} \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+3} \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} x^x = 5^5 = 3125$$

Para los apartados b) y c) conviene recordar como es la gráfica de la función exponencial:

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x+3} = e^{2+\infty} = e^\infty = \infty$$

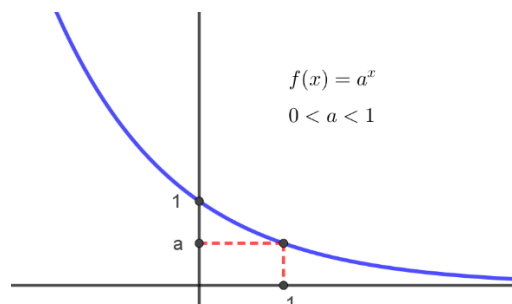
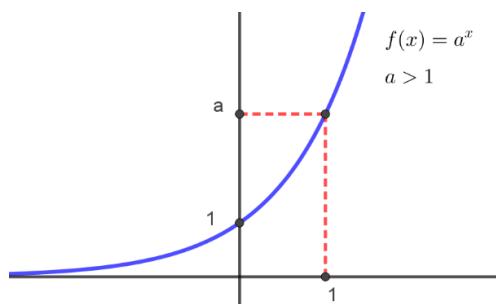
$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+3} = e^{2 \cdot (-\infty)+3} = e^{-\infty} = 0$$



$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty} = (1 + 0)^{\infty} = 1^{\infty} \text{ INDIT}$$

Hay que tener en cuenta que como se opera con límites infinitos. La siguiente tabla es obvia teniendo en cuenta como son las gráficas de las exponenciales:

Si $0 < a < 1$ entonces:	$a^{-\infty} = \infty$	$a^{\infty} = 0$
Si $1 < a$ entonces:	$a^{-\infty} = 0$	$a^{\infty} = \infty$



Cuando el límite de la base de la potencia es 0 :

$0^0 = \text{INDIT}$	$0^{\infty} = 0$	$0^{-\infty} = \infty$
----------------------	------------------	------------------------

Y cuando el límite de la base es 1

$1^{\pm\infty} = \text{INDIT}$

Cuando el límite de la base de la potencia es ∞ tenemos los siguientes casos:

$\infty^k = \infty$ si $k > 0$	$\infty^{-k} = 0$ si $k > 0$	$\infty^0 = \text{INDIT}$
$\infty^{\infty} = \infty$	$\infty^{-\infty} = 0$	

V) Raíces: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$

Cuando n es par hay que asumir siempre que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$. En caso de ser negativo, no existe el límite.

VI) Logaritmos: $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a f(x) = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)$

Asumiendo siempre que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$. En caso contrario no existe el límite.

VII) Valor absoluto: $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$

VIII) Funciones trigonométricas:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \text{sen}(f(x)) = \text{sen}(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos(f(x)) = \cos(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$

Todas las propiedades anteriores se pueden resumir en la siguiente:

REGLA PRÁCTICA PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES: Sea f una función en la que intervengan únicamente polinomios, sumas, restas, productos, cocientes, raíces, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas y valores absolutos. Entonces, para calcular el límite de f en un punto x_0 evaluamos la función en dicho punto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

salvo que aparezca alguna de las indeterminaciones estudiadas.

$$\frac{k}{0} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0 \cdot (\pm\infty) \quad \infty - \infty \quad 1^{\pm\infty} \quad \infty^0 \quad 0^0$$

EJEMPLO 5: Determinar:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x + 3}{5x + 7}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x + 1} - 2^x$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{e^{2x+1} - 5}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x + 3}{5x + 7} = \frac{4 \cdot 2 + 3}{5 \cdot 2 + 7} = \frac{8 + 3}{10 + 7} = \frac{11}{17}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x + 1} - 2^x = \sqrt{2 \cdot 2 + 1} - 2^2 = \sqrt{5} - 4$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{e^{2x+1} - 5} = \sqrt{e^{2 \cdot (-\infty) + 1} - 5} = \sqrt{e^{-\infty} - 5} = \sqrt{-5} = \nexists$$

En el apartado c), para valores de x suficientemente negativos, la función del radicando de la raíz es negativa y por lo tanto no tiene raíz cuadrada, de manera que el límite no tiene sentido y por lo tanto no existe.

EJERCICIOS

1. Usando las propiedades de los límites vistas en esta sección, calcula el valor de los siguientes límites. En caso de no ser posible, indica qué tipo de indeterminación presenta o si directamente no existe.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - x)$	b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 5x)$	c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$
d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + x}{e^x}$	e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x} + x}{e^x}$	f) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 3x}$
g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{x}}$	h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{x}}$	i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{ x^2 - 1 }$
j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x+5}\right)^x$	k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{2}{x+5}\right)$	l) $\lim_{x \rightarrow 1} 2^x \cdot \ln(x-1)$
m) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-2x+1} \ln(x)$		

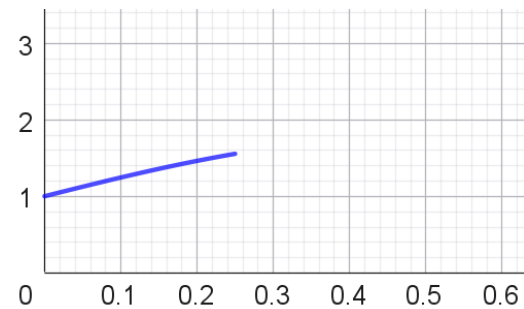
2. Determina cuánto tiene que valer k para que se verifique que:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x+k}{kx}} = 2$	b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = 5$
---	--

3. La población de una especie invasora en una isla evoluciona según la función:

$$N(t) = \frac{2}{1 + e^{-5t}}, \quad t \in [0, \infty)$$

Donde t es el tiempo transcurrido desde la introducción de la especie en el territorio y $N(t)$ es el número de especímenes medido en miles.



- Estudia la tendencia de la función a medida que transcurre el tiempo.
- Sabiendo que la función N es creciente, completa la gráfica con la información del apartado anterior. Describe con tus propias palabras que ocurre con esta población.
- ¿Alcanza en algún momento la población los tres mil individuos? ¿Y los 1500 individuos? En caso afirmativo determina el momento exacto.
- Otra población evoluciona según la función:

$$n(t) = t^2 + 3t$$

¿En algún momento tendrán el mismo número de individuos?

4. Dada la función $f(x) = \frac{m}{k + 2e^{-2t}}$, se pide determinar el valor de las constantes k y m , sabiendo que $f(0) = 1$ y que la función tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 7$ cuando $x \rightarrow \infty$.

(SOL: $k=1/3$; $m=7/3$)