

LECCIÓN 7. Indeterminaciones

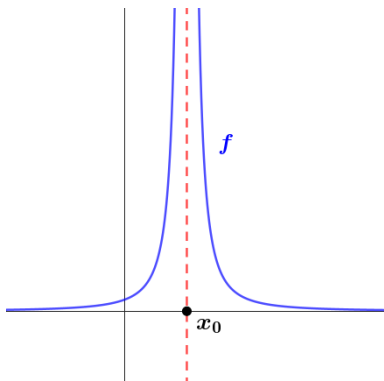
En esta lección llamaremos *indeterminaciones* o *límites indeterminados* a aquellos límites cuyo valor **no puede determinarse directamente** y requiere un estudio adicional. Hay un total de un total de 8 que listamos a continuación:

$\frac{k}{0}$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0 \cdot (\pm\infty)$	$\infty - \infty$	$1^{\pm\infty}$	∞^0	0^0
---------------	-------------------------------	---------------	-----------------------	-------------------	-----------------	------------	-------

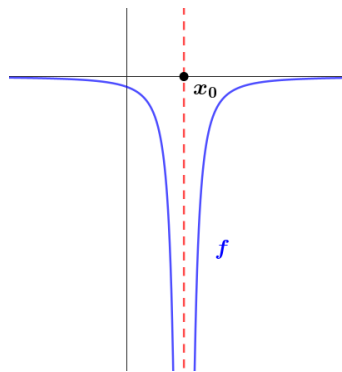
Vamos a ver algunas estrategias que suelen ser efectivas en el cálculo de límites indeterminados.

1. **CASO** $\frac{k}{0}$: tenemos un límite infinito y por lo tanto una asíntota vertical en dicho punto. Hay que estudiar los límites laterales para averiguar si es $+\infty$, $-\infty$, o si no existe por que ambos límites laterales son distintos.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

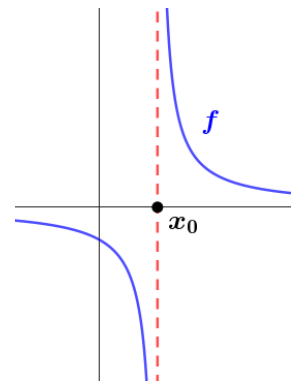


$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$



EJEMPLO 1: a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} =$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{(x-1)^2} =$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0} \text{ IND.T.}$

Estudiamos los límites laterales. Sabemos que ambos límites laterales son $\pm\infty$. Así que realmente solo se necesita decidir el signo:

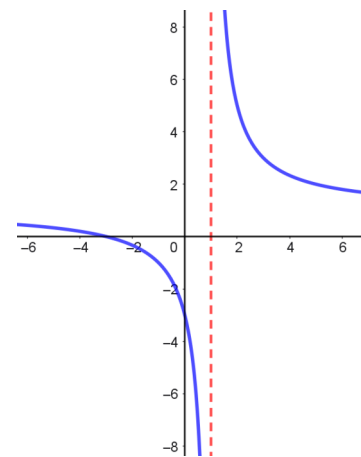
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{1^- - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

ya que es el cociente de un positivo entre un negativo.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{1^+ - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

ya que es el cociente de un positivo entre un positivo.

Por lo tanto: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x-1} = \nexists.$

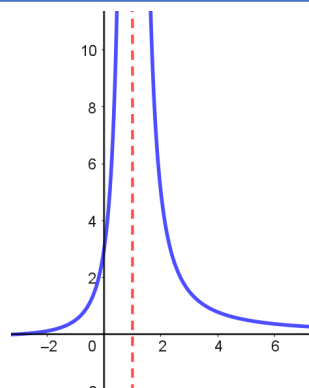


$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{0} \text{INDT}$$

Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{(1^- - 1)^2} = \frac{4}{(0^-)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{(1^+ - 1)^2} = \frac{4}{(0^+)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty$$



NOTA 1: Puede haber casos distintos un poco más complejos, pero no son materia de este curso.

NOTA 2: en caso de que fuese un límite en el infinito solo hace falta comprobar si es $+\infty$ o $-\infty$ ya que solo hay un límite lateral.

NOTA 3: el caso $\frac{k}{0}$ no es una indeterminación en sentido estricto. Sin embargo, no puede resolverse por sustitución directa y exige estudiar los límites laterales para determinar si el resultado es $+\infty$, $-\infty$ o si el límite no existe. Por eso, a efectos de 1.º de Bachillerato, lo incluimos en esta lista.

2. CASO $\infty - \infty$ (Funciones polinómicas)

Método completo: Multiplicar y dividir el polinomio por la mayor potencia de x . Esto es lo que se llama un análisis asintótico.

EJEMPLO 2: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-7x^3 + x + 8)$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x)$

Las fracciones en color rojo tienden todas a 0.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x) &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} (x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{x^3 - x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = \infty \cdot 1 = \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (-7x^3 + x + 8) &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} (-7x^3 + x + 8) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{-7x^3 + x + 8}{x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(-7 + \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3} \right) = \infty \cdot (-7) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x) &= -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} (x^3 - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{x^3 - 2x}{x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) = (-\infty) \cdot 1 = -\infty. \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior se observa como el único término del polinomio que afecta al resultado es el monomio de mayor grado. Teniendo en cuenta esta observación, el procedimiento se puede acortar de la siguiente manera

Método acortado: Cuando se hace tender un polinomio a $\pm\infty$ el resultado dependerá del término de mayor grado del polinomio. Eso significa que se pueden eliminar los otros términos del límite sin afectar al resultado.

EJEMPLO 3: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-8x^9 + x^5 - 7x^3 + x + 8)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^5 + 2x^2 + x + 2)$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-8x^9 + x^5 - 7x^3 + x + 8) = \lim_{x \rightarrow \infty} -8x^9 = (-8) \cdot \infty = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^5 + 2x^2 + x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^5 = (-7) \cdot (-\infty) = \infty$

3. CASO $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (para funciones racionales o irracionales)

Método completo: Dividir numerador y denominador por la mayor potencia efectiva de la x .

EJEMPLO 4: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2x - 8}{-3x^2 - x - 2} =$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 2x}{-x^3 + 2} =$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x^3 - 2x^3 + 1}{-x^4 + 2} =$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + x}{-x + 2} =$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^9 + 4x} + x}{\sqrt[3]{x^2 + 7} + 2x^3} =$

En todos los apartados se marca en rojo las fracciones que tienden a cero

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2x - 8}{-3x^2 - x - 2} = \frac{\infty}{-\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2+2x-8}{x^2}}{\frac{-3x^2-x-2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}}{-3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 2x}{-x^3 + 2} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5x^3-2x}{x^3}}{\frac{-x^3+2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - \frac{2}{x}}{-1 + \frac{2}{x^3}} = \frac{5}{-1} = -5$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x^3 - 2x^3 + 1}{-x^4 + 2} = \frac{-\infty}{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-8x^3-2x^3+1}{x^4}}{\frac{-x^4+2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{8}{x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}}{-1 + \frac{2}{x^4}} = \frac{0}{-1} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + x}{-x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{x}}{\frac{-x+2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{x}}{\frac{-x+2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2+4x}{x^2}} + \frac{x}{x}}{\frac{-x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1}{-1 + \frac{2}{x}}$
 $= \frac{\sqrt{1} + 1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^9 + 4x} + x}{\sqrt[3]{x^2 + 7} + 2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^9+4x}+x}{x^3}}{\frac{\sqrt[3]{x^2+7}+2x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^9+4x}}{x^3} + \frac{x}{x^3}}{\frac{\sqrt[3]{x^2+7}}{x^3} + \frac{2x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^9+4x}{x^9}} + \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{x^2+7}{x^9}} + 2}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{4}{x^8}} + \frac{1}{x^2}}{2 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^7} + \frac{7}{x^9}}} = \frac{\sqrt[3]{1} + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$

Método acortado: nos quedamos únicamente con la mayor potencia de x de numerador y con la mayor potencia de x del denominador. (Solo usar con las racionales, con la irracionales puede ser problemática)

EJEMPLO 5: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2x - 8}{-3x^2 - x - 2} =$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 2x}{-x^3 + 2} =$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3 + 2} =$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2x - 8}{-3x^2 - x - 2} = \frac{\infty}{-\infty} \text{INDT} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{-3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{-3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 2x}{-x^3 + 2} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{INDT} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{-1} = -5$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3 + 2} = \frac{\infty}{-\infty} \text{INDT} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$

4. CASO $\frac{0}{0}$ (para funciones racionales o irracionales)

En el caso de una **función racional**, se resuelve factorizando numerador y denominador (habitualmente por Ruffini) y simplificando a continuación el factor $(x - x_0)$.

EJEMPLO 6: a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{3x^2 - 3x - 6} =$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} =$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{3x^2 - 3x - 6} = \frac{0}{0} \text{INDT} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(3x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{\cancel{(x-2)}(3x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{3x+3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Donde hemos usado el método de Ruffini para factorizar numerador y denominador de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -8 \\ 2 & & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array} \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & -3 & -6 \\ 2 & & 6 & 6 \\ \hline & 3 & 3 & 0 \end{array} \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = (x-2)(3x+3)$$

b) De manera análoga:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} \text{INDT} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x-2} = \frac{3}{-1} = -3$$

Si es una **función irracional**, una estrategia que funciona en ocasiones es multiplicar por el conjugado de la expresión radical y factorizar como si fuera una función racional.

EJEMPLO 7: a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} =$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 2\sqrt{x+3}}{x^2 - 1} =$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} &= \frac{0}{0} \text{ IND } T = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x})^2 - 2^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 4)(\cancel{x - 4})(\sqrt{x} + 2)}{\cancel{x - 4}} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4)(\sqrt{x} + 2) \\ &= (4 + 4)(\sqrt{4} + 2) = 8 \cdot 2 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 2\sqrt{x+3}}{x^2 - 1} &= \frac{0}{0} \text{ IND } T = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4 - 2\sqrt{x+3})(4 + 2\sqrt{x+3})}{(x^2 - 1)(4 + 2\sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^2 - (2\sqrt{x+3})^2}{(x^2 - 1)(4 + 2\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{16 - 4(x+3)}{(x^2 - 1)(4 + 2\sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{16 - 4x - 12}{(x^2 - 1)(4 + 2\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x + 4}{(x - 1)(x + 1)(4 + 2\sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(\cancel{x - 1})}{(\cancel{x - 1})(x + 1)(4 + 2\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4}{(x + 1)(4 + 2\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{-4}{(1 + 1)(4 + 2\sqrt{4})} = \frac{-4}{2 \cdot (4 + 4)} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

5. CASO $\infty - \infty$ (para funciones irracionales)

En este caso multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión y operamos. El límite resultante será un límite directo o una indeterminación del tipo ∞/∞

EJEMPLO 8: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x =$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x =$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\infty + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} + \frac{x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6. CASO $1^{\pm\infty}$

Estos límites se pueden calcular usando la conocida expresión del número "e" :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

En el límite anterior se puede cambiar la x por cualquier función $\square$ que tienda a infinito (o menos infinito) y tendremos :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} = e$$



Ejemplo
resuelto

Este hecho nos va a permitir calcular los límites indeterminados del tipo $1^{\pm\infty}$ modificándolos para que se parezcan lo máximo posible a la expresión anterior

EJEMPLO 9: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{2x} =$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x^2+1}{-2x^2-3} \right)^{\frac{x^2+1}{x+3}} =$

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{2x} &= 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - 1 + \frac{x+1}{x-3} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-x+3}{x-3} + \frac{x+1}{x-3} \right)^{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-3} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-3}{4}} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-3}{4}} \right)^{\frac{x-3}{4} \cdot \frac{4}{x-3} \cdot 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-3}{4}} \right)^{\frac{x-3}{4}} \right]^{\frac{8x}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x}} = e^8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x^2+1}{-2x^2-3} \right)^{\frac{x^2+1}{x+3}} &= 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - 1 + \frac{-2x^2+1}{-2x^2-3} \right)^{\frac{x^2+1}{x+3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x^2+3}{-2x^2-3} + \frac{-2x^2+1}{-2x^2-3} \right)^{\frac{x^2+1}{x+3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{-2x^2-3} \right)^{\frac{x^2+1}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{-2x^2-3}{4}} \right)^{\frac{x^2+1}{x+3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{-2x^2-3}{4}} \right)^{\frac{-2x^2-3}{4} \cdot \frac{4}{-2x^2-3} \cdot \frac{x^2+1}{x+3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{-2x^2-3}{4}} \right)^{\frac{-2x^2-3}{4}} \right]^{\frac{4(x^2+1)}{(-2x^2-3)(x+3)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x^2+1)}{(-2x^2-3)(x+3)}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+4}{-2x^3-6x^2-3x-9}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{-2x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{2}{x}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Aplicando el proceso visto en el ejemplo al caso general obtenemos la conocida fórmula:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{g(x)} = 1^{\pm\infty} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-1]g(x)}$$

Esto fórmula no se permite en los exámenes.

EJEMPLO 10: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2} \right)^{3x-1} = 1^\infty \text{ INDT.} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2} - 1 \right) (3x-1)}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-10x+3}{x^2+2}} = e^3.$$

EJERCICIOS

1. Practica con los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^3 + x^2 + 1}{4x^3 - x - 3} = -\frac{5}{4} & \text{b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 1}{4x^2 - x - 3} = -\infty & \text{c. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^3 + 1} = 0 & \text{d. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x + 2}{-3x^3 + 7x^2 + x + 4} = -\frac{1}{3} \\
 \text{e. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 14x^2 - 7x - 10}{x^3 - 1} = 10 & \text{f. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 5x + 6} = -5 & \text{g. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x + x}{x^2 + x} = 4 & \text{h. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \cancel{\mathbb{R}}(\pm\infty) \\
 \text{i. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + x + 1} = 0 & \text{j. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 + 3x + 3}{x^3 + 3x^2 - 13x - 15} = \cancel{\mathbb{R}}(\pm\infty) & \text{k. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{x^2 - x - 2} = 0 & \text{l. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3x^3 + 4x^2 - x - 2} = \cancel{\mathbb{R}}(\pm\infty) \\
 \text{m. } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 8x^2 - 15x + 9}{4x^2 - 1} = 5 & \text{n. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}{x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 28x - 24} = \infty & \text{o. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 28x - 24}{x^2 - 16} & \text{p. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1} = \frac{5}{4}
 \end{array}$$

2. Practica con los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 3} - 2x = 0 & \text{b. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 2x} - x = -1 & \text{c. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9x^2 + 5x} - 3x = \frac{5}{6} \\
 \text{d. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 0 & \text{e. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+4} - \sqrt{2x} = -\infty & \text{f. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 4x + 2} - (2x - 3) = 4
 \end{array}$$

3. Práctica con los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x}}{x^2 + 2} = 0 & \text{b. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^2 + x + 1}}{x^2 + \sqrt{x}} = \infty & \text{c. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^6 + 3x + 1} + 3x^3}{\sqrt{3x^6 - 7} + 3x} = \frac{5}{\sqrt{3}} & \text{d. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 + x} - 2x}{\sqrt{x^4 + 5x} + x^2} = \frac{1}{2} \\
 \text{e. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 6 + 2x}}{\sqrt{1 + 9x^2} + 8x + 1} = \frac{4}{3} & \text{f. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^5 + x + 1} + 5x + 1}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{4x^2 + 1}} = 2 & \text{g. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16x^8 + 1} + \sqrt{x^4 + 1}}{x^2 + \sqrt{2x + 6}} = 3 & \text{h. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x^8} + x^2}}{\sqrt{9x^4 - 1}} = \frac{2}{3}
 \end{array}$$

4. Practica con los siguientes límites:

$$\begin{array}{lllll}
 \text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{1-x}-1} = -10 & \text{b. } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = -\frac{1}{56} & \text{c. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1} = \frac{1}{2} & \text{d. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{1}{4} & \text{e. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4} = \frac{4}{3} \\
 \text{f. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{3-\sqrt{x+5}} = -48 & \text{g. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x+1-\sqrt{x+1}} = 0 & \text{h. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}}{x^2-3x+2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} & \text{i. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-x^2-4x+4}{\sqrt{6+x}-\sqrt{2-x}} = 24 & \text{j. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{9x-2}-\sqrt{4x+8}}{x^3-8} = \frac{5}{96}
 \end{array}$$

5. Practica con los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^x = e^2 & \text{b. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^x = \frac{1}{e^2} & \text{c. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+5}\right)^x = e^{-3} & \text{d. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{3x} = e^{12} \\
 \text{e. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x-1} = e^4 & \text{f. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-5}\right)^{x^2} = \infty & \text{g. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^x = 1 & \text{h. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{3x^2-1}\right)^{x^2} = \sqrt[3]{e} \\
 \text{i. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3x+1}{-3x+4}\right)^{5x-2} = e^5 & \text{j. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x-4}\right)^{\frac{(2x-1)}{3}} = e^{\frac{2}{3}} & \text{k. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\right)^{\frac{x}{2}} = 0 & \text{l. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+2}\right)^{\sqrt{x}} = \frac{1}{e} \\
 \text{m. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{\frac{3x^2}{x-1}} = 1 & \text{n. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+7}{4x-5}\right)^{\frac{x^2}{x-1}} = e^3 & \text{o. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+7}{x+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x+1}} = \infty & \text{p. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{8x+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x+1}} = 0
 \end{array}$$

6. Qué condición tiene que cumplir los parámetros del siguiente límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+2c}{3x+c}\right)^x$ para ser un límite del tipo “número e”.

¿Si no cumple dicha condición, de qué tipo es el límite?

7. ¿Cuánto tiene que valer k para que: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+k}{x}\right)^{kx} = e^9$ (SOL: k=3) b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+k}{x-k}\right)^{\frac{kx^2}{x+1}} = e^3$ (SOL: $k = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$)

8. Demostrar la fórmula $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{g(x)} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-1]g(x)}$

9. Pon ejemplos de límites de funciones que den lugar a indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ y que al calcularlos de como resultado a) 0 b) 5 c) ∞ .

10. Calcular el valor de “a” para que :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3x - \sqrt{9x^2 - 2ax + 1} \right) = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + ax + 2}{x^2 - 2x} \right)^{\frac{3x^2 - 1}{2x}} = \frac{1}{e^3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3ax^3 - 2ax^2 + ax - 1}{-6x^3 + x^2} = 1$$