

LECCIÓN 5. FUNCIÓN INVERSA

FUNCIÓN INVERSA: Dada una función f , se dice que la función g es su **inversa** si se verifica:

$$(f \circ g)(x) = x \quad \forall x \in \text{Dom } g$$

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in \text{Dom } f$$

Para denotar que g es la función inversa de f escribimos $g = f^{-1}$.

Intuitivamente la función inversa es la función que “deshace” los cambios que ha producido la función original. Esto se ve claro con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1: Comprobar que la función inversa de $f(x) = x + 3$ es $g(x) = x - 3$

Hay que comprobar que se cumplen ambas condiciones:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3) + 3 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3) - 3 = x$$

Ambas funciones son inversas. Podemos escribir entonces $f^{-1}(x) = x - 3$

CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN: Dada una función $y = f(x)$ entonces se tiene lo siguiente:

$$y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(y) = (f^{-1} \circ f)(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

Por lo tanto, para calcular la inversa de $y = f(x)$ lo que tenemos es que despejar la variable x en función de la variable y . La expresión resultante será la función inversa:

$$x = f^{-1}(y)$$

EJEMPLO 2: Calcular la función inversa de:

a) $f(x) = \frac{x}{2}$

b) $f(x) = \frac{2x + 3}{3x - 1}$

c) $f(x) = \sqrt{2x + 5}$

a) Escribimos $y = \frac{x}{2}$.

Para calcular la inversa hay que despejar la x en función de la y :

$$y = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2y$$

Por lo tanto: $f^{-1}(y) = 2y$

b) Escribimos $y = \frac{2x + 3}{3x - 1}$.

Despejamos ahora la x en función de la y para obtener la función inversa:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x + 3}{3x - 1} \Rightarrow (3x - 1)y = 2x + 3 \Rightarrow 3xy - y = 2x + 3 \Rightarrow 3xy - 2x = 3 - y \\ &\Rightarrow x(3y - 2) = 3 - y \Rightarrow x = \frac{3 - y}{3y - 2} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $f^{-1}(y) = \frac{3-y}{3y-2}$

c) Escribimos: $y = \sqrt{2x+5}$

Despejamos ahora la x en función de la y para obtener la función inversa:

$$y = \sqrt{2x+5} \Rightarrow y^2 = 2x+5 \Rightarrow y^2 - 5 = 2x \Rightarrow \frac{y^2 - 5}{2} = x$$

Por lo tanto: $f^{-1}(y) = \frac{y^2 - 5}{2}$

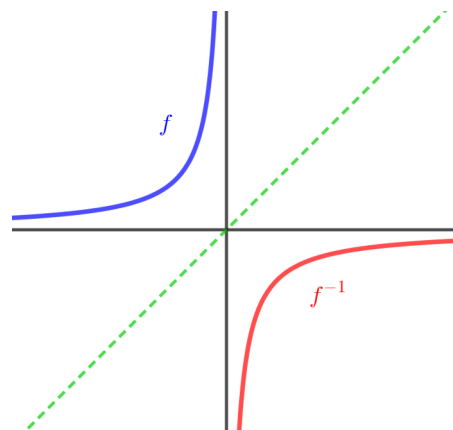
Se deduce por tanto que la inversa de una función se obtiene intercambiando el papel que juegan la variable x y la variable y . Esto es:

- En la función $y = f(x)$, la x es la variable independiente y la y la variable dependiente.
- En la función $x = f^{-1}(y)$, la y es la variable independiente y la x la variable dependiente.



REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA INVERSA: si una función f tiene inversa, entonces la representación gráfica de la inversa de f se obtiene intercambiando el eje X con el eje Y.

Esto se hace reflejando simétricamente la gráfica de f con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.



No todas las funciones tienen inversa. Para que una función tenga inversa debe verificarse una condición muy concreta. Antes de enunciarla debemos conocer el siguiente concepto:

FUNCIÓN INYECTIVA: Una función f se dice **inyectiva** si para cada $y \in \text{Rg } f$ existe un único $x \in \text{Dom } f$ tal que $f(x) = y$. Es decir, un valor y del rango tiene una única antimagen x .

Gráficamente, f es inyectiva si cualquier recta horizontal corta a la gráfica en un punto como mucho.

EJEMPLO FUNCIÓN NO INYECTIVA	EJEMPLO FUNCIÓN INYECTIVA
$f(x) = f(x') = y$ y tiene dos anteímagenes	$f(x) = y$ y tiene una sola anteimagen x

La mejor manera para comprobar si una función es o no inyectiva es mirar su gráfica.

CONDICIÓN PARA QUE UNA FUNCIÓN TENGA INVERSA: una función es invertible si y solo si es inyectiva.

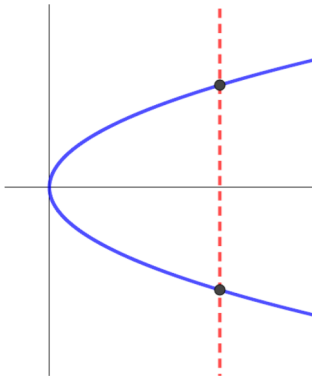
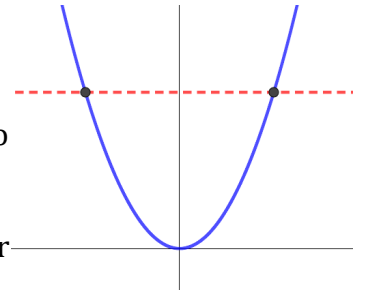
Para comprender este concepto investiguemos el concepto de inversa mediante el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3:

Consideremos la función $f(x) = x^2$ cuyo dominio es $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

Esta función no es inyectiva, como puede verse en la imagen, y por lo tanto no es invertible.

La razón por la que no es invertible es la siguiente. Si tratáramos de buscar la gráfica de su función inversa obtendríamos la siguiente gráfica



Esta gráfica no corresponde a la gráfica de una función, ya que la recta vertical dibujada corta a la gráfica en más de un punto. Se deduce entonces que la función no tiene inversa.

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$$

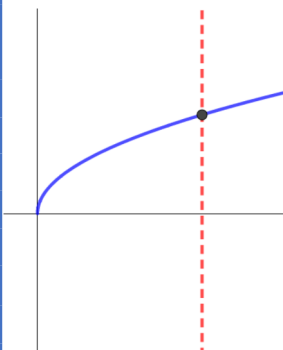
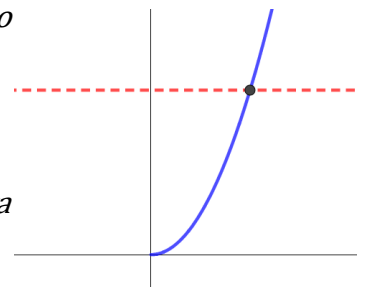
Y por lo tanto f^{-1} no es una función, pues su valor no está determinado. Por ejemplo,

$$f^{-1}(4) = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Sin embargo, si consideramos la misma función con un dominio restringido:

$$f(x) = x^2 \quad \text{Dom } f = [0, \infty)$$

En este caso la función sí que sería inyectiva y por lo tanto invertible, ya que al dibujar su gráfica inversa, obtenemos la siguiente gráfica:



En este caso la gráfica obtenida cumple el criterio de la recta vertical, y por lo tanto es una función. Se deduce entonces que la función:

$$f(x) = x^2 \quad \text{Dom } f = [0, \infty)$$

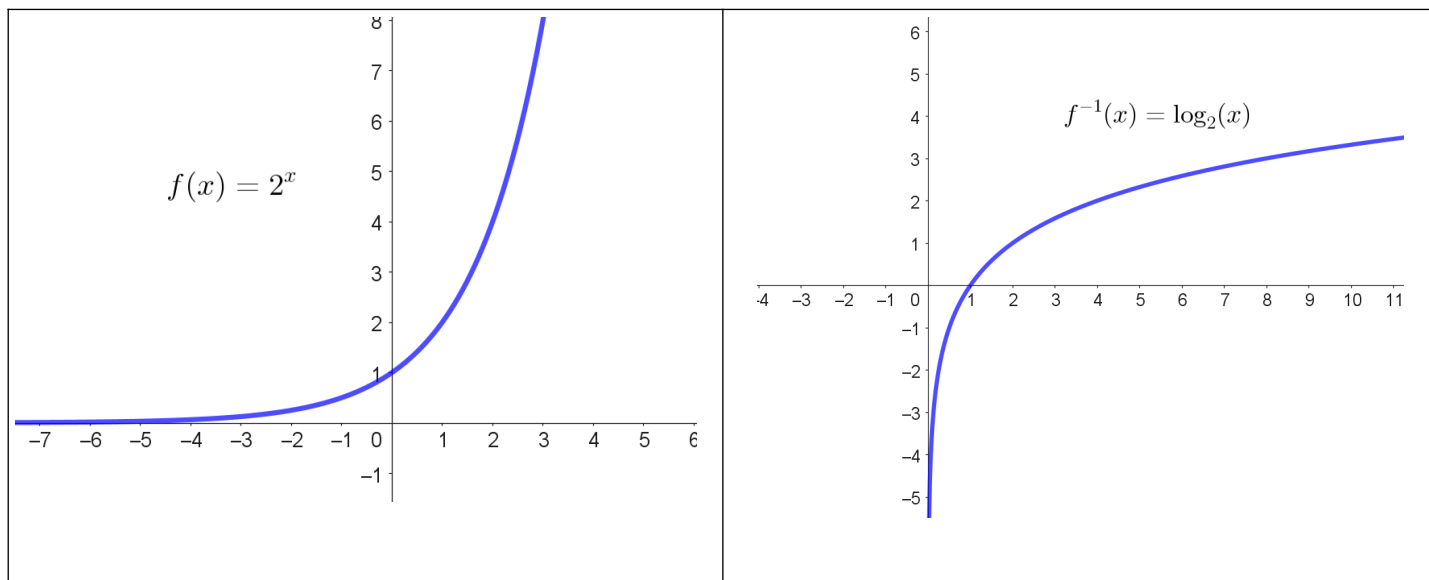
Es invertible. Su inversa sería:

$$y = x^2 \Rightarrow x = +\sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

EJEMPLOS DE FUNCIONES INVERSAS IMPORTANTES:

1) Función exponencial : la función exponencial es inyectiva, por lo que admite inversa.

- $f(x) = a^x \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Rg } f = (0, \infty)$
- $f^{-1}(x) = \log_a x \quad \text{Dom } f^{-1} = (0, \infty) \quad \text{Rg } f^{-1} = \mathbb{R}$

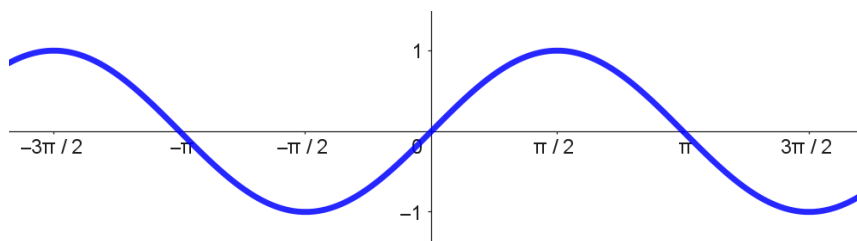


En particular se tiene que :

- $f(x) = 10^x \quad f^{-1}(x) = \log x$

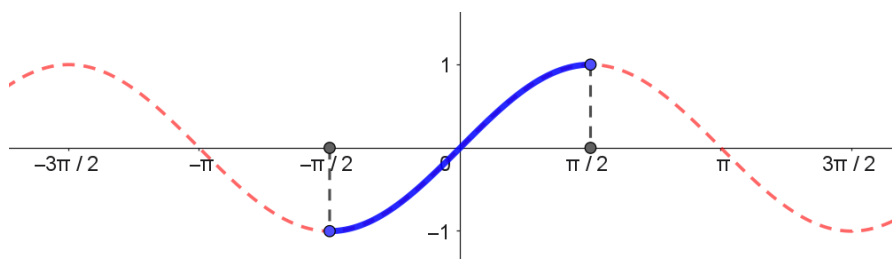
- $f(x) = e^x \quad f^{-1}(x) = \ln x$

2) Función seno : La función $f(x) = \sin x$ con su dominio habitual $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ no es invertible ya que no es inyectiva, como se puede ver en la imagen.



Para que sea inyectiva hay que restringir su dominio a un intervalo donde si sea inyectiva.

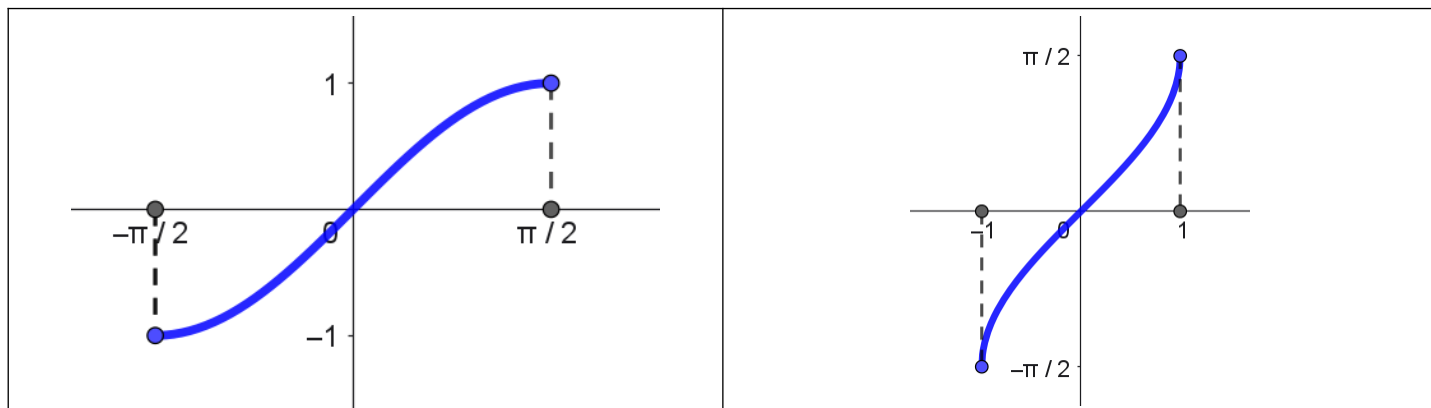
Normalmente el intervalo que se escoge es el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



Con ese dominio la función es inyectiva :

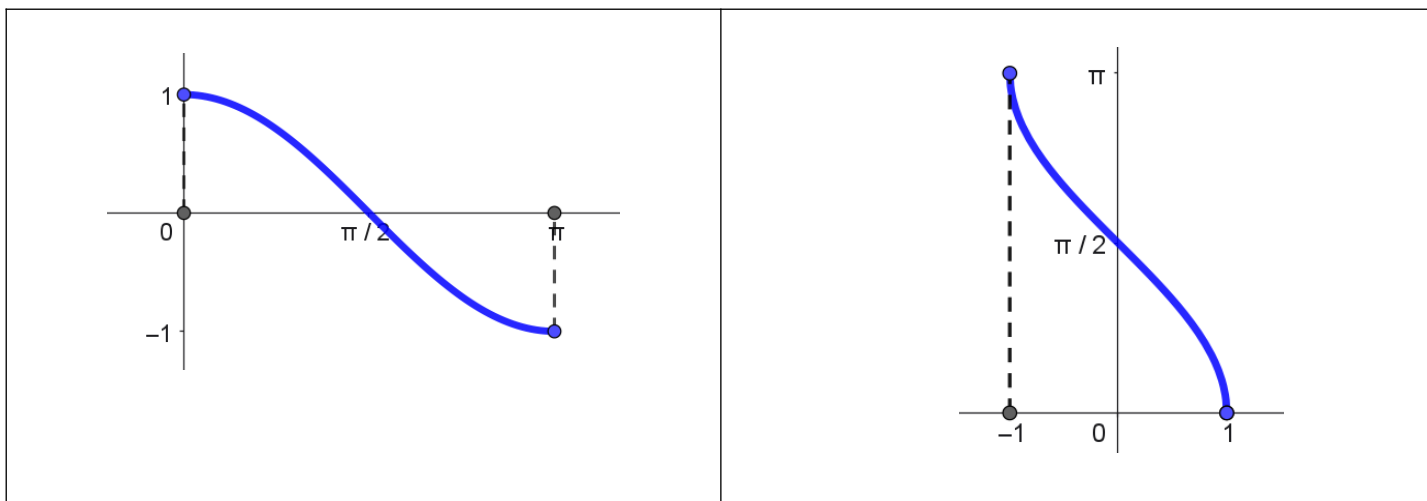
- $f(x) = \sin x \quad \text{Dom } f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{Rg } f = [-1, 1]$

- $f^{-1}(x) = \arcsin x \quad \text{Dom } f^{-1} = [-1, 1] \quad \text{Rg } f^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



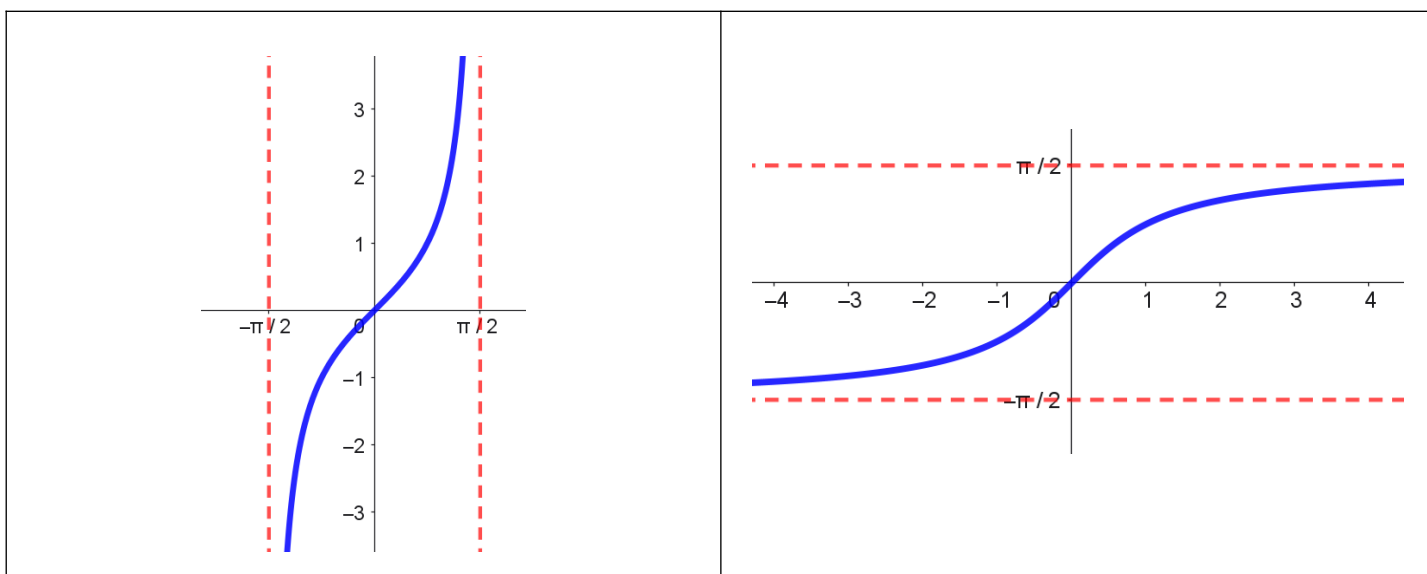
3) Función coseno: ocurre lo mismo que con la función seno, para que sea inyectiva y por lo tanto admite inversa hay que restringir su dominio.

- $f(x) = \cos x$ $\text{Dom } f = [0, \pi]$ $\text{Rg } f = [-1, 1]$
- $f^{-1}(x) = \arccos x$ $\text{Dom } f^{-1} = [-1, 1]$ $\text{Rg } f^{-1} = [0, \pi]$



4) Función tangente: al igual que las funciones anteriores, el dominio de la función tangente tiene que restringirse a un intervalo más pequeño donde la función admite inversa

- $f(x) = \tan x$ $\text{Dom } f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\text{Rg } f = (-\infty, \infty)$
- $f^{-1}(x) = \arctan x$ $\text{Dom } f^{-1} = (-\infty, \infty)$ $\text{Rg } f^{-1} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



EJERCICIOS

1. Determina si son inversas las siguientes funciones

a) $f(x) = x^2 + 5$, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $g(x) = \sqrt{x} + 5$, $\text{Dom } g = [0, \infty)$

b) $f(x) = 9(x - 2)^2 - 7$, $\text{Dom } f = (2, \infty)$; $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x + 7} + 2$, $\text{Dom } g = (-7, \infty)$

c) $f(x) = \frac{2x + 3}{3x - 5}$, $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$; $g(x) = \frac{5x + 3}{3x - 2}$, $\text{Dom } g = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

d) $f(x) = \frac{-2x + 1}{5x - 10}$, $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$; $g(x) = \frac{3x + 3}{6x - 1}$, $\text{Dom } g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{6}\right\}$

e) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x+6}$, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $g(x) = \frac{1}{2}\ln(2x) - 3$, $\text{Dom } g = (0, \infty)$

f) $f(x) = 2^x + 1$, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $g(x) = \log_2(x) - 1$, $\text{Dom } g = (0, \infty)$

(SOL: a) NO; b) SÍ; c) SÍ; d) NO e) SÍ f) NO)

2. Determina las inversas de estas funciones.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 5}$

c) $f(x) = \frac{4x + 3}{5x + 2}$

d) $f(x) = 5\sqrt{2x + 3}$

e) $f(x) = x^2 - 5$, $\text{Dom } f = (0, \infty)$

f) $f(x) = 2x^3 + 7$

g) $f(x) = e^{2x+1} - 5$

h) $f(x) = -2e^{5x+1}$

3. Razona gráficamente si la función $f(x) = -2x^2 + x + 1$ admite inversa en $\text{Dom } f = \mathbb{R}$. En caso de no serlo razona si es posible restringir su dominio para obtener una función que admita inversa.

4. Determina cuanto tiene que valer k para que estas dos funciones sean inversas:

$$f(x) = \frac{kx}{x + 1} \quad g(x) = \frac{-x}{x + 3}$$