

LECCIÓN 3. OPERACIONES CON FUNCIONES.

Dadas dos funciones f y g , reales de variable real se define su :

SUMA/RESTA: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ $\text{Dom}(f \pm g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$

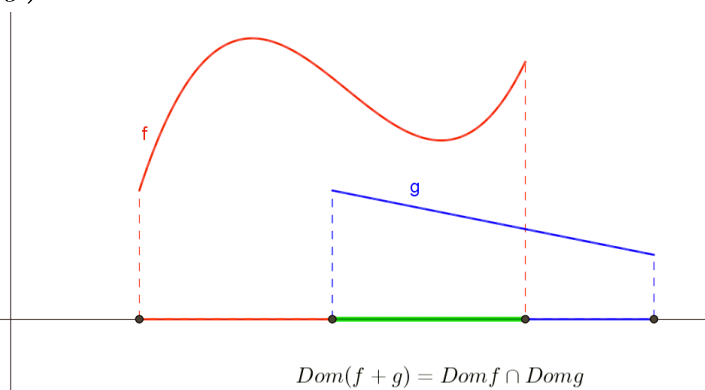
PRODUCTO: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$

COCIENTE: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g - \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$

Recuerda que el símbolo $\cap$ significa intersección de conjuntos.

El dominio de la suma/resta/producto de dos funciones f y g son los valores de la variable independiente (x) que están al mismo tiempo en el dominio de f y en el de g .

En el cociente, a mayores hay que eliminar los puntos en los que se anula el denominador.



EJEMPLO 1: Dadas las siguientes funciones f

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} \quad g(x) = 7x \quad h(x) = \frac{8x+3}{x+5} \quad m(x) = \sqrt{-2x+4}$$

determinar en cada apartado la función resultante simplificada y su dominio:

a) $f + g$ b) $f \cdot g$ c) $f + h$ d) $\frac{m}{g}$

$$a) (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{2x}{x+1} + 7x = \frac{2x}{x+1} + \frac{7x(x+1)}{x+1} = \frac{2x}{x+1} + \frac{7x^2 + 7x}{x+1} = \frac{7x^2 + 9x}{x+1}$$

Por lo tanto:

$$(f + g)(x) = \frac{7x^2 + 9x}{x+1}$$

Por ser f función racional: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

Por ser g función polinómica $\text{Dom } g = \mathbb{R}$

Por lo tanto: $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$b) (f \cdot g)(x) = \frac{2x}{x+1} \cdot (7x) = \frac{2x \cdot 7x}{x+1} = \frac{14x^2}{x+1}$$

Por lo tanto:

$$(f \cdot g)(x) = \frac{14x^2}{x+1}$$

El dominio de la suma es igual al domio del producto por lo que:

$$\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

c)

$$\begin{aligned} (f + h)(x) &= f(x) + h(x) = \frac{2x}{x+1} + \frac{8x+3}{x+5} = \frac{2x(x+5)}{(x+1)(x+5)} + \frac{(8x+3)(x+1)}{(x+1)(x+5)} \\ &= \frac{2x^2 + 10x}{(x+1)(x+5)} + \frac{8x^2 + 11x + 3}{(x+1)(x+5)} = \frac{10x^2 + 21x + 3}{(x+1)(x+5)} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(f + h)(x) = \frac{10x^2 + 21x + 3}{(x + 1)(x + 5)}$$

Las funciones f y h son racionales por lo que sus dominios son:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\} \quad \text{Dom } h = \mathbb{R} - \{5\}$$

Se deduce entonces:

$$\text{Dom}(f + h) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } h = \mathbb{R} - \{-1, 5\}$$

$$d) \left(\frac{m}{g} \right) (x) = \frac{m(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{2x+4}}{7x}$$

Vamos a determinar el dominio sabiendo que:

$$\text{Dom} \left(\frac{m}{g} \right) = \text{Dom } m \cap \text{Dom } g - \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$$

1) Determinamos el dominio de m :

$$2x + 4 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -4 \Rightarrow x \geq \frac{-4}{2} \Rightarrow x \geq -2$$

$$\text{Por lo tanto: } \text{Dom } m = (-2, \infty)$$

2) Determinamos el dominio g . Como es polinómica: $\text{Dom } g = \mathbb{R}$.

3) Determinamos las raíces del denominador g :

$$g(x) = 0 \Rightarrow 7x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Por lo tanto:

$$\text{Dom} \left(\frac{m}{g} \right) = \text{Dom } m \cap \text{Dom } g - \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\} = (-2, \infty) - \{0\}$$

EJEMPLO 2: Determinar el dominio de la función:

$$a) f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{-2x+5}$$

$$b) g(x) = \frac{x+3}{x-1} - \log(2x+8)$$

a) La función f es suma de dos funciones:

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{x+3}}_{f_1(x)} + \underbrace{\sqrt{-2x+5}}_{f_2(x)}$$

Por lo tanto, como $f = f_1 + f_2$, tenemos que:

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \cap \text{Dom } f_2.$$

1) Determinamos $\text{Dom } f_1$, que coincidirá con las soluciones de la siguiente inecuación:

$$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$$

$$\text{Por lo tanto: } \text{Dom } f_1 = [-3, \infty)$$

2) Determinamos $\text{Dom } f_2$, que vendrá dado por las soluciones de la inecuación:

$$-2x + 5 \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -5 \Rightarrow x \leq \frac{-5}{-2} \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

Se deduce entonces: $\text{Dom } f_2 = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$.

Por lo tanto:

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \cap \text{Dom } f_2 = \left[-3, \frac{5}{2}\right]$$

b) La función g es diferencia de dos funciones:

$$g(x) = \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{g_1(x)} - \underbrace{\log(2x+8)}_{g_2(x)}$$

Como $g = g_1 - g_2$:

$$\text{Dom } g = \text{Dom } g_1 \cap \text{Dom } g_2.$$

1) Determinamos $\text{Dom } g_1$. A ser una función racional cuyo denominador se anula en $x=1$:

$$\text{Dom } g_1 = \mathbb{R} - \{1\}$$

2) Determinamos $\text{Dom } g_2$, que vendrá dado por las soluciones de la inecuación:

$$2x + 8 > 0 \Rightarrow 2x > -8 \Rightarrow x > \frac{-8}{2} \Rightarrow x > -4$$

Por lo tanto: $\text{Dom } g_2 = (-4, \infty)$.

Se concluye entonces:

$$\text{Dom } g = \text{Dom } g_1 \cap \text{Dom } g_2 = (-4, \infty) - \{1\}$$

Nótese que este dominio también se puede escribir como: $\text{Dom } g = (-4, 1) \cup (1, \infty)$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES: Se define la función f compuesta con g como la función $g \circ f$ dada por:

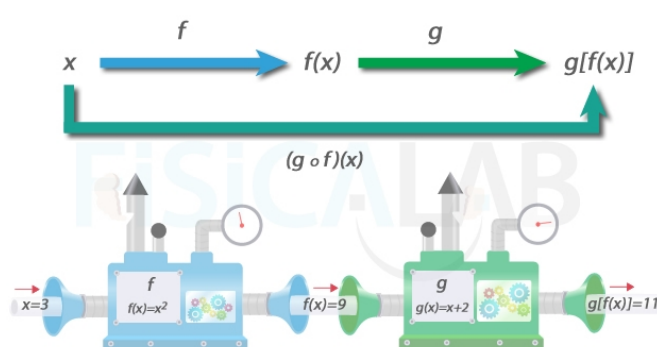
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

El dominio de la composición de funciones es:

$$\text{Dom } (g \circ f) = \{x \in \text{Dom } f \mid f(x) \in \text{Dom } g\}$$

Es decir, son los puntos x del dominio de f tales que al calcular $g(x)$ este valor se encuentra en el dominio de g .

Calcular correctamente el dominio de una composición sobrepasa las exigencias del nivel de 1º de bachillerato. Por lo tanto, en la práctica, una vez calculada la función compuesta, estudiaremos su dominio como el de cualquier otra función, aunque no sea exactamente el dominio de la composición.



Fuente: <https://www.fisicalab.com/>

EJEMPLO 3: Dadas $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x+2}$, $h(x)=\frac{1}{x}$, $m(x)=\log x$. Se pide calcular:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ h$ d) $h \circ f$ e) $h \circ m$ d) $m \circ h$

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+2})^2 + 1 = x + 3$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1 + 2} = \sqrt{x^2 + 3}$

c) $(f \circ h)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{1+x^2}{x^2}$

d) $(h \circ f)(x) = h(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + 1}$

e) $(h \circ m)(x) = h(\log x) = \frac{1}{\log x}$

f) $(m \circ h)(x) = m\left(\frac{1}{x}\right) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$

EJEMPLO 4: Dadas las funciones $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ y $g(x) = \frac{x+3}{-2x+1}$ determinar $f \circ g$ y $g \circ f$. Simplifica al máximo las funciones.

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{x+3}{-2x+1}\right) = \frac{2\left(\frac{x+3}{-2x+1}\right) + 1}{\left(\frac{x+3}{-2x+1}\right) - 2} = \frac{\frac{2(x+3)}{-2x+1} + 1}{\frac{x+3}{-2x+1} - 2} = \frac{\frac{2x+6+1-2x}{-2x+1}}{\frac{x+3-2+4x}{-2x+1}} = \frac{\frac{7}{-2x+1}}{\frac{5x+1}{-2x+1}} = \frac{7}{5x+1}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = \frac{\frac{2x+1}{x-2} + 3}{1 - 2\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)} = \frac{\frac{2x+1+3(x-2)}{x-2}}{\frac{x-2-2(2x+1)}{x-2}} = \frac{\frac{2x+1+3x-6}{x-2}}{\frac{x-2-4x-2}{x-2}} = \frac{\frac{5x-5}{x-2}}{\frac{-3x-4}{x-2}} = \frac{5(1-x)}{-3x-4}$$

Puedes visualizar el siguiente vídeos si necesitas ayuda para comprender la composición de funciones.



EJEMPLO 5: Los beneficios diarios de una empresa de telefonía móvil vienen dados por

$$B(x) = 100x - 5000$$

Siendo x el número de suscripciones a su servicio y $B(x)$ los beneficios medidos en euros. Por otro lado a lo largo del año 2024 las suscripciones al servicio han evolucionado según la fórmula:

$$S(t) = \frac{500t + 3}{2t + 1}$$

donde el tiempo $t \in [0, 367)$ está medido en días. Escribe la función que da los beneficios en función del tiempo y simplifícala.

La función pedida será:

$$(B \circ S)(t) = B\left(\frac{500t+3}{2t+1}\right) = 100 \cdot \frac{500t+3}{2t+1} - 5000 = \frac{100(500t+3) - 5000(2t+1)}{2t+1}$$

$$= \frac{50000t + 300 - 10000t - 5000}{2t+1} = \frac{40000t - 4700}{2t+1}.$$

Por lo tanto:

$$(B \circ S)(t) = \frac{40000t - 4700}{2t+1}.$$

Hay que comprender el esquema:

$t = \text{"días transcurridos"} \xrightarrow{S} S(t) = \text{"suscriptores obtenidos transcurridos } t \text{ días"} \xrightarrow{B} B(S(t)) = \text{"beneficios transcurridos } t \text{ días"}$

EJERCICIOS

1. Determinar los dominios de:

a) $f(x) = \frac{x}{x+3} + \frac{-x+8}{x^2-4}$

f) $g(x) = \sqrt{x^2-9} + \ln(x+1)$

b) $m(x) = \frac{\sqrt{5x+15}}{x^2-4}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2-1} + \frac{2x+3}{2x-10}$

h) $m(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4}} - \ln(x-5)$

d) $g(x) = \ln(x^2+4x+3) + \frac{1}{x+2}$

i) $g(x) = \ln(x+3) - \frac{2}{x-5}$

e) $f(x) = \sqrt{-2x+7} - \sqrt{2x+3}$

j) $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x^2-4}\right) + \sqrt{5x-10}$

e) $h(x) = \sqrt{-2x+8} + \ln(5x+10)$

k) $h(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\ln(x^2-24)}$

SOL: a) $\mathbb{R} - \{-3, -2, 2\}$ b) $[-3, \infty) - \{-2, 2\}$ c) $\mathbb{R} - \{-1, 1, 5\}$ d) $(-\infty, -2) \cup [2, \infty)$ e) $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$ f) $[0, \infty)$ g) $(-1, 3]$ h) $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$ i) $(-3, \infty)$ j) $(-\infty, -2) \cup [-1, 1] \cup [3, \infty)$ k) $(-4, \infty) - \{5\}$.

2. Escribir la función $f(x) = \sqrt{x+4}$ como composición de dos funciones. Indicar su dominio.

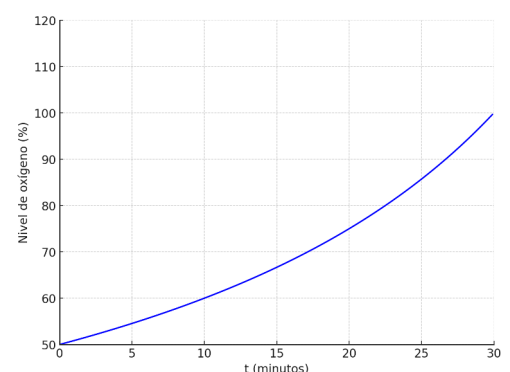
3. Dadas las funciones $f(x) = \frac{-2x+5}{4x-3}$ y $g(x) = \frac{x-3}{2x+1}$, se pide determinar las función $f \circ g$ (simplificada lo máximo posible) junto con su dominio.

4. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x}{x-3}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$, se pide determinar las funcione $f \circ g$ y $g \circ f$ (simplificadas lo máximo posible) junto con sus dominios.

PROBLEMAS

5. La cantidad de estudiantes en un aula depende del tiempo (minutos) según la función $N(t) = 30 - t$. El nivel de oxígeno disponible (en porcentaje) viene dado por la cantidad de personas que se encuentran en ella según la función

$$O(x) = \frac{3000}{x+30}$$



- a) Determina la función que nos da el nivel de oxígeno del aula en función del tiempo. ¿Cuál es el dominio de dicha función?
- b) Se considera que un nivel de oxígeno seguro es aquel que no desciende del 60%. Determina si en algún momento se baja de ese porcentaje.

6. En un laboratorio, se estudia el crecimiento de una población de microorganismos en un medio controlado. El tamaño de la población, $P(x)$, en miles de individuos, después de x horas viene dado por la función:

$$P(x) = 2 \cdot \log(x + 3) - \log(x + 1)$$

- a) Determina el dominio matemático de la función.
 - b) Determina el dominio contextual de la función.
 - c) Representa la función P usando Geogebra y analiza su evolución.
 - d) Determina el tamaño de la población entre 5 y 10 horas.
 - e) Determina el tiempo exacto (en horas) en que la población alcanzará 2000 individuos.
 - f) ¿Cuánto tiempo tardará la población en alcanzar 500 individuos?
7. El coste medio diario de un peaje (en euros) en función del número de vehículos que lo utilizan viene dado por la función:

$$C(x) = \frac{5x + 200}{x + 10}$$

A lo largo de un determinado periodo, el número de vehículos que pasan por el peaje ha evolucionado según la función:

$$V(t) = \frac{300t}{t + 5},$$

donde t es el número de días transcurridos. Escribe la función que da el coste medio del peaje en función del tiempo y simplifícala.