

6. Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos (bipartición) con más o menos rapidez. Supongamos que las condiciones de un cultivo A son tales que el número de amebas se duplica, aproximadamente, cada hora y que, al principio, hay tres amebas.

a) Expresa el número de amebas N en función del tiempo t en horas. Representa la función.

b) ¿Cuántas amebas hay a las 10 horas y media?

c) ¿Cuándo habrá un millón de amebas?

d) Tenemos otro cultivo B en el que el número de amebas se reduce en una tercera parte cada hora, siendo el número inicial de amebas de 5 600. ¿Cuánto tardarán en igualarse el número de amebas de cada cultivo? . Hacer la gráfica de ambas conjuntamente.

a) $N(t) = ?$

$$N(0) = 3 \cdot 2^0$$

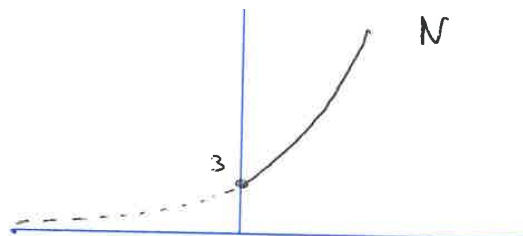
$$N(1) = 3 \cdot 2$$

$$N(2) = 3 \cdot 2^2$$

$$N(3) = 3 \cdot 2^3$$

$$N(t) = 3 \cdot 2^t \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Es creciente pues} \\ a=2 > 1 \end{array} \right.$$

$$\text{Dom } N = [0, \infty)$$



b) $N(10,5) = 3 \cdot 2^{10,5} \approx \boxed{4\,344 \text{ amebas}}$

c) $N(t) = 10^6 \rightarrow 3 \cdot 2^t = 10^6 \rightarrow 2^t = \frac{10^6}{3} \rightarrow \log 2^t = \log\left(\frac{10^6}{3}\right) \rightarrow$
 $t \log 2 = \log\left(\frac{10^6}{3}\right) \rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{10^6}{3}\right)}{\log 2} \approx \boxed{18,35 \text{ h}}$

d) $n(t) = ?$

$$n(0) = 5\,600$$

$$n(1) = 5\,600 \cdot \frac{2}{3}$$

$$n(2) = 5\,600 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$n(3) = 5\,600 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$n(t) = 5\,600 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Es decreciente} \\ \text{pues } a = \frac{2}{3} < 1 \end{array} \right.$$

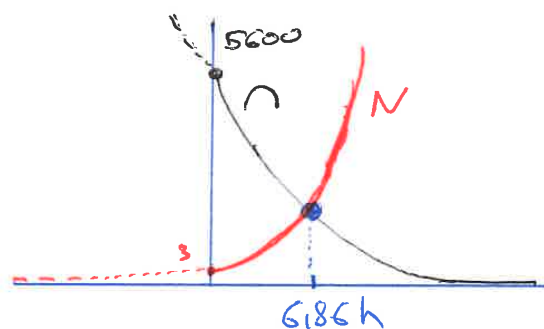
$$\text{Dom } n = [0, \infty)$$

Se igualarán en el instante t en el que $N(t) = n(t)$

$$N(t) = n(t) \rightarrow 3 \cdot 2^t = 5\,600 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t \rightarrow 3 \cdot 2^t = 5\,600 \cdot \frac{2^t}{3^t} \rightarrow$$

$$\frac{2^t \cdot 3^t}{2^t} = \frac{5\,600}{3} \rightarrow 3^t = \frac{5\,600}{3} \rightarrow \log 3^t = \log\left(\frac{5\,600}{3}\right) \rightarrow$$

$$t \log 3 = \log\left(\frac{5\,600}{3}\right) \rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{5\,600}{3}\right)}{\log 3} \approx \boxed{6,86 \text{ h}}$$



7. Una población A de ratas se triplica **cada dos años**. Sabemos que actualmente tiene 2 individuos. Se pide:

- Expresar el número de ratas N en función del tiempo t . Representa la función.
- ¿Cuántas ratas habrá en 17 años?
- ¿Cuánto tiempo tendrá que transcurrir para que haya 10 000 ratas?
- Otra población B de ratas se triplica cada año, partiendo de un número inicial de 7. Averiguar cuánto tardará en haber 1700 ratas entre ambas poblaciones. Representa conjuntamente ambas gráficas.

a) $N(t) = ?$

$$N(0) = 2$$

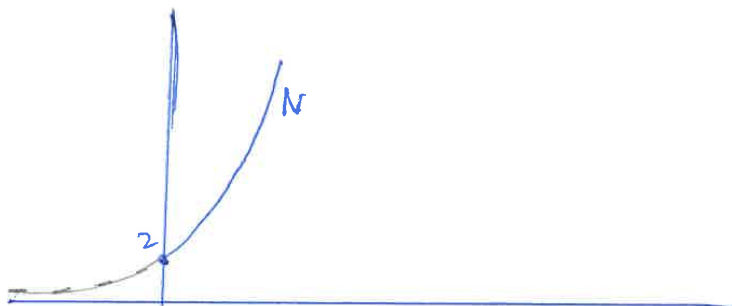
$$N(2) = 2 \cdot 3$$

$$N(4) = 2 \cdot 3^2$$

$$N(6) = 2 \cdot 3^3$$

$$N(t) = 2 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$$

$$\text{Dom } N = [0, \infty)$$



La función es creciente pues $3^{t/2} = 3^{+ \cdot \frac{1}{2}} = (3^{1/2})^+$ y por lo tanto $a = 3^{1/2} \approx 1,7 > 1$

Notese que la función también se puede escribir como

$$N(t) = 2 \cdot (\sqrt{3})^t$$

b) $N(17) = 2 \cdot 3^{\frac{17}{2}} \approx \boxed{22\,728 \text{ ratas}}$

c) $N(t) = 10\,000 \rightarrow 2 \cdot 3^{\frac{t}{2}} = 10\,000 \rightarrow 3^{\frac{t}{2}} = \frac{10\,000}{2}$

$$\rightarrow 3^{\frac{t}{2}} = 5000 \rightarrow \log 3^{\frac{t}{2}} = \log 5000 \rightarrow \frac{t}{2} \log 3 = \log 5000$$

$$\rightarrow t = \frac{2 \log 5000}{\log 3} \approx \boxed{15,51 \text{ años}}$$

d) $n(t) = 7 \cdot 3^t$ Dom $n = [0, \infty)$

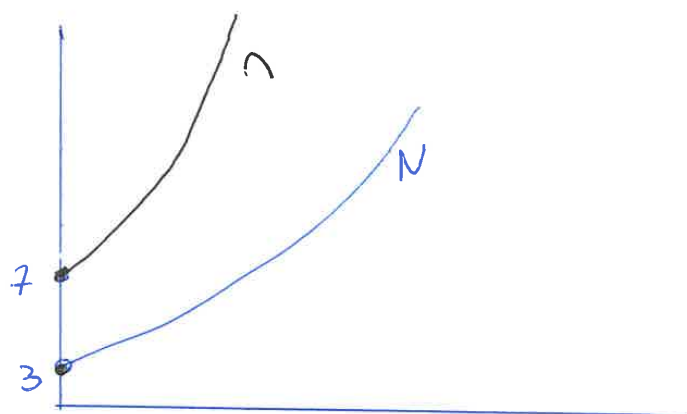
$$N(t) + n(t) = 1700 \rightarrow 2 \cdot 3^{\frac{t}{2}} + 7 \cdot 3^t = 1700$$

$$\rightarrow 7u^2 + 2u - 1700 = 0 \rightarrow \begin{cases} u_1 \approx 15,44 \\ u_2 \approx -15,73 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2u + 7u^2 &= 1700 \\ 3^{\frac{t}{2}} &= u \\ 3^t &= (3^{\frac{t}{2}})^2 = u^2 \end{aligned}$$

Caso 1 $3^{\frac{t}{2}} = 15,44 \rightarrow \log 3^{\frac{t}{2}} = \log 15,44 \rightarrow \frac{t}{2} \log 3 = \log 15,44$

$$\rightarrow t = \frac{2 \log 15,44}{\log 3} \approx \boxed{4,98 \text{ años}}$$



8. Una población de insectos comienza con 1200 individuos. El número total de individuos decrece exponencialmente según el modelo:

$$N(t) = Ce^{kt}$$

donde N es el número de individuos en función del tiempo t medido en días. Se sabe que a los 5 días hay 800 insectos. Se pide:

- Determinar la función N .
- Representarla gráficamente.
- ¿Cuál será la población después de 10 días?
- ¿Cuánto tiempo tardará en reducirse a 300 insectos?
- Otra población evoluciona según la fórmula: $n(t) = 2^{t+3}$. Representa ambas gráficas conjuntamente. Indica para que valores del tiempo la segunda población es superior en tamaño a la primera.

a) $N(t) = C e^{kt}$

$$N(0) = 1200 \rightarrow C e^{k \cdot 0} = 1200 \rightarrow \boxed{C = 1200}$$

$$N(5) = 800 \rightarrow 1200 e^{k \cdot 5} = 800 \rightarrow e^{5k} = \frac{800}{1200} \rightarrow$$

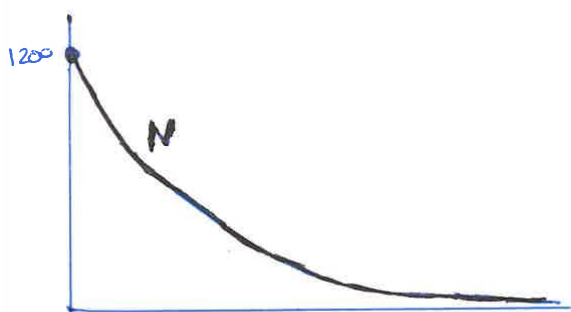
$$e^{5k} = \frac{2}{3} \rightarrow \ln e^{5k} = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow 5k \ln e = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\rightarrow 5k \cdot 1 = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow 5k = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{5} \approx -0,081$$

Luego

$$\boxed{N(t) = 1200 e^{-0,081t}}$$

b) La función va a ser decreciente pues $e^{-0,081t} = (e^{-0,081})^t \approx (0,922)^t$ y por lo tanto $a = 0,922 < 1$



c) $N(10) = 1200 e^{-0,081 \cdot 10} \approx \boxed{534 \text{ insectos}}$

d) $N(t) = 300 \rightarrow 1200 e^{-0,081t} = 300 \rightarrow e^{-0,081t} = \frac{300}{1200}$

$$\rightarrow e^{-0,081t} = \frac{1}{4} \rightarrow \ln e^{-0,081t} = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow -0,081t \ln e = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

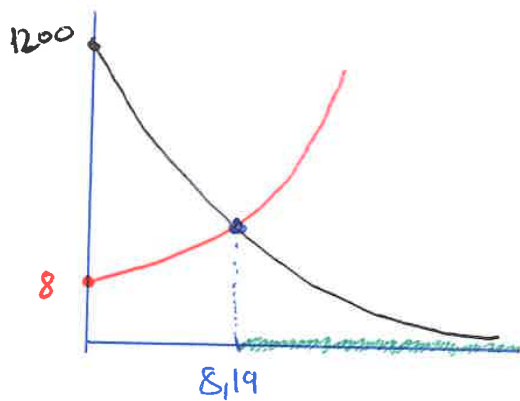
$$\rightarrow -0,081t \cdot 1 = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow -0,081t = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{-0,081} = -\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{0,081} \approx \boxed{17 \text{ días}}$$

$$e) \quad n(t) = 2^{t+3} = 2^t \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^t$$

$$n(t) = 8 \cdot 2^t$$

Es creciente pues $a=2 > 1$



$$N(t) = n(t) \rightarrow 1200 e^{-0.081t} = 8 \cdot 2^t$$

$$\rightarrow \frac{1200}{8} = \frac{2^t}{e^{0.081t}} \rightarrow 150 = \frac{2^t}{(e^{0.081})^t}$$

$$\rightarrow 150 = \left(\frac{2}{e^{0.081}} \right)^t \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln 150 = \ln \left(\frac{2}{e^{0.081}} \right)^t \rightarrow \ln 150 = t \ln \left(\frac{2}{e^{0.081}} \right)$$

$$\rightarrow t = \frac{\ln 150}{\ln \left(\frac{2}{e^{0.081}} \right)} \approx 8.19 \text{ días}$$

La segunda población será superior a la primera para a partir de 8.19 días. El intervalo pedido es

$$(8.19, \infty)$$