

1. Tres estaciones de tren, A, B y C, están ubicadas en línea recta a lo largo de una vía férrea. Se sabe que la distancia entre las estaciones A y B es la cuarta parte de la distancia entre las estaciones B y C. En un sistema de coordenadas, las estaciones tienen las siguientes ubicaciones: $A=(1, -2)$ y $B=(5, 6)$. ¿Cuáles son las coordenadas de la estación C?
-



$A=(1, -2)$
 $B=(5, 6)$

$$\boxed{\vec{AB} = \frac{1}{4} \vec{BC}} \Rightarrow \vec{BC} = 4 \vec{AB} \Rightarrow C - B = 4 \vec{AB} \Rightarrow \boxed{C = B + 4 \vec{AB}}$$
$$\vec{AB} = B - A = (5, 6) - (1, -2) = (4, 8)$$
$$C = B + 4 \vec{AB} = (5, 6) + 4(4, 8) = (5, 6) + (16, 32) = (21, 38)$$

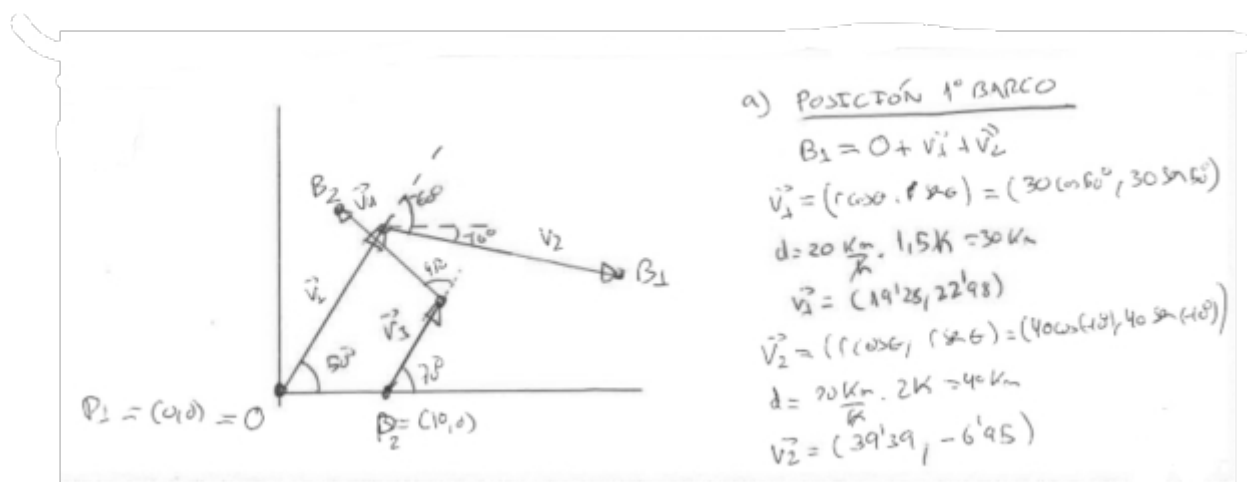
SOLUCIÓN: $C = (21, 38)$

2. Dos barcos parten simultáneamente desde dos puertos situados a 10 km de distancia entre sí a lo largo de una línea recta de costa.

El primer barco sale del primer puerto con un ángulo de 50° respecto a la línea de costa y avanza en línea recta a una velocidad constante de 20 km/h durante 1.5 horas. Luego, realiza un giro de -60° (con respecto a la línea de costa) y continúa con la misma velocidad durante 2 horas. El segundo barco sale del segundo puerto con un ángulo de 70° respecto a la costa a una velocidad de 25 km/h durante 2 horas. Posteriormente, realiza un giro de 45° (con respecto a la línea de costa) y mantiene una velocidad de 18 km/h durante 1.5 horas.

Se pide:

- Determinar la distancia entre los dos barcos al cabo de 3.5 horas.
- Representar gráficamente las trayectorias de ambos barcos en un sistema de coordenadas, indicando claramente los cambios de dirección y las posiciones finales.
- Calcular a qué distancia se encuentra cada barco de la costa al cabo de 3.5 horas.
- ¿Se cruzan las trayectorias de los dos barcos?



$$B_1 = (0,0) + (19'28, 23'98) + (39'39, -6'95) = (58'67, 16'03)$$

$$\boxed{B_1 = (58'67, 16'03)}$$

POSICIÓN 2º BARCO

$$B_2 = P_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$$

$$\vec{v}_3 = (1000 \cdot 180) = (50 \cos 70^\circ, 50 \sin 70^\circ) = (17'11, 46'98)$$

$$\vec{v}_4 = (1000 \cdot 180) = (27 \cos 115^\circ, 27 \sin 115^\circ) = (-11'41, 24'47)$$

$$70^\circ + 45^\circ = 115^\circ$$

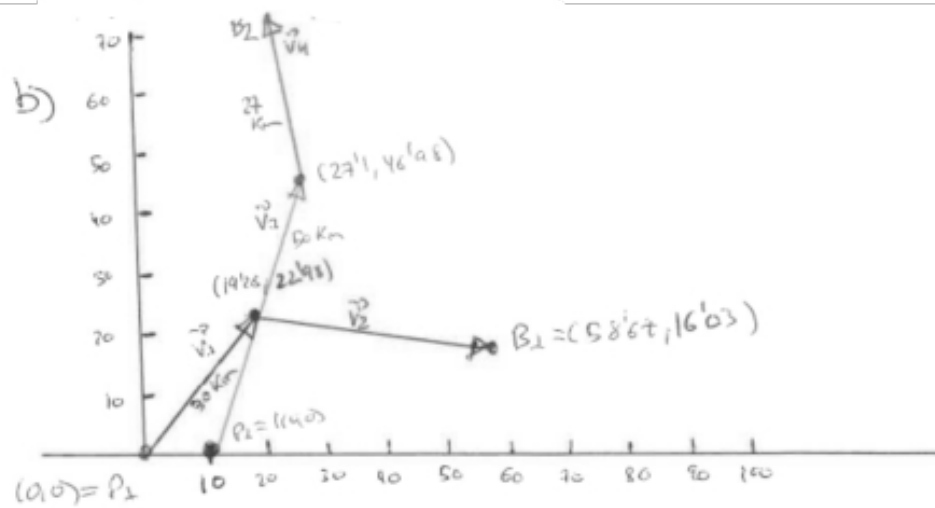
$$B_2 = (10,0) + (17'11, 46'98) + (-11'41, 24'47) = (15'69, 71'45)$$

$$\boxed{B_2 = (15'69, 71'45)}$$

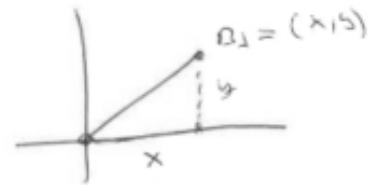
DISTANCIA ENTRE BARCOS

$$d(B_1, B_2) = \sqrt{(58'67 - 15'69)^2 + (16'03 - 71'45)^2} \approx \underline{70,13 \text{ km}}$$

Ambos barcos distan 70,13 km



c) Coincidirá con la coordenada y
 El barco 1 estará a 16,04 Km y
 el barco 2 a 71,45 Km



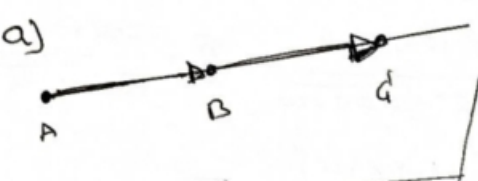
e) Se cruzan durante

3. Dados los puntos A(2, 1), B(-3, 4) y C(k, 5), resolver lo siguiente:

a) Hallar k para que los puntos A, B y C estén alineados.

$A = (2, 1)$ $B = (-3, 4)$ $C = (k, 5)$

a)



$A, B \text{ y } C \text{ alineados si } \vec{AB} \parallel \vec{AC}$
 $\vec{AB} = B - A = (-3, 4) - (2, 1) = (-5, 3)$
 $\vec{AC} = C - A = (k, 5) - (2, 1) = (k-2, 4)$

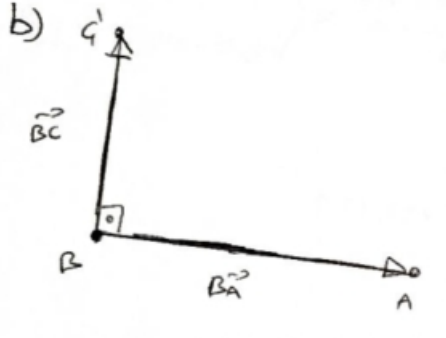
$$\frac{k-2}{-5} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3(k-2) = (-5) \cdot 4 \Rightarrow 3k-6 = -20 \Rightarrow 3k = -14$$

$$\Rightarrow \boxed{k = -\frac{14}{3}}$$

SOLUCIÓN : $k = -\frac{14}{3}$

b) Hallar k para que el ángulo en B del triángulo ABC sea un ángulo recto (90°).

b)



$\vec{BC} \perp \vec{BA} \Leftrightarrow \boxed{\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 0}$
 $\vec{BC} = C - B = (k, 5) - (-3, 4) = (k+3, 1)$
 $\vec{BA} = A - B = (2, 1) - (-3, 4) = (5, -3)$
 $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = (k+3, 1) \cdot (5, -3) = (k+3) \cdot 5 + 1 \cdot (-3)$
 $= 5k+15-3 = 5k+12$

Luego

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 0 \Rightarrow 5k+12=0 \Rightarrow 5k=-12 \Rightarrow \boxed{k = -\frac{12}{5}}$$

SOLUCIÓN $k = -\frac{12}{5}$

c) Hallar k para que el ángulo en A del triángulo ABC sea de 30° .

c)

$$\cos 30^\circ = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(-5, 3) \cdot (k-2, 4)}{\sqrt{25+9} \sqrt{(k-2)^2+16}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(-5) \cdot (k-2) + 3 \cdot 4}{\sqrt{34} \sqrt{k^2-4k+20}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-5k+22}{\sqrt{34} \sqrt{k^2-4k+20}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{-5k+22}{\sqrt{34} \sqrt{k^2-4k+20}}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{(-5k+22)^2}{34(k^2-4k+20)} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4} = \frac{25k^2-220k+484}{34k^2-136k+680} \Rightarrow 3(34k^2-136k+680) = 4(25k^2-220k+484)$$

$$\Rightarrow 102k^2-408k+2040 = 100k^2-880k+1936 \Rightarrow 2k^2+472k+104=0$$

$$\Rightarrow k^2+236k+52=0$$

$$k = \frac{-236 \pm \sqrt{236^2-4 \cdot 1 \cdot 52}}{2 \cdot 1} = \frac{-236 \pm \sqrt{55488}}{2} \Rightarrow \begin{cases} k_1 \approx -9,221 \\ k_2 \approx -235,779 \end{cases} \quad \text{COMP } \checkmark$$

Ambas soluciones son válidas

SOLUCIÓN: $k_1 \approx -9,221$ $k_2 \approx -235,779$

d) Hallar k para que la distancia de A a B sea 3 unidades mayor que la distancia de B a C.

$$d(A, B) = d(B, C) + 3$$

$$d(A, B) = |\vec{AB}| = |(-5, 3)| = \sqrt{(-5)^2+3^2} = \sqrt{34}$$

$$d(B, C) = |\vec{BC}| = |(k+3, 1)| = \sqrt{(k+3)^2+1^2} = \sqrt{(k+3)^2+1}$$

$$d(A, B) = d(B, C) + 3 \Rightarrow \sqrt{34} = \sqrt{(k+3)^2+1} + 3 \Rightarrow$$

$$\sqrt{34} - 3 = \sqrt{(k+3)^2+1} \Rightarrow (\sqrt{34} - 3)^2 = (\sqrt{(k+3)^2+1})^2 \Rightarrow$$

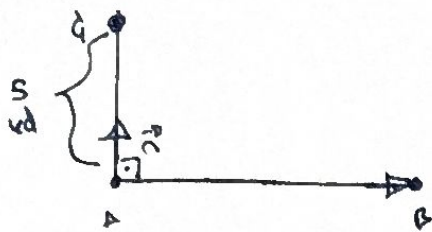
$$34 - 6\sqrt{34} + 9 = (k+3)^2 + 1 \Rightarrow (k+3)^2 + 1 = 42 - 6\sqrt{34} \Rightarrow$$

$$(k+3)^2 = 42 - 6\sqrt{34} \Rightarrow k+3 = \pm \sqrt{42 - 6\sqrt{34}} \Rightarrow k = -3 \pm \sqrt{42 - 6\sqrt{34}}$$

$$\begin{cases} k_1 = -3 + \sqrt{42 - 6\sqrt{34}} \approx -0,35 & \text{VÁLIDA} \\ k_2 = -3 - \sqrt{42 - 6\sqrt{34}} \approx -5,65 & \text{VÁLIDA} \end{cases}$$

SOLUCIÓN $k_1 = -3 + \sqrt{42 - 6\sqrt{34}} \approx -0,35$
 $k_2 = -3 - \sqrt{42 - 6\sqrt{34}} \approx -5,65$

4. Considerar los puntos $A=(2, 1)$ y $B=(6, 5)$. Hallar el punto C tal que el segmento AC sea perpendicular al segmento AB y que AC tenga una longitud de 5 unidades. Además, calcular el área del triángulo ABC de manera exacta.



$$\vec{AB} = B - A = (6, 5) - (2, 1) = (4, 4)$$

Un vector normal a $\vec{AB}$ es

$$\vec{n} = (4, -4) \parallel (1, -1)$$

Por lo tanto, el vector $\vec{n} = (1, -1)$ es perpendicular a $\vec{AB}$.

Se tiene entonces que:

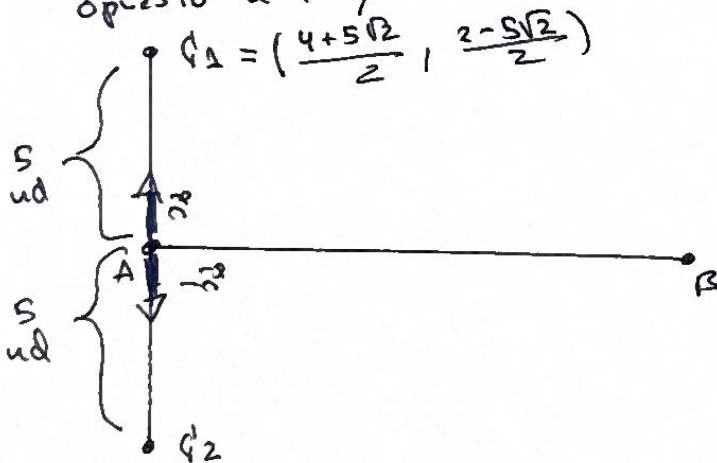
$$C = A + \frac{B}{|\vec{n}|} \vec{n} = (2, 1) + \frac{5}{\sqrt{2}} (1, -1) = (2, 1) +$$

$$= (2, 1) + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2} \right) = \left(2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{4}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{4+5\sqrt{2}}{2}, \frac{2-5\sqrt{2}}{2} \right)$$

Por lo tanto, el punto pedido es $C = \left(\frac{4+5\sqrt{2}}{2}, \frac{2-5\sqrt{2}}{2} \right)$

Nótese que hay otra posibilidad para el punto C , que sería el punto que obtendríamos tomando como vector normal el vector opuesto a $\vec{n}$, es decir $-\vec{n} = (-1, 1)$



Es decir

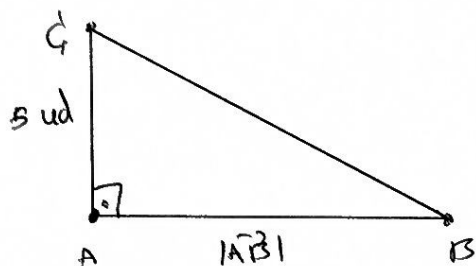
$$C_2 = A - \frac{B}{|\vec{n}|} \vec{n} = (2, 1) - \frac{5}{\sqrt{2}} (1, -1) = (2, 1) + \left(\frac{-5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= (2, 1) + \left(\frac{-5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) = \left(2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{4-5\sqrt{2}}{2}, \frac{2+5\sqrt{2}}{2} \right)$$

Hay entonces 2 posibilidades para G'

$$G'_1 = \left(\frac{4+5\sqrt{2}}{2}, \frac{2-5\sqrt{2}}{2} \right) \quad G'_2 = \left(\frac{4-5\sqrt{2}}{2}, \frac{2+5\sqrt{2}}{2} \right)$$

En ambos casos el triángulo ABC tendrá la misma área.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \text{BASE} \cdot \text{ALTURA} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot |\vec{AB}|$$
$$= \frac{5|\vec{AB}|}{2}$$

$$|\vec{AB}| = |(4,4)| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ ud}$$

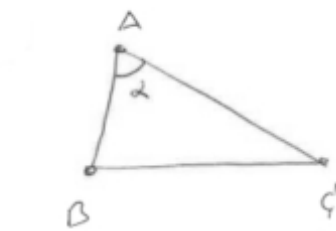
$$S_{ABC} = \frac{5 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = \frac{5 \cdot 2\sqrt{2}}{1} = 10\sqrt{2} \text{ ud}^2$$

SOLUTION : Hay dos posibilidades para G'

$$G'_1 = \left(\frac{4+5\sqrt{2}}{2}, \frac{2-5\sqrt{2}}{2} \right) \quad G'_2 = \left(\frac{4-5\sqrt{2}}{2}, \frac{2+5\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$S_{ABG} = 10\sqrt{2} \text{ ud}^2$$

5. Un terreno tiene forma de triángulo, definido por los vértices $A=(2, 3)$, $B=(6, 7)$ y $C=(4, -1)$. Se pide determinar su superficie en metros cuadrados, considerando que las coordenadas están expresadas en unidades de metros. (NOTA: Se recomienda hacer un dibujo para visualizar la situación).



$$\begin{aligned} A &= (2, 3) \\ B &= (6, 7) \\ C &= (4, -1) \end{aligned}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \alpha$$

$$\vec{AB} = B - A = (6, 7) - (2, 3) = (4, 4)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\vec{AC} = C - A = (4, -1) - (2, 3) = (2, -4)$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{2^2 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ m}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{(4, 4) \cdot (2, -4)}{4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{8 - 16}{8\sqrt{10}} = \frac{-8}{8\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 108^\circ 26' 6''$$

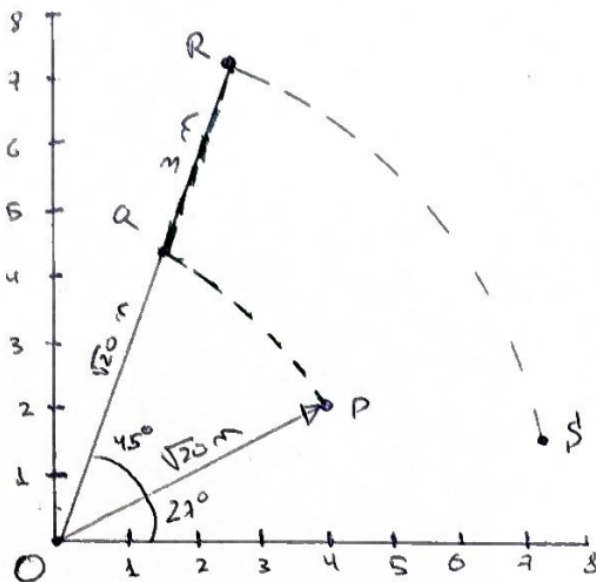
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5} \sin$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5} \sin(108^\circ 26' 6'') = 4\sqrt{10} \sin(108^\circ 26' 6'') \approx 11.99 \dots \approx 12$$

Solución 12 m^2

6. En un plano se sigue la trayectoria de un dron que parte del punto $P=(4, 2)$ (coordenadas medidas en metros). El dron realiza las siguientes maniobras, todas respecto del origen de coordenadas:
1. En primer lugar, su trayectoria se corrige mediante un giro antihorario de 45° .
 2. A continuación, el dron se aleja 3 m del origen, manteniendo el mismo ángulo polar.
 3. Finalmente, la trayectoria vuelve a corregirse con un giro horario de 60° .

Determina las coordenadas finales del dron tras completar todas las maniobras.



$$P = (4, 2)$$

- ① Giro de $+45^\circ$ con respecto al origen O
- ② Aleja 3 m del origen O
- ③ Giro de -60° con respecto al origen O

$$\vec{OP} = (r \cos \alpha, r \sin \alpha) = (4, 2) \Rightarrow \begin{cases} r \cos \alpha = 4 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{20}} \\ r \sin \alpha = 2 \end{cases}$$

$$r = |\vec{OP}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \text{ m}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{20}}\right) \approx 21^\circ \quad \begin{cases} \alpha_1 = 21^\circ \checkmark \\ \alpha_2 = 360^\circ - 21^\circ = 339^\circ \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \vec{OQ} = (r \cos \alpha, r \sin \alpha) = (\sqrt{20} \cos 72^\circ, \sqrt{20} \sin 72^\circ) \approx (1.38, 4.25)$$

$$r = \sqrt{20}$$

$$\alpha = 21^\circ + 45^\circ = 72^\circ$$

Las coordenadas de Q son $Q \approx (1.38, 4.25)$

$$\textcircled{2} \vec{OR} = (r \cos \alpha, r \sin \alpha) = ((\sqrt{20} + 3) \cos 72^\circ, (\sqrt{20} + 3) \sin 72^\circ) \approx (2.31, 7.11)$$

$$r = \sqrt{20} + 3$$

$$\alpha = 72^\circ \quad \text{Las coordenadas de } R \text{ son } R \approx (2.31, 7.11)$$

$$\textcircled{3} \vec{OS} = (r \cos \alpha, r \sin \alpha) = ((\sqrt{20} + 3) \cos 12^\circ, (\sqrt{20} + 3) \sin 12^\circ) \approx (7.31, 1.55)$$

$$r = \sqrt{20} + 3$$

$$\alpha = 72^\circ - 60^\circ = 12^\circ$$

Las coordenadas de S son $S \approx (7.31, 1.55)$

solución Tras las maniobras las coordenadas del dron son $S \approx (7.31, 1.55)$

7. En cada caso estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Si son secantes, determinar su punto de corte, si son paralelas determinar la distancia entre ambas:

a) $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 + t \end{cases} \quad s: y = 2x - 4$

a) $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 + t \end{cases} \quad s: y = 2x - 4$
 $s: -2x + y + 4 = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (-2, 1)$

$\vec{v}_r = (2, 1) \quad \vec{v}_s = (1, 2)$

Como $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{v}_r \neq \vec{v}_s \Rightarrow r$ y s secantes



cálculo del punto de corte (Método del punto genérico)

$Q = (-1 + 2t, 4 + t)$ punto genérico de s

$-2(-1 + 2t) + (4 + t) + 4 = 0 \Rightarrow 2 - 4t + 4 + t + 4 = 0 \Rightarrow -3t + 10 = 0$

$\Rightarrow -3t = -10 \Rightarrow t = \frac{-10}{-3} \Rightarrow \boxed{t = \frac{10}{3}}$

El punto de corte es

$P = (-1 + 2 \cdot \frac{10}{3}, 4 + \frac{10}{3}) = (-1 + \frac{20}{3}, 4 + \frac{10}{3}) = (-\frac{3}{3} + \frac{20}{3}, \frac{12}{3} + \frac{10}{3})$
 $= (\frac{17}{3}, \frac{22}{3})$

SOLUCIÓN r y s son secantes y se cortan en

$P = (\frac{17}{3}, \frac{22}{3})$

$$b) r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

$$m: \frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{-6}$$

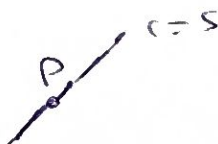
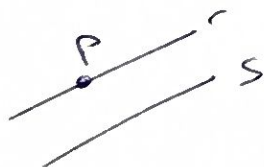
$$b) r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

$$m: \frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{-6}$$

$$\vec{v}_r = (-2, 3)$$

$$\vec{v}_m = (4, -6)$$

Como $-\frac{2}{4} = \frac{3}{-6} \Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_m \Rightarrow r$ y s son paralelas o coincidentes



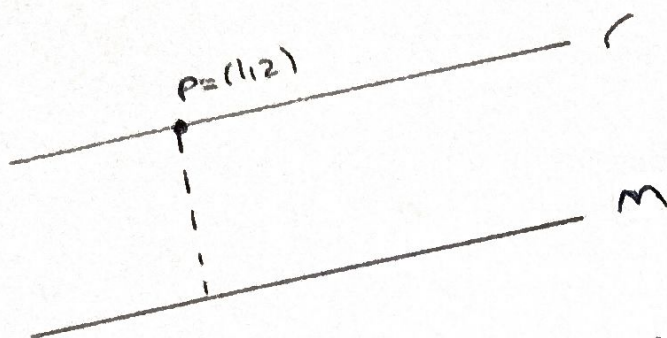
Para ver si son paralelas o coincidentes, se toma el punto $P = (1, 2) \in r$ y comprobamos si pertenece a s .

- Si $P \in s$, entonces son coincidentes
- Si $P \notin s$, entonces son paralelas

$$\frac{1-3}{4} = \frac{3-5}{-6} \Rightarrow \frac{-2}{4} = \frac{-2}{-6} \text{ FALSO}$$

Luego $P \notin s$ y por lo tanto son paralelas

Cálculo de la distancia



$$\begin{aligned} m: \frac{x-3}{4} &= \frac{y-5}{-6} \Rightarrow -6x+18=4y-20 \\ \Rightarrow -6x+18-4y+20 &= 0 \\ \Rightarrow -6x-4y+38 &= 0 \quad :(-2) \\ \Rightarrow m: 3x+2y-19 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(r, m) &= d(P, m) = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 19|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|3 + 4 - 19|}{\sqrt{13}} = \frac{|-12|}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{13} \text{ ud} \end{aligned}$$

solución: r y m son paralelas

$$d(r, m) = \frac{12\sqrt{13}}{13} \text{ ud}$$

$$c) \quad t: 4x - 6y + 12 = 0 \quad l: \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{2}$$

$$c) \quad t: 4x - 6y + 12 = 0 \quad l: \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{2}$$

pasamos l a forma general

$$l: \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{2} \Rightarrow 2x-6 = 3y-12 \Rightarrow 2x-3y+6=0$$

$$\begin{cases} t: 4x-6y+12=0 \\ l: 2x-3y+6=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} = \frac{12}{6} \Rightarrow \text{Rectas coincidentes}$$

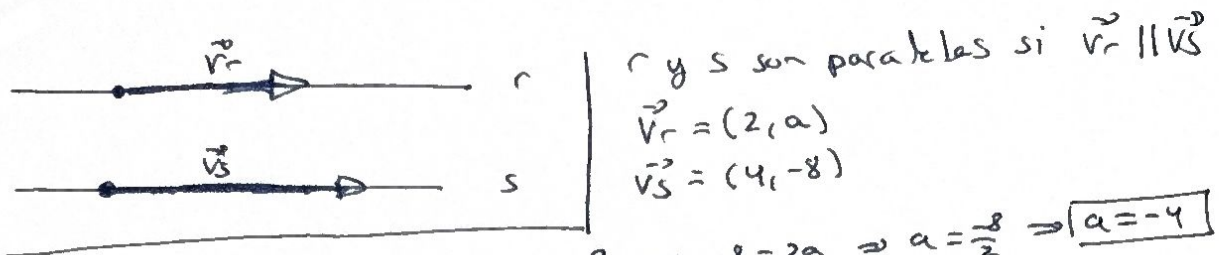
8. Sean las rectas de ecuaciones :

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{a}$$

$$s: 8x+4y=1$$

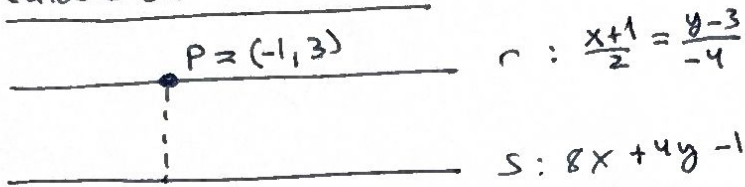
calcular a para que:

a) Las rectas sean paralelas y, en ese caso, la distancia entre ellas.



$$\vec{v}_r \parallel \vec{v}_s \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{a}{-8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{-8} \Rightarrow -8 = 2a \Rightarrow a = \frac{-8}{2} \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

cálculo de la distancia



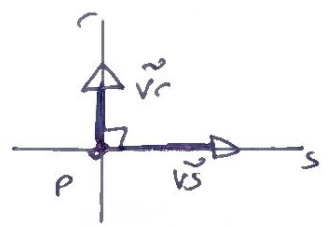
$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|8 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{8^2 + 4^2}} = \frac{|-8 + 12 - 1|}{\sqrt{64 + 16}} = \frac{|3|}{\sqrt{80}} = \frac{3}{\sqrt{80}} \text{ ud}$$

$$= \frac{3 \sqrt{80}}{80} = \frac{3 \cdot 4\sqrt{5}}{80} = \frac{3\sqrt{5}}{20} \text{ ud}$$

SOLUCIÓN : $a = -4$

$$d(r, s) = \frac{3\sqrt{5}}{20} \text{ ud}$$

b) Las rectas sean perpendiculares y, en ese caso, hallar el punto de corte:



r y s son perpendiculares si:

$$\vec{v}_r \perp \vec{v}_s \Rightarrow \boxed{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0}$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (2, a) \cdot (4, -8) = 8 - 8a$$

$$8 - 8a = 0 \Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{8} \Rightarrow a = 1$$

calculo del punto de corte

Voy a pasar la recta r a su forma general

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x+1 = 2y-6 \Rightarrow x-2y+7=0$$

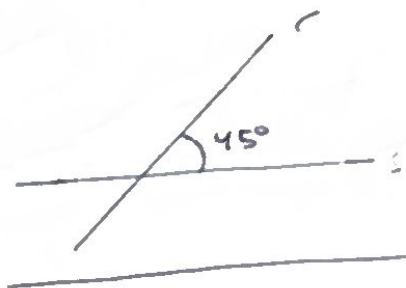
$$\begin{cases} r: x-2y = -7 \\ s: 8x+4y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 2x-4y = -14 \\ 8x+4y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x-4y = -14 \\ 8x+4y = 1 \\ \hline 10x = -13 \\ x = -\frac{13}{10} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x-2y &= -7 \Rightarrow -\frac{13}{10} - 2y = -7 \\ \Rightarrow -2y &= -7 + \frac{13}{10} \Rightarrow -2y = \frac{-57}{10} \\ \Rightarrow y &= \frac{-57}{10 \cdot (-2)} = \frac{57}{20} \end{aligned}$$

Solución: $a=1$
Punto de corte $P = \left(-\frac{13}{10}, \frac{57}{20}\right)$

c) Ambas rectas formen un ángulo de 45° .



Vamos a usar la fórmula de las rectas

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

• Como $\vec{v}_1 = (2, a) \Rightarrow m_1 = \frac{a}{2}$

• Como $\vec{v}_2 = (4, -8) \Rightarrow m_2 = \frac{-8}{4} = -2$

Luego

$$\tan 45^\circ = \left| \frac{\frac{a}{2} - (-2)}{1 + \frac{a}{2} \cdot (-2)} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{\frac{a}{2} + 2}{1 - a} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{\frac{a+4}{2}}{1-a} \right|$$

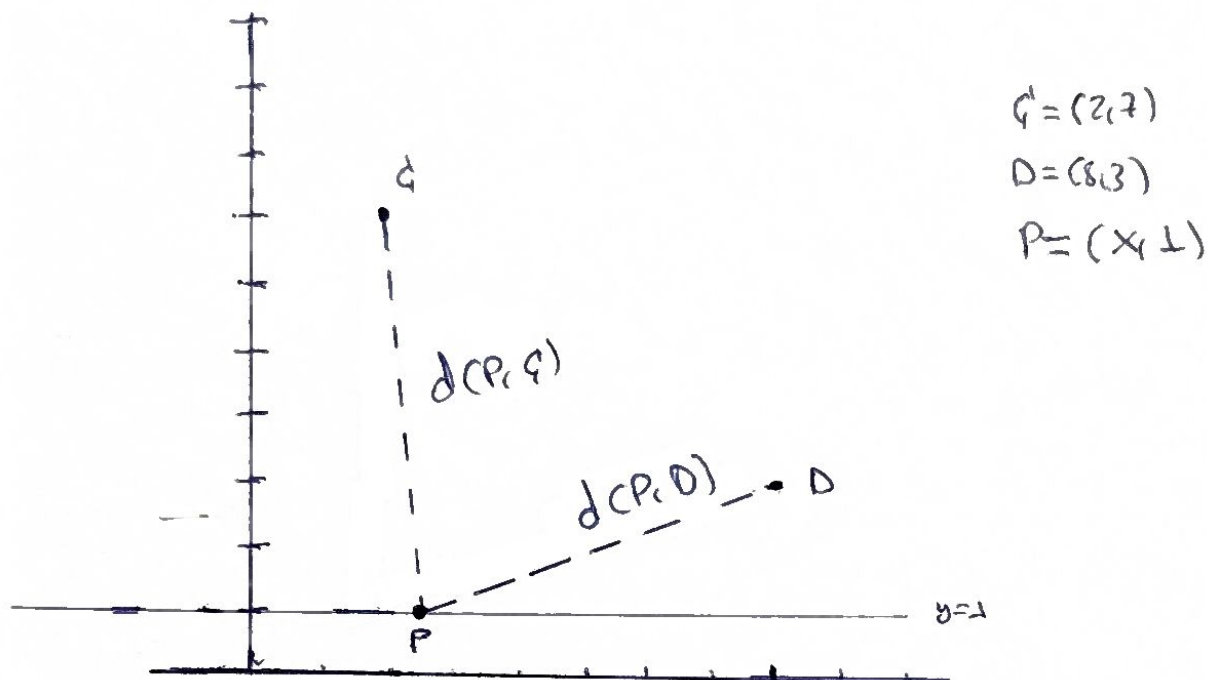
$$\Rightarrow 1 = \left| \frac{a+4}{2-2a} \right| \Rightarrow \frac{a+4}{2-2a} = \pm 1$$

Caso + $\frac{a+4}{2-2a} = 1 \Rightarrow a+4 = 2-2a \Rightarrow a+2a = 2-4 \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{2}{3}}$

Caso - $\frac{a+4}{2-2a} = -1 \Rightarrow a+4 = -2+2a \Rightarrow a-2a = -2-4 \Rightarrow -a = -6 \Rightarrow \boxed{a = 6}$

SOLUCIÓN: Hay dos valores posibles para a
 $a_1 = -\frac{2}{3}$ y $a_2 = 6$

9. **(Representar gráficamente la situación)** Dos pueblos, C y D, están planeando construir un puente sobre un río que pasa por la región. En un mapa, las coordenadas de los pueblos son $C(2, 7)$ y $D(8, 3)$, mientras que el río sigue la recta de ecuación $y = 1$. Determina el punto en el que debe construirse el puente sobre el río para que esté a la misma distancia de ambos pueblos.



$$d(P, C) = d(P, D) \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (1-3)^2}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + 6^2 = (x-8)^2 + 2^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 36 = x^2 - 16x + 64 + 4$$

$$\Rightarrow -4x + 40 = -16x + 68 \Rightarrow -4x + 16x = 68 - 40 \Rightarrow 12x = 28$$

$$\Rightarrow x = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

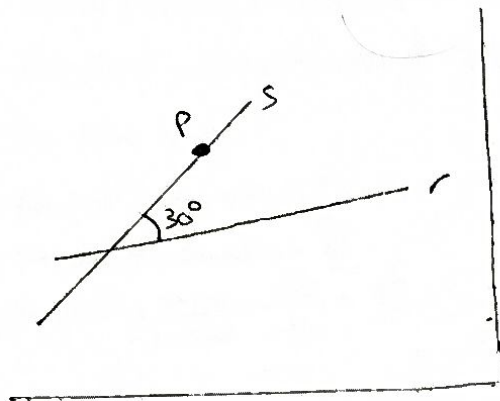
SOLUCIÓN: El puente se deberá construir en el punto

$$P = \left(\frac{7}{3}, 1\right)$$

10. **(Obligatorio dibujo)** Un equipo de ingenieros está planificando la construcción de una nueva carretera en una zona rural.

- La carretera principal está representada por la recta $r: 3x+2y-12=0$, que sigue el trazado de un antiguo camino vecinal.
- Se desea construir una vía secundaria que pase por el punto $P(4,3)$ y que forme un ángulo de 30° con la carretera principal.

Se pide determinar la ecuación de las posibles ubicaciones de la nueva vía secundaria.



$$P = (4, 3)$$

$$r: 3x + 2y - 12 = 0$$

Podemos obtener la pendiente de r despejando la y para obtener la ecuación explícita

$$3x + 2y - 12 = 0 \Rightarrow 2y = -3x + 12 \\ \Rightarrow y = \frac{-3x + 12}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 6$$

Por lo tanto la pendiente de r es $m_r = -\frac{3}{2}$. La pendiente m de la recta s debe verificar:

$$\tan \alpha = \left| \frac{m - m_r}{1 + m m_r} \right| \Rightarrow \tan 30^\circ = \left| \frac{m - (-\frac{3}{2})}{1 + m(-\frac{3}{2})} \right| \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \left| \frac{m + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3m}{2}} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \left| \frac{\frac{2m+3}{2}}{\frac{2-3m}{2}} \right| \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \left| \frac{2m+3}{2-3m} \right| \Rightarrow \frac{2m+3}{2-3m} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{CASO+} \quad \frac{2m+3}{2-3m} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 6m+9 = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}m \Rightarrow 6m+3\sqrt{3}m = 2\sqrt{3}-9$$

$$\Rightarrow m(6+3\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}-9 \Rightarrow m = \frac{2\sqrt{3}-9}{6+3\sqrt{3}} \approx -0,49$$

$$\text{CASO-} \quad \frac{2m+3}{2-3m} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 6m+9 = -2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}m \Rightarrow 6m-3\sqrt{3}m = -2\sqrt{3}-9$$

$$\Rightarrow m(6-3\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}-9 \Rightarrow m = \frac{-2\sqrt{3}-9}{6-3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}+9}{3\sqrt{3}-6} \approx -15,51$$

Hay 2 pendientes posibles para s $m_1 \approx -0,49$ y $m_2 \approx -15,51$

Por lo que hay 2 rectas posibles:

$$s_1: y-3 = (-0,49)(x-4) \Rightarrow y = 3 - 0,49x + 1,96 \Rightarrow y = -0,49x + 4,96$$

$$s_2: y-3 = (-15,51)(x-4) \Rightarrow y = 3 - 15,51x + 62,04 \Rightarrow y = -15,51x + 65,04$$

Solución: Hay 2 posibles ubicaciones para la vía secundaria

$$s_1: y = -0,49x + 4,96$$

$$s_2: y = -15,51x + 65,04$$

11. Sin usar calculadora, calcular las razones trigonométricas directas de los siguientes ángulos:
a) 2760° ; b) -3825° (Reducir previamente los ángulos a uno del primer cuadrante y justificar el procedimiento.)

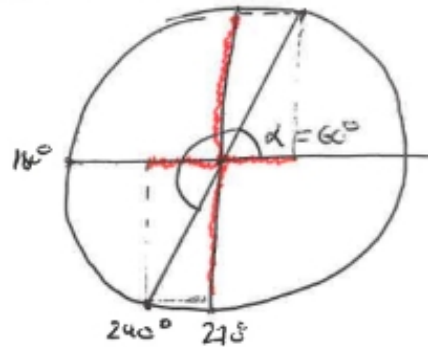
$$a) \frac{2760^\circ}{360^\circ} = 7 + \frac{2}{3} \Rightarrow 2760^\circ = 7 \cdot 360^\circ + \frac{2}{3} \cdot 360^\circ$$

$$\boxed{2760^\circ = 7 \cdot 360^\circ + 240^\circ}$$

Las razones trigonométricas de 2760° coinciden con las de 240° , que está en el 3º cuadrante.

Se tiene que

$$\begin{aligned} \bullet \cos 240^\circ &= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\ \bullet \sin 240^\circ &= -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \bullet \tan 240^\circ &= \frac{\sin 240^\circ}{\cos 240^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$



$$\alpha = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

SOLUCIÓN $\cos 2760^\circ = -\frac{1}{2}$ $\sin 2760^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 2760^\circ = \sqrt{3}$

$$b) \frac{-3825^\circ}{-360^\circ} = 10 + \frac{5}{8} \Rightarrow -3825^\circ = 10 \cdot (-360^\circ) + \frac{5}{8} \cdot (-360^\circ) =$$

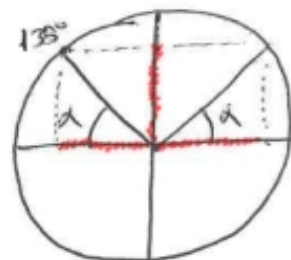
$$= 10 \cdot (-360^\circ) - 225^\circ = 10 \cdot (-360^\circ) - 360^\circ + 360^\circ - 225^\circ$$

$$= 11 \cdot (-360^\circ) + 135^\circ$$

Es decir: $-3825^\circ = 11 \cdot (-360^\circ) + 135^\circ$

Por lo tanto, las razones trigonométricas de -3825° coinciden con las de 135° , que está en el 2º cuadrante.

$$\begin{aligned} \bullet \cos 135^\circ &= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \bullet \sin 135^\circ &= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \bullet \tan 135^\circ &= \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \end{aligned}$$



$$\alpha = 180^\circ - 135^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

SOLUCIÓN

$$\cos(-3825^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin(-3825^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan(-3825^\circ) = -1$$

12. Sabiendo que $\sin \alpha = -4/7$ y que α está en el 3º cuadrante, determinar de manera exacta y sin calculadora

a) $\cos 2\alpha$

b) $\sin(\alpha - 45^\circ)$

c) $\cos \frac{\alpha}{2}$

$\sin \alpha = -\frac{4}{7}$ α está en el 3º cuadrante

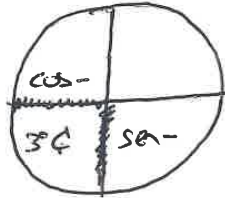
a) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{\sqrt{33}}{7}\right)^2 - \left(-\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{33}{49} - \frac{16}{49} = \frac{17}{49}$

CÁLCULO DE $\cos \alpha$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha + \left(-\frac{4}{7}\right)^2 = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha + \frac{16}{49} = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{49}$$

$$\rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{33}{49} \rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{33}{49}} = -\sqrt{\frac{33}{49}} = -\frac{\sqrt{33}}{7}$$

$\cos \alpha$ es negativo pues α está en el 3º cuadrante



SOLUCIÓN $\cos 2\alpha = \frac{17}{49}$

b) $\sin(\alpha - 45^\circ) = \sin \alpha \cos 45^\circ - \cos \alpha \sin 45^\circ = \left(-\frac{4}{7}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{33}}{7}\right) \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= \frac{-4\sqrt{2}}{14} + \frac{\sqrt{66}}{14} = \frac{-4\sqrt{2} + \sqrt{66}}{14}$$

SOLUCIÓN $\sin(\alpha - 45^\circ) = \frac{-4\sqrt{2} + \sqrt{66}}{14}$

c) $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{33}}{7}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{7 - \sqrt{33}}{7}}{2}} = -\sqrt{\frac{7 - \sqrt{33}}{14}}$

SIGNO DE $\cos \frac{\alpha}{2}$

$$180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ \rightarrow \frac{180^\circ}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{270^\circ}{2} \rightarrow 90^\circ \leq \frac{\alpha}{2} \leq 135^\circ$$

como $\frac{\alpha}{2}$ está en el 2º cuadrante, $\cos \frac{\alpha}{2}$ es negativo



13. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

- a) $\cos 2x = 2 \cos x - 1$
 b) $3 \sin x - 4 \cos x = 0$
 c) $\cos 2x + \cos x = 0$

a)

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos x - 1 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos x - 1 \Rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 2 \cos x + 1 = 0 \\ \Rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x - 2 \cos x + 1 &\Rightarrow 2 \cos^2 x - 2 \cos x = 0 \Rightarrow \\ 2 \cos x (\cos x - 1) &= 0 \quad \begin{cases} \rightarrow 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 & \text{CASO 1} \\ \rightarrow \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 & \text{CASO 2} \end{cases} \end{aligned}$$

CASO 1 $\cos x = 0 \Rightarrow x = \arccos 0 = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ + K360^\circ \\ x_2 = 270^\circ + K360^\circ \end{cases}$
 $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$

CASO 2 $\cos x = 1 \Rightarrow x = \arccos 1 = 0^\circ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + K360^\circ \\ x_2 = 360^\circ + K360^\circ \end{cases}$
 $360^\circ - 0^\circ = 360^\circ$

SOLUCIÓN $\begin{cases} x_1 = 0^\circ + K360^\circ \\ x_2 = 90^\circ + K360^\circ \\ x_3 = 270^\circ + K360^\circ \end{cases}$

b)

$$\begin{aligned} 3 \sin x - 4 \cos x &= 0 \Rightarrow 3 \sin x = 4 \cos x \xrightarrow{\cos x \neq 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3} \\ \Rightarrow x &= \arctan \frac{4}{3} \approx 53^\circ \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 53^\circ + K360^\circ \\ x_2 \approx 233^\circ + K360^\circ \end{cases} \\ 180^\circ + 53^\circ &= 233^\circ \end{aligned}$$

SOLUCIÓN $\begin{cases} x_1 \approx 53^\circ + K360^\circ \\ x_2 \approx 233^\circ + K360^\circ \end{cases}$

c)

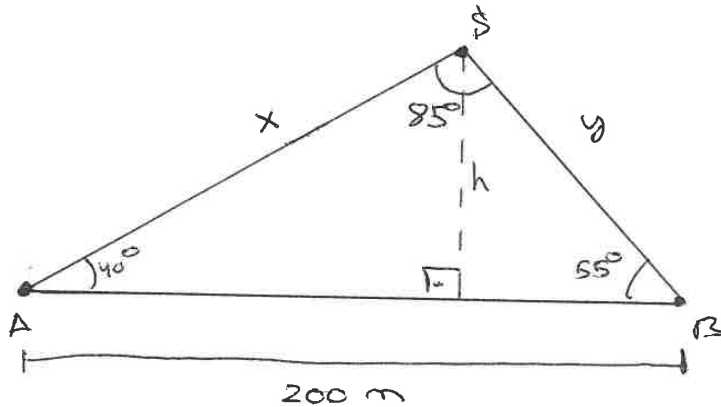
$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos x &= 0 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = 0 \\ \Rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x &= 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 & \text{CASO 1} \\ \cos x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} & \text{CASO 1} \\ \cos x = \frac{-1-3}{4} = -1 & \text{CASO 2} \end{cases} \end{aligned}$$

CASO 1 $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^\circ + K360^\circ \\ x_2 = 300^\circ + K360^\circ \end{cases}$
 $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

CASO 2 $\cos x = -1 \Rightarrow x = \arccos(-1) = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ + K360^\circ$
 $360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

SOLUCIÓN $\begin{cases} x_1 = 60^\circ + K360^\circ \\ x_2 = 180^\circ + K360^\circ \\ x_3 = 300^\circ + K360^\circ \end{cases} \quad K \in \mathbb{Z}$

14. Un satélite es observado desde dos puntos situados en el suelo, A y B, separados por 200 metros de distancia. El ángulo de elevación del satélite desde el punto A es de 40° , y desde el punto B es de 55° . Sabiendo que la proyección del satélite en el suelo cae sobre el segmento AB:
- Se pide:
- Calcular la altura del satélite respecto al suelo.
 - Hallar la distancia total desde cada punto (A y B) hasta el satélite.



CÁLCULO DE X $\frac{X}{\sin 55^\circ} = \frac{200}{\sin 85^\circ} \Rightarrow X = \frac{200 \sin 55^\circ}{\sin 85^\circ} \approx 164,46 \text{ m}$

CÁLCULO DE h $\sin 40^\circ = \frac{h}{X} \Rightarrow h = X \sin 40^\circ = \frac{200 \sin 55^\circ \sin 40^\circ}{\sin 85^\circ} \approx 105,71 \text{ m}$

CÁLCULO DE y $\sin 55^\circ = \frac{h}{y} \Rightarrow y = \frac{h}{\sin 55^\circ} = \frac{200 \sin 55^\circ \sin 40^\circ}{\sin 85^\circ \sin 55^\circ} = \frac{200 \sin 40^\circ}{\sin 85^\circ} \approx 129,05 \text{ m}$

SOLUCIÓN a) La altura del satélite es de:

$$h = \frac{200 \sin 55^\circ \sin 40^\circ}{\sin 85^\circ} \approx 105,71 \text{ m}$$

b) La distancia desde A al satélite S es:

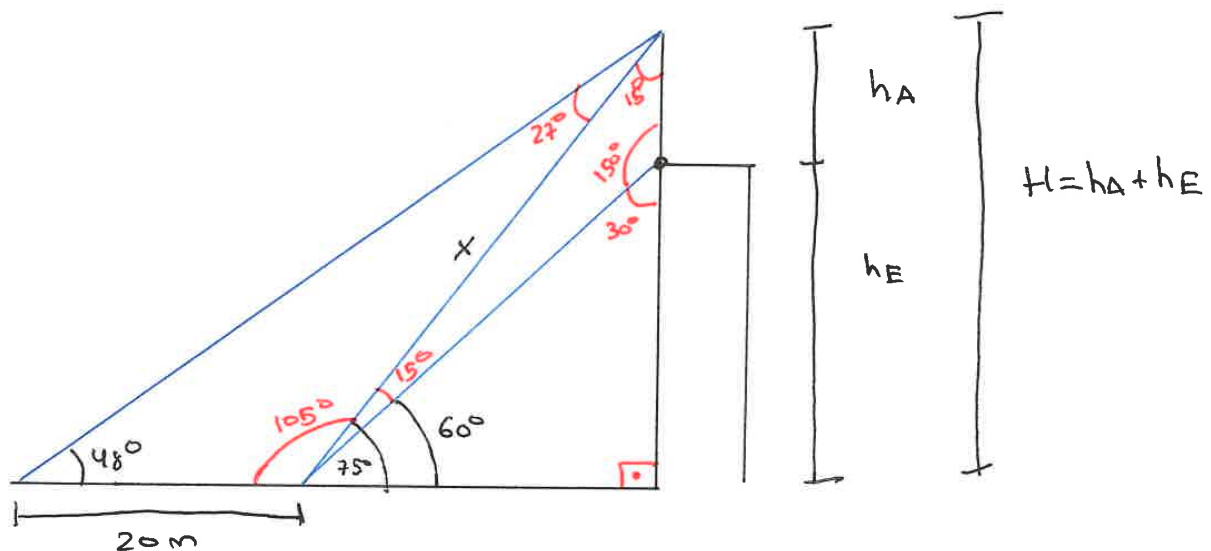
$$X = \frac{200 \sin 55^\circ}{\sin 85^\circ} \approx 164,46 \text{ m}$$

La distancia desde B al satélite S es:

$$y = \frac{200 \sin 40^\circ}{\sin 85^\circ} \approx 129,05 \text{ m}$$

15. Una antena de telecomunicaciones está ubicada sobre la azotea de un edificio. Desde un punto P en el suelo, se observa la parte superior de la antena con un ángulo de elevación de 48° . Al moverse 20 metros más cerca hacia el edificio hasta un punto Q, el ángulo de elevación de la parte superior de la antena se convierte en 75° , y el ángulo de elevación de la cima del edificio (base de la antena) es de 60°

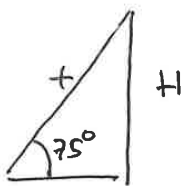
Se pide: a) Calcular la altura del edificio b) Calcular la altura de la antena



1) CÁLCULO DE x $\frac{x}{\sin 48^\circ} = \frac{20}{\sin 27^\circ} \rightarrow x = \frac{20 \sin 48^\circ}{\sin 27^\circ} \approx 32,74 \text{ m}$

2) CÁLCULO DE h_A $\frac{h_A}{\sin 15^\circ} = \frac{x}{\sin 150^\circ} \rightarrow h_A = \frac{x \sin 15^\circ}{\sin 150^\circ} \approx \frac{32,74 \sin 15^\circ}{\sin 150^\circ} \approx 16,95 \text{ m}$

3) CÁLCULO DE H



$\sin 75^\circ = \frac{H}{x} \rightarrow H = x \sin 75^\circ = \frac{20 \sin 48^\circ}{\sin 27^\circ} \cdot \sin 75^\circ \approx 31,62 \text{ m}$

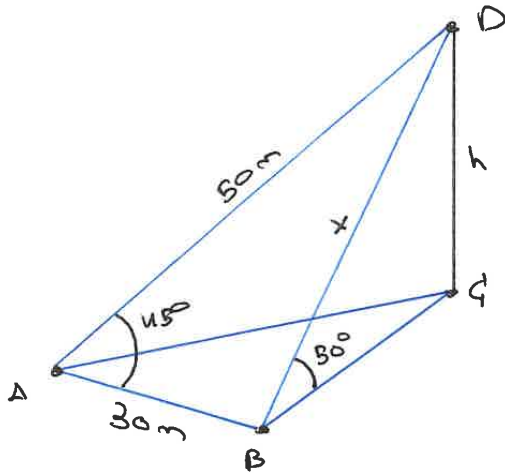
4) CÁLCULO DE h_E $h_E = H - h_A \approx 31,62 - 16,95 = 14,67 \text{ m}$

SOLUCIÓN: El edificio mide 14,67 m y la antena 16,95 m

16. Desde dos puntos en el suelo, A y B, hay dos cables tensos que van hasta la parte superior de un poste eléctrico ubicado en el punto C (base del poste) y culminando en D (parte superior del poste).

- La longitud del cable AD es 50 m.
- $\widehat{DAB} = 45^\circ$ y $\widehat{DBC} = 50^\circ$
- La distancia entre los puntos A y B (en el suelo) es 30 m.

Se pide calcular la altura del poste CD.



1) CÁLCULO DE X

T. COSENO

$$x^2 = 30^2 + 50^2 - 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \cos 45^\circ$$

$$x = \sqrt{30^2 + 50^2 - 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \cos 45^\circ} \approx \underline{35,76 \text{ m}}$$

2) CÁLCULO DE h

$$\sin 50^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \sin 50^\circ = 35,76 \sin 50^\circ$$

$$\rightarrow h \approx \underline{27,39}$$

SOLUCIÓN: El poste mide 27,39 m