LECCIÓN 2. LOGARITMOS. FUNCIONES LOGARÍTMICAS.

En esta lección vamos a estudiar las funciones logarítmicas. Previamente se va hacer un breve repaso de la definición de logaritmo y de sus propiedades.

DEFINICIÓN DE LOGARITMO: Se define el **logaritmo de P en base a** como el número x dado por:

$$\log_a P = x \quad \Leftrightarrow \quad P = a^x \qquad \text{con } P > 0\,,\ a > 0 \text{ y } \ a \neq 1$$

EJEMPLO 1: Calcular sin usar la calculadora:

a) $\log_2 8 =$ ***b)*** $\log_2 \frac{1}{8} =$ ***c)*** $\log_5 625 =$ ***d)*** $\log_{10} 10\,000 =$ ***e)*** $\log_{10} 0,01 =$

---

a) Se tiene que: $\log_2 8 = x \ \Leftrightarrow\ 8 = 2^x \ \Leftrightarrow\ 2^3 = 2^x \ \Leftrightarrow\ x = 3\,.$ *Por lo tanto:* $\log_2 8 = 3$

b) Se tiene que: $\log_2 \frac{1}{8} = x \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{8} = 2^x \ \Leftrightarrow\ 2^{-3} = 2^x \ \Leftrightarrow\ x = -3.$ *Por lo tanto:* $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

c) Se tiene que: $\log_5 625 = x \ \Leftrightarrow\ 625 = 5^x \ \Leftrightarrow\ 5^4 = 5^x \ \Leftrightarrow\ x = 4\,.$ *Por lo tanto:* $\log_5 625 = 4$

d) Se tiene que: $\log_{10} 10\,000 = x \ \Leftrightarrow\ 10\,000 = 10^x \ \Leftrightarrow\ 10^4 = 10^x \ \Leftrightarrow\ x = 4$
Por lo tanto: $\log_{10} 10\,000 = 4$

e)Se tiene que: $\log_{10} 0,01 = x \ \Leftrightarrow\ 0,01 = 10^x \ \Leftrightarrow\ 10^{-2} = 10^x \ \Leftrightarrow\ x = -2$
Por lo tanto: $\log_{10} 0,01 = -2$

Las bases que más se utilizan al tratar con logaritmos son las siguientes:

- Logaritmos decimales: Base $a = 10$. Se escriben como $\log$ en vez de $\log_{10}$.
  Por ejemplo: $\log 15 = \log_{10} 15$
- Logaritmos neperianos: Base $e = 2,7182\ldots$. Se escriben como $\ln$ en vez de $\log_e$.
  Por ejemplo: $\ln 5 = \log_e 5$

USO DE LA CALCULADORA PARA EL CÁLCULO DE LOGARITMOS (CASIO fx-570/991 SP CW)

Para calcular logaritmos se usa la tecla $\log_{\square} \square$ de la calculadora. Para logaritmos neperianos se usa la tecla secundaria $\ln$.

EJEMPLO 2: Calcular usando la calculadora:
$\log 7 = 0,845$ $\log_8 19 = 1,41$ $\ln 5 = 1,609$ $\ln 17 = 2,833$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS:

1. $\log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0$
2. $\log_a (PQ) = \log_a P + \log_a Q$
3. $\log_a \left(\dfrac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$
4. $\log_a (P^n) = n \log_a P$
5. $\log_a P = \dfrac{\log_b P}{\log_b a}$ (FÓRMULA DEL CAMBIO DE BASE)

FUNCIÓN LOGARÍTMICA: son funciones de la forma

$$f(x) = \log_a g(x) \qquad a > 0\; a \neq 1$$

Su dominio viene dado por las soluciones de la inecuación $g(x) > 0$

$$Dom f = \{x \in R : g(x) > 0\}$$

EJEMPLO 3: Calcular el dominio de definición de la función $f(x) = \log\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)$

El dominio de la función viene dado por las soluciones de la inecuación racional

$$\frac{x+2}{2x-1} > 0$$

Para ello:

1) <u>Determinamos las raíces de numerador y denominador</u>:

$$N = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \qquad\qquad D = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

2) <u>Estudio del signo</u>: Se estudia el signo de la función en los intervalos de signo constante determinados por las raíces del numerador y del denominador.

Signo $\dfrac{x+2}{2x-1}$		-2		$1/2$	
	+	0	-	$\nexists$	+

El signo se ha decidido evaluado la fracción en los siguientes puntos:

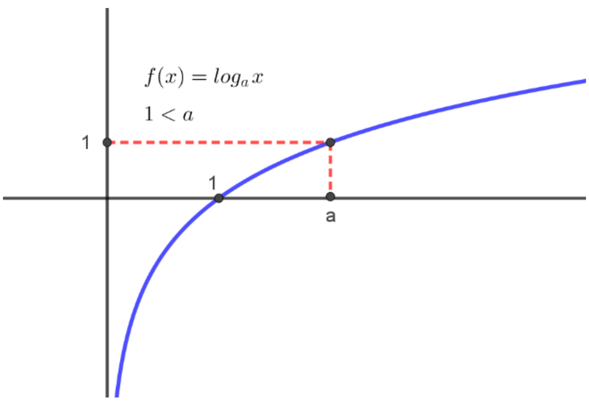
$$x = -3 \Rightarrow \frac{-3+2}{2\cdot(-3)-1} = \frac{-1}{-7} > 0$$
$$x = 0 \Rightarrow \frac{0+2}{2\cdot 0 - 1} = \frac{2}{-1} < 0$$
$$x = 1 \Rightarrow \frac{1+2}{2\cdot 1 - 1} = \frac{3}{1} > 0$$

Por lo tanto se deduce que:

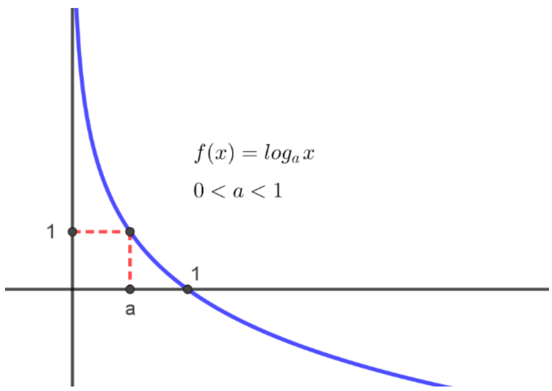
$$\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

La función $f(x) = \log_a x$ tiene $Dom f = (0, \infty)$ y su gráfica es:

Creciente si $a > 1$



Decreciente si $0 < a < 1$



Es importante conocer las propiedades de los logaritmos para trabajar con funciones logarítmicas. En particular es importante saber usar estas propiedades para resolver ecuaciones de tipo exponencial y logarítmicas.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES USANDO LOGARITMOS

Una ecuación es exponencial si la incógnita se encuentra en un exponente. La propiedad:

$$\log_a(P^n) = n\log_a P$$

es útil para resolver ecuaciones exponenciales ya que permite "bajar" la incógnita del exponente. Se deben de comprobar las soluciones que obtengamos.

EJEMPLO 4: Resolver las ecuaciones:
a)$3^{1-x} = 5$ *b)*$2^x \cdot 3^{x+1} = 2$ *c)*$4^x + 2^x - 2^{x+1} = 56$

---

a) Tomamos logaritmos en la ecuación y despejamos la x :

$$3^{1-x} = 5 \Rightarrow \log 3^{1-x} = \lg 5 \Rightarrow (1-x)\log 3 = \log 5 \Rightarrow 1 - x = \frac{\log 5}{\log 3} \Rightarrow x = 1 - \frac{\log 5}{\log 3} \approx -0,465$$

Ahora se comprueba la solución: $3^{1-(-0,465)} \approx 5$ *. Por lo tanto la solución es válida.*

Se podría hacer el mismo procedimiento tomando logaritmos en otra base. En este caso en concreto, como la incógnita está en el exponente de una potencia de base 3, queda muy cómodo tomar como base del logaritmo base 3:

$$3^{1-x} = 5 \Rightarrow \log_3 3^{1-x} = \lg_3 5 \Rightarrow (1-x)\log_3 3 = \log_3 5$$

y como $\log_3 3 = 1$ *:*

$$1 - x = \log_3 5 \Rightarrow x = 1 - \log_3 5 \approx -0,465$$

b) Se toman logaritmos y se aplica la propiedad del logaritmo de un producto (la propiedad 2) :

$$2^x \cdot 3^{x+1} = 2 \Rightarrow \log\left(2^x \cdot 3^{x+1}\right) = \log 2 \Rightarrow \log 2^x + \log 3^{x+1} = \log 2$$

Ahora se aplica la propiedad del logaritmo de un exponente (la propiedad 4) :

$$\log 2^x + \log 3^{x+1} = \log 2 \Rightarrow x\log 2 + (x+1)\log 3 = \log 2$$

Pasamos ahora a despejar la x:

$$x\log 2 + (x+1)\log 3 = \log 2 \Rightarrow x\log 2 + x\log 3 + \log 3 = \log 2 \Rightarrow x\log 2 + x\log 3 = \log 2 - \log 3$$

$$\Rightarrow x(\log 2 + \log 3) = \log 2 - \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 2 + \log 3} \approx -0,226$$

Se comprueba la solución y se obtiene que es una solución válida.

c) Se resuelve usando el cambio de variable: $u = 2^x$

A partir de este cambio es evidente que: $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = u^2$ $2^{x+1} = 2^x \cdot 2 = 2u$
Por lo tanto la ecuación se reescribe como:

$$4^x + 2^x - 2^{x+1} = 56 \Rightarrow u^2 + u - 2u = 56 \Rightarrow u^2 - u - 56 = 0$$

Aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado se obtienen 2 soluciones $u_1 = -7$ *y* $u_2 = 8$*.*

Ahora se deshace el cambio de variable:

$2^x = -7$ *No tiene solución, ya que* 2^x *es siempre positivo*

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

Se comprueba que $x = 3$ *es una solución válida.*

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Un ecuación es logarítmica si la incógnita se encuentra en el argumento del logaritmo. La definición de logaritmo será la herramienta que usaremos para “eliminar los logaritmos” y obtener una ecuación más simple:

$$\log_a A = B \quad \Leftrightarrow \quad A = a^B$$

Se debe de comprobar siempre el resultado y ver que no haya ningún logaritmo con argumento negativo o cero.

EJEMPLO 5: Resolver las ecuaciones:

a) $\log(x+2) + \log(x-3) = 1$ *b)* $5\log_2(x+3) - 8 = 0$ *c)* $2\log(x+1) = \log(7-3x)$

----

a) Aplicamos la propiedad de la suma de logaritmos (propiedad 2)

$$\log(x+2) + \log(x-3) = 1 \Rightarrow \log\left((x+2)(x+3)\right) = 1$$

Aplicando la definición de logaritmo obtenemos que:

$$(x+2)(x+3) = 10^1 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 10 \Longrightarrow x^2 + 5x - 4 = 0$$

Resolviendo con la fórmula de la ecuación de segundo grado se obtienen dos soluciones:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{65}}{2} \approx 4,53 \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{65}}{2} \approx -3,53$$

De las cuales solo es válida la primera.

b) Se aplica la propiedad del logaritmo de una potencia (propiedad 4)

$$5\log_2(x+3) - 8 = 0 \Rightarrow \log_2(x+3)^5 = 8$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$(x+3)^5 = 2^8 \Rightarrow x + 3 = \pm\sqrt[5]{2^8} \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt[5]{2^8}$$

De las dos soluciones de la ecuación solo es correcta $x = -3 + \sqrt[5]{2^8} \approx 0,031$

c) En primer lugar aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia (propiedad 4) :

$$2\log(x+1) = \log(7-3x) \Rightarrow \log(x+1)^2 = \log(7-3x) \Longrightarrow \log(x+1)^2 - \log(7-3x) = 0$$

Ahora se aplica la propiedad de la diferencia de logaritmos (propiedad 3):

$$\log(x+1)^2 - \log(7-3x) = 0 \Rightarrow \log\left(\frac{(x+1)^2}{7-3x}\right) = 0$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$\log\left(\frac{(x+1)^2}{7-3x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{7-3x} = 10^0 \Rightarrow \frac{x^2+2x+1}{7-3x} = 1$$

Simplificando obtenemos una ecuación polinómica de 2º grado:

$$\frac{x^2+2x+1}{7-3x}=1 \Rightarrow x^2+2x+1=7-3x \Rightarrow x^2+5x-6=0$$

Las soluciones que se obtienen son $x_1=1$ *y* $x_2=-6$ *de las cuáles solo la primera es válida.*

EJERCICIOS

1. Determina el dominio de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $f(x)=ln\left(-2x+3\right)$ b) $g(x)=log\left(-4x^2+4x+15\right)$ c) $h(x)=\ln(9x-x^3)$

d) $m(x)=\log(x^4+x^3)$ e) $n(x)=log_2\left(\frac{-5x+3}{x+4}\right)$ f) $o(x)=log_2\left(\frac{x^2-2}{x^3-1}\right)$

SOL: a) (-∞, 3/2); b) (-3/2, 5/2); c) (-∞, -3) ∪ (0, 3); d)R-{0}; e) (-4, 3/5); f) (-√2,1)∪ (√2,∞)

2. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a. $3^{-2x^2+5x}=\frac{1}{27}$ $\left(SOL: x_1=-\frac{1}{2}; x_2=3\right)$

b. $\frac{4^{3x}}{2^x}=64$ $(SOL: x=\frac{6}{5})$

c. $3^{x+1}\cdot 2^{x+1}=36$ $(SOL: x=1)$

d. $5^{x-4}\cdot 125^{2x}=25$ $(SOL: x=\frac{6}{7})$

e. $\sqrt{2^{3x-1}}=\frac{1}{8}$ $(SOL: x=-\frac{5}{3})$

f. $3\sqrt{27^{x+1}}=\frac{1}{9^{2x+5}}$ $(SOL: x=-\frac{25}{11})$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $7^x=2$ $(SOL: x=\frac{\ln 2}{\ln 7}=\log_7 2=0{,}356\ldots)$

b. $5^{x^2-1}=7$

c. $2^x\cdot 3^{x+1}=50$ $(SOL: x=\frac{\ln\left(\frac{50}{3}\right)}{\ln 6}=1{,}57\ldots)$

d. $8^{2x+3}\cdot 5^{6x}=3^x$ $(SOL: x=-0{,}491\ldots)$

e. $\frac{2^x}{3^{x+1}}=1$ $(SOL: x=\frac{\log_2 3}{1-\log_2 3}=-2{,}709\ldots)$

f. $2^x\cdot\frac{5^{x+3}}{3^{x+4}}=7$ $(SOL: x=1{,}256\ldots)$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a. $7^{x+2}-7^{x+1}+7^x=43$ $(SOL: x=0)$

b. $2^{x+1}+2^{x-1}=\frac{5}{2}$ $(SOL: x=0)$

c. $4^x+64=16\cdot 2^x$ $(SOL: x=3)$

d. $4^x-6\cdot 2^x+8=0$ $(SOL: x_1=2;\ x_2=1)$

e. $2\cdot 9^x-3^x-6=0$ $(SOL: x\approx 0{,}63)$

f. $25^x-2\cdot 5^x-3=0$ $(SOL: x\approx 0.682)$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas

a. $2\log x-\log(x+6)=3\log 2$ $(SOL: x=12)$

b. $4\log_2(x^2+1)=\log_2 625$ $(SOL: x=\pm 2)$

c. $\log(x^2+1)-\log(x^2-1)=\log\frac{13}{12}$ $(SOL: x=\pm 5)$

d. $\log(x-1)=2$ $(SOL: x=101)$

e. $\ln(x-3)+\ln(x+1)=\ln 3+\ln(x-1)$ $(SOL: x=5)$

f. $2\ln(x-3)=\ln x-\ln 4$ $(SOL: x=4)$

g. $\log_3(x+4)-\log_3(x+7)=-5$ $(SOL: x\approx -3{,}988)$

h. $\ln(5x+3)+\ln(x-1)=2$ $(SOL: x=1{,}665)$

i. $\log(2x+5)+\log(x+3)-\log(x+1)=2$ $(SOL: x_1\approx 45{,}435; x_2\approx -0.9359$

j. $\log_5(3x+1)-\log_5(2x+1)+\log_5(x+3)=3$ $(SOL: x\approx 80{,}505)$

k. $\log_8(2x+3)-\log_8(x+5)-\log_8 x=0$ $(SOL: x\approx 0{,}791)$

l. $2\cdot\log(x+1)-\log(x+16)+\log x=0$ $(SOL: x=2)$

6. Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos (bipartición) con más o menos rapidez. Supongamos que las condiciones de un cultivo A son tales que el número de amebas se duplica, aproximadamente, cada hora y que, al principio, hay tres amebas.

a) Expresa el número de amebas N en función del tiempo t en horas. Representa la función.

b) ¿Cuántas amebas hay a las 10 horas y media?

c) ¿Cuándo habrá un millón de amebas?

d) Tenemos otro cultivo B en el que el número de amebas se reduce en una tercera parte cada hora, siendo el número inicial de amebas de 56000. ¿Cuánto tardarán en igualarse el número de amebas de cada cultivo? . Hacer la gráfica de ambas conjuntamente.

7. Una población A de ratas se triplica **cada dos años**. Sabemos que actualmente tiene 2 individuos. Se pide:

   a) Expresar el número de ratas N en función del tiempo t. Representa la función.
   b) ¿Cuántas ratas habrá en 17 años?
   c) ¿Cuánto tiempo tendrá que transcurrir para que haya 10 000 ratas?
   d) Otra población B de ratas se triplica cada año, partiendo de un número inicial de 7. Averiguar cuánto tardará en haber 1700 ratas entre ambas poblaciones.

8. Una población de insectos comienza con 1200 individuos. El número total de individuos decrece exponencialmente según el modelo:

$$N(t) = Ce^{kt}$$

donde N es el número de individuos en función del tiempo t medido en días. Se sabe que a los 5 días hay 800 insectos. Se pide:

a) Determinar la función N.
b) Representarla graficamente.
c) ¿Cuál será la población después de 10 días?
d) ¿Cuánto tiempo tardará en reducirse a 300 insectos?
e) Otra población evoluciona según la fórmula: $n(t) = 2^{t+3}$. Representa ambas gráficas conjuntamente. Indica para que valores del tiempo la segunda población es superior en tamaño z la primera.