UNIDAD 4. FUNCIONES. LÍMITES Y CONTINUIDAD.

LECCIÓN 1. FUNCIONES.

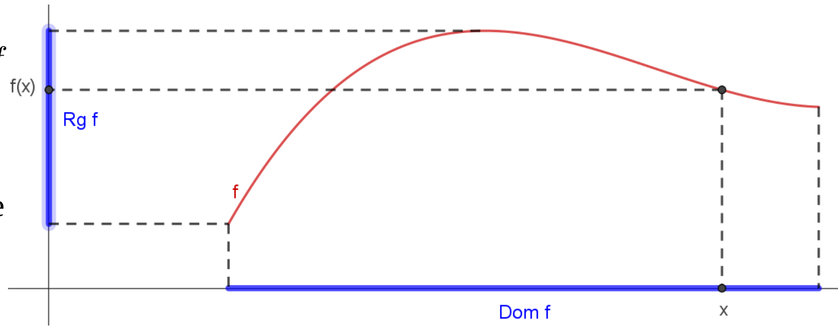
<u>FUNCIÓN:</u> Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, una función f real de variable real de dominio A es una correspondencia que **asocia a cada** $x \in A$ **un único número real** $f(x)$**.** La función f se representa de la siguiente manera:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

El **dominio** de f es el conjunto de números reales donde está definida la función. Se denota por $Dom f$.

En la función de arriba $Dom f = A$.

El **rango** (codominio,imagen) de f es el conjunto de valores que alcanza f cuando la evaluamos en todos los puntos del dominio.



$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} : \exists\, f(x)\} \qquad \text{Rg f} = \{\ \text{f(x)} \in \mathbb{R} : x \in \text{Dom } f\}$$

Si $y = f(x)$ entonces decimos que: $\begin{cases} \textit{y es la imagen de x por f} \\ \textit{x es la anteimagen de y por f} \end{cases}$

EJEMPLO 1: *mirando la función de la derecha tenemos:*

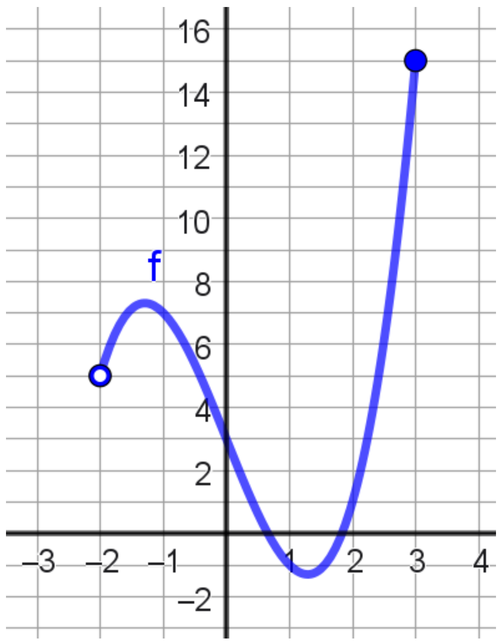
Viendo la imagen es evidente que:

$$\text{Dom } f = (-2, 3] \qquad \text{Rg } f \approx [-1.3, 15]$$

Imagen de 1=> $f(1) = -1$
Imagen de 3=> $f(3) = 15$
Imagen de 4=> No tiene, ya que 4 está fuera del dominio de f.
Imagen de -2 => No tiene, ya que -2 está fuera del dominio de f.

Anteimagen de 1 => Hay dos anteimágenes, una de ellas es $x = 2$ *y la otra es* $x \approx 0,41$ *.*

Anteimagen de -2 => No tiene, ya que -2 está fuera del rango de f .



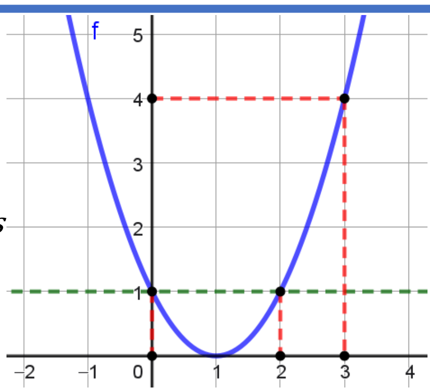
EJEMPLO 2:
a) Calcular la imagen de 3 y la anteimagen de 1 por la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ *. Representar graficamente la situación.*
b) Calcular la imagen de 1 y la anteimagen de 3 por la función $f(x) = 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ *.*

---

a) La imagen de 2 es: $f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 4$
La anteimagen de 1 se obtiene resolviendo la ecuación:

$$f(x) = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

cuyas soluciones son 0 *y* 2 *. Por lo tanto,* 0 *y* 2 *son las anteimágenes de 1, ya que* $f(0) = 1$ *y* $f(2) = 1$ *.*



b) La imagen de 1 es: $f(1) = 2\sqrt{1+1} - \sqrt{1} = 2\sqrt{2} - 1 \approx 1,83$

La anteimagen de 3 se obtiene resolviendo la *<u>ecuación irracional</u>*

$$f(x) = 3 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 3$$

Primero se despeja una de las raíces y elevamos al cuadrado:

$$2\sqrt{x+1} = 3 + \sqrt{x} \Rightarrow \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(3+\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow 4(x+1) = 9 + 6\sqrt{x} + x$$

A continuación se repite el proceso con la otra raíz. Es decir, despejar la raíz y elevar al cuadrado:

$$4x + 4 - x - 9 = 6\sqrt{x} \Rightarrow 3x - 5 = 6\sqrt{x} \Rightarrow (3x-5)^2 = \left(6\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow 9x^2 - 30x + 25 = 36x$$

Obteniendo una ecuación de segundo grado :

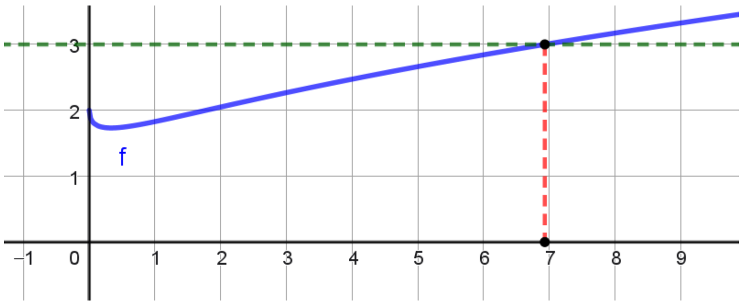
$$9x^2 - 66x + 25 = 0$$

que tiene como soluciones:

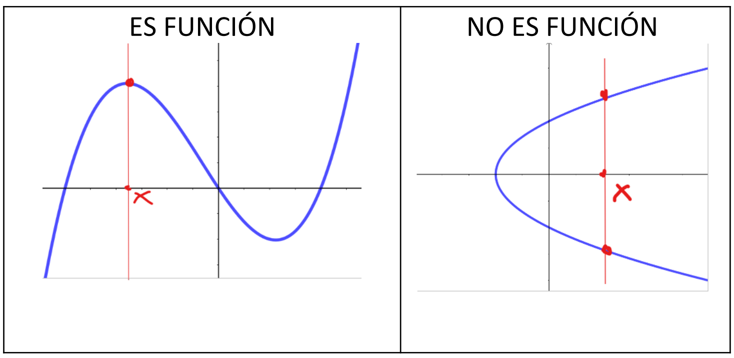
$$x_1 = \frac{11 + 4\sqrt{6}}{3} \approx 6{,}93 \qquad x_2 = \frac{11 - 4\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}40$$

Como es una ecuación irracional hay que comprobar las soluciones. La primera es válida y la segunda no. Luego 3 tiene una única anteimagen que es

$$x = \frac{11 + 4\sqrt{6}}{3} \approx 6{,}93$$



No todas las curvas del plano son funciones, solo las que <u>asocian a cada $x \in A$ un único número real</u> $y = f(x)$, o lo que es lo mismo, <u>las que tienen como mucho un punto de corte con cualquier recta vertical</u>.



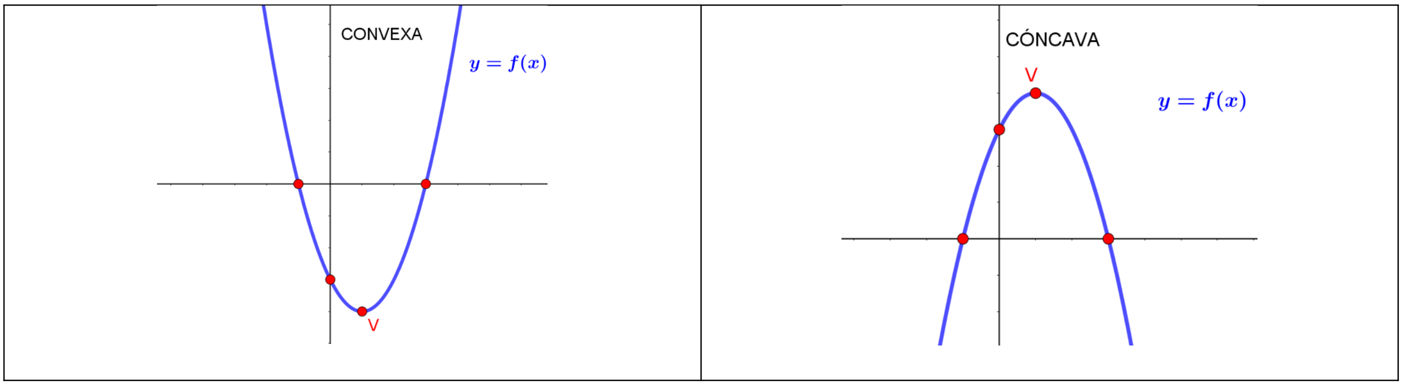
FUNCIONES IMPORTANTES

<u>FUNCIONES POLINÓMICAS:</u> funciones del tipo $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
$Dom f = \mathbb{R}$

EJEMPLO 3: $f(x) = x^3 - 7x + 1$. $Dom f = \mathbb{R}$

CASOS PARTICULARES:

1. <u>Función lineal:</u> $f(x) = ax + b$. Al representarla gráficamente se obtiene una recta.
2. <u>Función cuadrática:</u> $f(x) = ax^2 + bx + c$. Al representarla se obtiene una parábola. Para representar una parábola se representan los siguientes elementos:
    1. CONVEXIDAD $\cup$ (a>0) o CONCAVIDAD $\cap$ (a<0)
    2. Puntos de corte eje X (f(x)=0)
    3. Punto de corte eje Y (f(0))
    4. Vértice $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

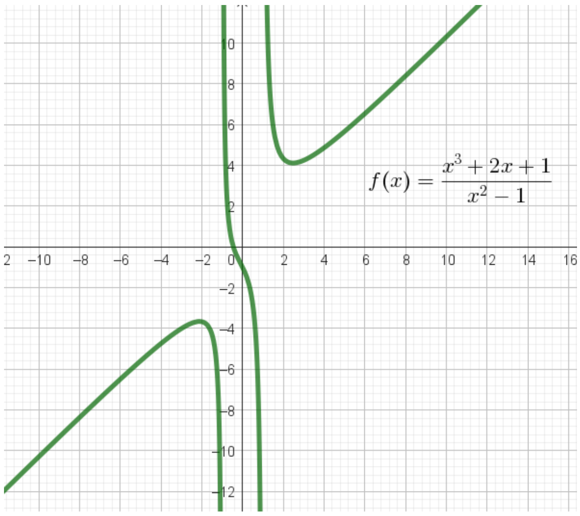


<u>FUNCIONES RACIONALES</u>: funciones del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. El domino se calcula quitándole a $\mathbb{R}$ las raíces de $Q(x)$. Es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$$



EJEMPLO 4: *Calcular el dominio de* $f(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

Se calculan las raíces del denominador:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$$

Por lo que $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

<u>FUNCIONES IRRACIONALES</u>: funciones de la forma

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

donde g e función polinómica o racional.

Si n es impar $Dom f = Dom g$ Si n es par $Dom f = \{x \in R : g(x) \geq 0\}$

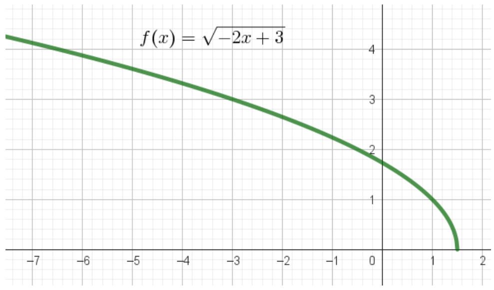
Es decir, si n es impar el dominio de g coincide con el de f. Si g es par el dominio de f se corresponde corresponde con las soluciones de la inecuación $g(x) \geq 0$

EJEMPLO 5 : *Calcular el dominio de*

$$a)\ f(x)=\sqrt{-2x+3} \qquad b)\ h(x)=\sqrt{x^2-4} \qquad c)\ g(x)=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x^2-5x+6}}$$

---

a) El dominio de f se obtiene resolviendo la *<u>inecuación lineal:</u>*



$$-2x+3\geq 0 \Rightarrow -2x\geq -3 \Rightarrow x\leq \frac{-3}{-2} \Rightarrow x\leq \frac{3}{2}$$

Se deduce entonces: $\quad \operatorname{Dom} f=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$

b) En este caso el dominio se obtiene resolviendo la siguiente <u>inecuación polinómica</u>:

$$x^2-4\geq 0$$

Para resolver una inecuación polinómica se siguen los siguiente pasos:

1) <u>Cálculo de las raíces del poliniomio</u>:

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow x=\pm 2$$

2) *<u>Estudio del signo</u>:*
Las raíces fraccionan la recta real en varios intervalos. Dentro de cada uno de esos intervalos el signo del polinomio es constante.

Escogiendo un valor dentro de cada intervalo y evaluando el polinomio se puede determinar que signo tiene el polinomio en dicho intervalo Esto se hace normalmente mediante el siguiente esquema:

		-2		2	
Signo x^2-4	+	0	-	0	+

El signo se ha decidido evaluado el polinomio en los siguientes puntos:

$$x=-3 \Rightarrow (-3)^2-4=5>0$$
$$x=0 \Rightarrow 0^2-4=-4<0$$
$$x=3 \Rightarrow 3^2-4>0$$

Tenemos entonces que el polinomio tendrá signo positivo en $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ *y negativo en* $(-2,2)$.

Se deduce entonces que: $\operatorname{Dom} h=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

c) Para determinar el dominio de g *debemos resolver la <u>inecuación racional</u>:*

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6}\geq 0$$

Para resolver una inecuación racional se siguen los siguientes pasos:

1) <u>Determinamos las raíces de numerador y denominador</u>:

$$N=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$D=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x_1=2 \quad x_2=3$$

2) <u>Estudio del signo</u>: Se estudia el signo de la función en los intervalos de signo constante determinados por las raíces del numerador y del denominador.

Signo $\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$

	1		2		3	
-	0	+	$\nexists f(2)$	-	$\nexists f(3)$	+

El signo se ha decidido evaluando la función racional en los siguientes puntos

$$x=0 \Rightarrow \frac{0-1}{0^2-5\cdot 0+6} =< 0$$
$$x=1,5 \Rightarrow \frac{1,5-1}{1,5^2-5\cdot 1,5+6} > 0$$
$$x=2,5 \Rightarrow \frac{2,5-1}{2,5^2-5\cdot 2,5+6} < 0$$
$$x=4 \Rightarrow \frac{4-1}{4^2-5\cdot 4+6} > 0$$

Por lo que se deduce que: $\mathrm{Dom}\, g = [0,2) \cup (3,\infty)$

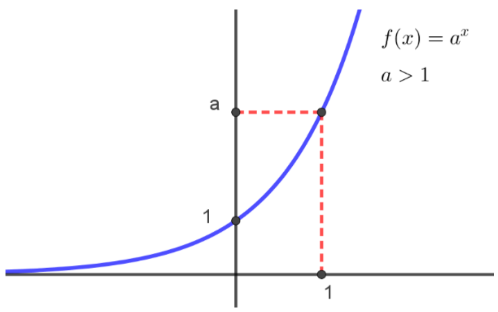
<u>FUNCIONES EXPONENCIALES</u>: funciones de la forma

$$f(x) = a^{g(x)} \qquad \text{con } a>0 \text{ y } a \neq 1.$$

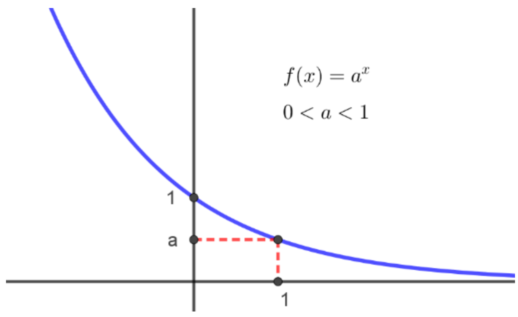
Se tiene que: $Dom f = Dom g$

La función $f(x)=a^x$ tiene $Dom f = \mathbb{R}$ y es :

Creciente si a>1



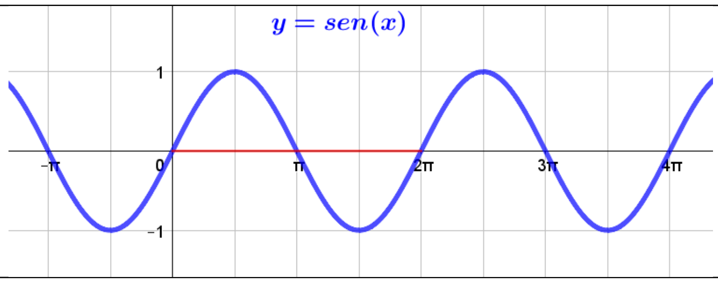
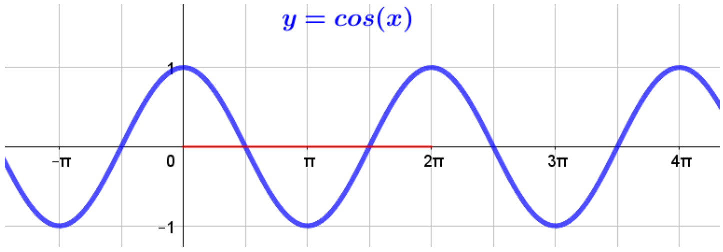
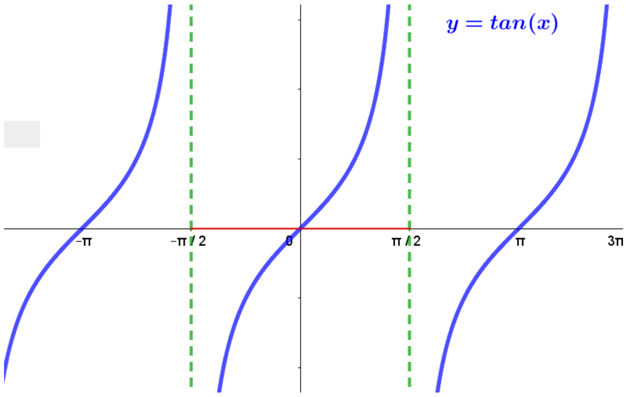
Decreciente si a<1



EJEMPLO 6: a) $f(x)=e^{2x+3}$ $Dom f = \mathbb{R}$ b) $g(x)=2^{\frac{x-2}{x-1}}$ $Dom g = \mathbb{R}-\{1\}$

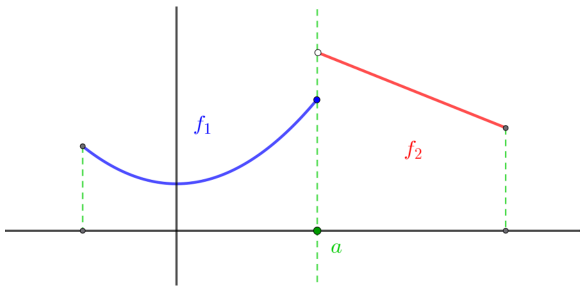
<u>FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS</u> (ARGUMENTO EN RADIANES):

las más conocidas son $sen\, x$, $\cos x$ y $\tan x = \dfrac{sen\, x}{\cos x}$

$f(x)=sen(x)$ $Dom\,f=R \qquad Rango=[-1,1]$ $Periodicidad=2\pi$ $(sen(x+2\pi)=sen(x))$	
$f(x)=\cos(x)$ $Dom\,f=R \qquad Rango=[-1,1]$ $Periodicidad=2\pi$ $(\cos(x+2\pi)=\cos(x))$	
$f(x)=\tan(x)$ $Dom\,f=R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in Z\right\}$ $Rango=R$ $Periodicidad=\pi$ $(\tan(x+\pi)=\tan(x))$	

<u>FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS</u>:

Una función definida a trozos es una función en la que la expresión que determina la imagen de un valor del dominio varia.
Normalmente se expresan de la siguiente forma:



$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq a \\ f_2(x), & a < x \end{cases}$$

El punto a donde cambia la definición de la función es muy importante y en el aparecen problemas que tienen que ver con los conceptos de continuidad y la derivabilidad que se estudiaran en lecciones posteriores.

El dominio de estás funciones dependerá del dominio de las funciones involucradas.

EJEMPLO 7: a) $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 1 \\ -2x+1, & 1 < x \end{cases} \qquad Dom f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & x < 5 \\ -2x+1, & 5 < x \leq 8 \end{cases} \qquad Dom f = (-\infty, 8] - \{3, 5\}$

<u>VALOR ABSOLUTO</u>:

El valor absoluto de una función se define como:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

El dominio del valor absoluto de una función coincide con el dominio de la función: $Dom\,|f| = Dom f$

APLICACIÓN DE GEOGEBRA PARA LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES:

La siguiente aplicación servirá para representar funciones con el ordenador:

EJERCICIOS

1. Determina el dominio de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$ c) $k(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$

d) $m(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-5x+4}$ e) $p(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^3-9x}$ f) $q(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^4-5x^2+4}$.

SOL: a) R - {3}; b) R - {-3, 2}; c) R - {1, 3}; d) R - {-2, 1, 4}; e) R - {-3, 0, 3}; f) R - {-2, -1, 1, 2}.

2. Determina el dominio de la siguientes funciones irracionales:

a) $f(x) = \sqrt{-x+8}$ b) $g(x) = \sqrt[4]{-2x+3}$ c) $h(x) = \sqrt[6]{5x+1}$

d) $k(x) = \sqrt{x^2+4x+3}$ e) $m(x) = \sqrt[4]{x^2-5x+6}$ f) $p(x) = \sqrt[6]{9-x^2}$

g) $q(x) = \sqrt{x^3+2}$ h) $r(x) = \sqrt[4]{3x^3+4x^2-13x+6}$ i) $s(x) = \sqrt[6]{2x^3+2x+6x^2+6}$

j) $t(x) = \sqrt{x^4-4x^3+3x^2+4x-4}$ k) $u(x) = \sqrt[8]{2x^4-12x^3+20x^2-12x+18}$

SOL: a) (-∞, 8]; b) (-∞, 3/2]; c) [-1/5, ∞); d) (-∞, -3] ∪ [-1, ∞); e) (-∞, 2] ∪ [3, ∞); f) [-3, 3]; g) [$-\sqrt[3]{2}$, ∞); h) (-∞, -1] ∪ [1/3, ∞); i) [-3,∞); j) (-∞, -2] ∪ [-1, 2] ∪ [4, ∞); k) R.

3. Determina el dominio de la siguientes funciones irracionales:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+3x}{x-2}}$ b) $g(x) = \sqrt[4]{\dfrac{2x+3}{-x+1}}$ c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-x}{x^3+4x}}$

d) $k(x) = \sqrt{\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x+1}}$ e) $m(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^2-4}}$ f) $p(x) = \sqrt{\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-x}}$

g) $q(x) = \sqrt[6]{\dfrac{x^2+5x+6}{x^3-3x}}$ h) $r(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^2+2x}}$ i) $s(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^4+2x^3-3x^2}{x+1}}$

SOL: a) [-3, 0] ∪ [2, ∞) ; b) [-3/2, 1); c) (-∞, -1] ∪ [1, ∞); d) (-1, 1) ∪ (2, ∞); e) (-∞, -2] ∪ [3, ∞); f) (-∞, 0) ∪ (1, ∞); g) (-3, -2] ∪ [-√3,0) ∪, (√3, ∞); h) (-∞, -3] ∪ [0, ∞); i) [-3,-1)∪{0}∪[1,∞).

4. Dado un rectángulo de perímetro 8 m se pide:a) Determinar la función A(x) que nos da su área A en función de su base x.b) Determinar su dominio.

5. Dado un rectángulo de diagonal 10 cm se pide:a) Determinar la función A(x) que nos da su área A en función de su base x.b) Determinar su dominio. c) Calcular el área del rectángulo de base 5 d) ¿Qué

rectángulo tiene área 30 cm² e) Dibuja la gráfica usando Geogebra ¿Cuál es el área máxima?¿Cuál es el recorrido de la función?

6. Una farola tiene 7 m de altura. En su base hay una persona de 1,80 m de altura que empieza a andar en línea recta, alejándose de la farola a una velocidad de 2 m/s. Al cabo de 10 segundos, ¿cuál será la longitud de su sombra? Halla una función que exprese la longitud de la sombra en función del tiempo, t, que se camina. Determina su dominio.

7. Una empresa que fabrica dispositivos electrónicos tiene un coste de producción dado por la función:

$$C(x) = \sqrt{5x + 20},$$

donde x es la cantidad de dispositivos fabricados en miles de unidades y $C(x)$ es el **coste total en millones de euros**. . Los ingresos obtenidos vienen dados por la función:

$$I(x) = 3\sqrt{x + 1},$$

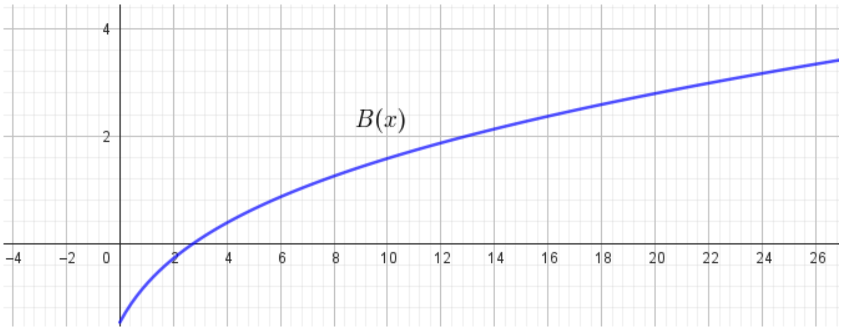
donde x es la cantidad de dispositivos vendidos en miles de unidades e $I(x)$ son los **ingresos totales en millones de euros**.

a) Determinar el **dominio matemático** de las funciones $C(x)$ e $I(x)$.

b) ¿Cuál crees que es su dominio en el contexto del problema? (Esto se conoce como d**ominio contextual**)

c) ¿Como será la función $B(x)$ de **beneficios** ? ¿Qué ganancias se obtendrán al vender 3 750 productos? ¿Y 40 millones?

d) ¿En que momento exacto la empresa comienza a dar beneficios?



e) Se considera que la empresa será rentable a partir de 2 000 000 euros de ganancia. Determina cuando empezará a ser rentable.