EXAMEN 4º BACH A

IES ILLA DE TAMBO **Examen matemáticas 1º bachillerato**

Nombre y apellidos: **Fecha:** ___/__/____

Instrucciones:

- El examen se entregará en cuanto el profesor lo pida. En caso contrario el examen contará como no entregado y será calificado con un 0.
- No se puede salir de clase aún habiendo terminado el examen. El alumno esperará sentado hasta que el profesor abandone la clase.
- Queda prohibido el uso de típex y lápiz.
- Se permite el uso de calculadoras sin capacidad gráfica.
- Deberá justificarse la resolución de cada uno de los ejercicios. En caso contrario no se valorará el apartado.
- Una vez resuelto el ejercicio, hay que redactar correctamente la solución. En caso contrario no se valorará completamente el apartado.
- Hay que entregar todos los folios, también los que están en "sucio".

Ejercicios	1	2	3 a)	3 b)	4 a)	4 b)	5	TOTAL	NOTA
Puntos	2	1,25	0,5	2	1,75	1	1,5	10	10
Nota									

1. Sabiendo que $sen\,\alpha = -3/5$ y que $270^o \leq \alpha \leq 360$, se pide determinar de manera exacta el valor de las siguientes razones trigonométricas. No puedes usar la calculadora y debes usar las fórmulas trigonométricas:

(1)

(0,75)

a) $sen(\alpha + 45^o) = sen\alpha \cos 45^o + \cos\alpha\, sen 45^o = \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-3\sqrt{2}}{10} + \frac{4\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

CÁLCULO DE $\cos\alpha$

$\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \rightarrow \cos^2\alpha + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \rightarrow \cos^2\alpha + \frac{9}{25} = 1 \rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$

$\rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \rightarrow \cos\alpha = \oplus\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ (0,8)

(0,75)

Como α está en el 4º cuadrante, $\cos\alpha$ es positivo

(1)

(0,75) (0,75)

b) $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$

SIGNO DE $\cos\frac{\alpha}{2}$

(0,5)

$270^o \leq \alpha \leq 360^o \rightarrow \frac{270^o}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{360^o}{2} \rightarrow 135^o \leq \frac{\alpha}{2} \leq 180^o$

Como $\frac{\alpha}{2}$ está en el 2º cuadrante, $\cos\frac{\alpha}{2}$ es negativo

2. Tres semáforos A, B y C están alineados en este orden. Se sabe que la distancia entre A y C es 5 veces más grande que la distancia entre B y C. Conociendo las coordenadas de B=(4,5) y C=(10,7), determina las coordenadas del punto A.

• PLANTEAMIENTO : 0,75
• CÁLCULO : 0,25

$\boxed{\vec{AC} = 5\vec{BC}}$

$\vec{BC} = C - B = (10,7) - (4,5) = (6,2)$

$\vec{AC} = 5\vec{BC}$

$C - A = 5\vec{BC} \rightarrow A = C - 5\vec{BC} = (10,7) - 5(6,2) = (10,7) + (-30,-10) = (-20,-3)$

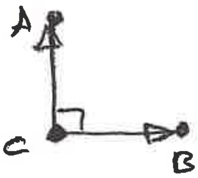
$\boxed{A = (-20,-3)}$

3. En un plano coordenado, se encuentran las coordenadas de los tres postes que determinan una finca triangular

$$A = (k, 5) \qquad B = (2, 3) \qquad C = (7, 4)$$

Determina cuánto tiene que valer k para que:

a) La finca forme un ángulo recto en el vértice C.



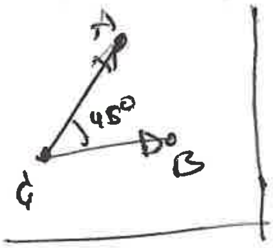
$\vec{CA} \perp \vec{CB} \Leftrightarrow \boxed{\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0} \rightarrow$ 0,25

$\begin{cases} \vec{CA} = A - C = (k,5) - (7,4) = (k-7,1) \\ \vec{CB} = B - C = (2,3) - (7,4) = (-5,-1) \end{cases}$

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (k-7,1) \cdot (-5,-1) = (k-7) \cdot (-5) + 1 \cdot (-1) = -5k + 35 - 1 = -5k + 34$

$-5k + 34 = 0 \rightarrow -5k = -34 \rightarrow k = \frac{-34}{-5} = \boxed{\frac{34}{5}}$ (0,5)

b) Forme un ángulo de 45° en el vértice C .



$\cos 45° = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}|\,|\vec{CB}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(k-7,1) \cdot (-5,-1)}{|(k-7,1)|\;|(-5,-1)|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-5k+34}{\sqrt{(k-7)^2+1^2}\,\sqrt{25+1}}$ (0,5) 0,75

(0,25)

$\Rightarrow \frac{-5k+34}{\sqrt{k^2-14k+50}\,\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overset{()^2}{\Rightarrow} \left(\frac{-5k+34}{\sqrt{k^2-14k+50}\,\sqrt{26}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

1,25

$\Rightarrow \frac{(-5k+34)^2}{\left(\sqrt{k^2-14k+50}\,\sqrt{26}\right)^2} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{25k^2 - 340k + 1156}{(k^2-14k+50)\,26} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

1,5

$\Rightarrow 50k^2 - 680k + 2312 = 26k^2 - 364k + 1300 \rightarrow 24k^2 - 316k + 1012 = 0 \begin{cases} k_1 = \frac{23}{3} \\ k_2 = \frac{11}{2} \end{cases}$ 1,75

COMPROBACIÓN $k_1 = \frac{23}{3}$ FALSA $\qquad k_2 = \frac{11}{2}$ CORRECTA

SOLUCIÓN: $\boxed{k = \frac{11}{2}}$ 2

4. Dos barcos salen simultáneamente de dos puertos situados en una costa recta. Los puertos están separados entre sí **24 km**. Supondremos que la costa coincide con el eje X y que el mar queda por encima de la costa en el dibujo.

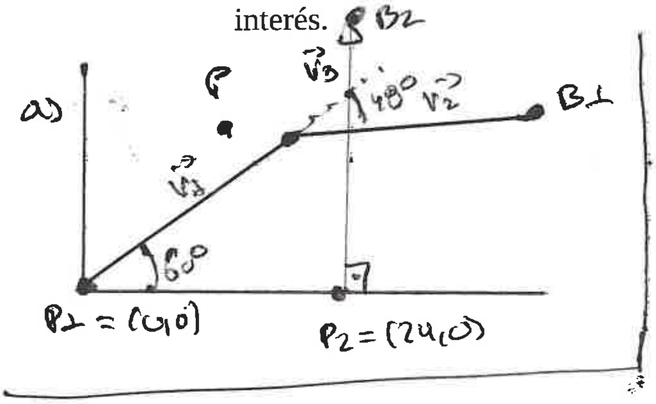
- El **barco A** parte del puerto $P_1 = (0, 0)$ situado más a la izquierda y navega en línea recta formando un ángulo de 60°con la costa, a una velocidad constante de 12 km/h. Transcurridas **2 horas** cambia su rumbo realizando un giro de 40° en sentido horario (mantiene la velocidad y continúa moviéndose en línea recta).
- El **barco B** parte al mismo tiempo del puerto P_2 situado más a la derecha y navega siempre en línea recta formando un ángulo perpendicular a la costa, a una velocidad constante de 8 km/h.

Pasadas 3 horas y media ambos barcos reciben la noticia de que se ha producido un naufragio en el punto $P = (10, 20)$.

Se pide:

a) Determinar razonadamente cuál de los dos barcos se encuentra más cerca para socorrer al barco naufragado.

b) Representar en unos ejes coordenados la situación gráficamente marcando todos los puntos de interés.



$\boxed{B_1 = P_1 + \vec{v_1} + \vec{v_2}}$ (0,25)

$\vec{v_1} = (r\cos\alpha, r\,\text{sen}\,\alpha) = (24\cos 60°, 24\,\text{sen}\,60°) \simeq (12, 20'78)$ (0,5)

$\begin{cases} r = 12\ \frac{Km}{h} \cdot 2h = 24\ Km \\ \alpha = 60° \end{cases}$

$\vec{v_2} = (r\cos\alpha, r\,\text{sen}\,\alpha) = (18\cos 20°, 18\,\text{sen}\,20°) \simeq (16'91, 6'16)$ (0,75)

$\begin{cases} r = 12\ \frac{Km}{h} \cdot 1{,}5h = 18\ Km \\ \alpha = 60° - 40° = 20° \end{cases}$

$B_1 = P_1 + \vec{v_1} + \vec{v_2} = (0,0) + (12, 20'78) + (16'91, 6'16) \simeq (28'91, 26'94)$ (1)

$\boxed{B_2 = P_2 + \vec{r_3}} = (24,0) + (0,28) = (24,28)$ (1,25)

$d(P, B_1) = \sqrt{(10-28{,}91)^2 + (20-26{,}94)^2} \simeq 20{,}14\ Km$ (1,5)

$d(P, B_2) = \sqrt{(10-24)^2 + (20-28)^2} \simeq 16{,}12\ Km$ (1,75)

Se encuentra más cerca el barco B.

5. Dadas las rectas

$$r:\ 2x - y + 1 = 0, \qquad s:\ y = -3x + 4,$$

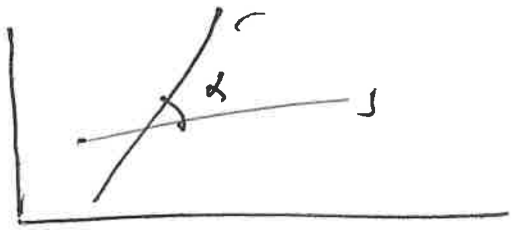
(0,75) a) Determina su posición relativa.

(0,75) b) En caso de ser secantes, determina el ángulo que forman. En caso de ser paralelas, represéntalas gráficamente.

a) $\begin{cases} r:\ 2x - y + 1 = 0 \\ s:\ 3x + y - 4 = 0 \end{cases}$ $\quad \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow$ Son secantes

PLANTE: 0,25
CONCLUSIÓN: 0,75

b) $\vec{v_r} = (1,2)$ $\quad \vec{v_s} = (1,-3)$ 0,5



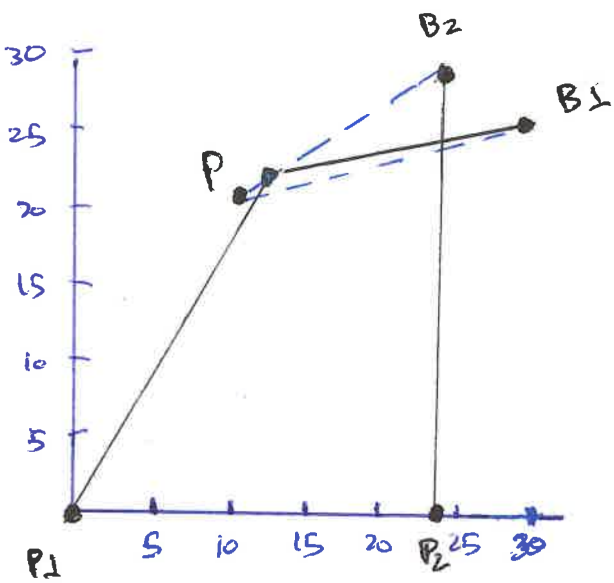
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|\,|\vec{v_s}|} = \frac{|(1,2)\cdot(1,-3)|}{|(1,2)|\,|(1,-3)|} = \frac{|1-6|}{\sqrt{1+4}\sqrt{1+9}}$$ 0,25

$$= \frac{|-5|}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right) \simeq 45^\circ$$ 0,75

4

b)



$P_1 = (0,0)$

$P_2 = (24,0)$

$B_1 \simeq (28'95, 26'94)$

$B_2 \simeq (24, 28$

$P_1 + \vec{v_1} = (12, 20'78)$

IES ILLA DE TAMBO EXAMEN 1º BACH B **Examen matemáticas 1º bachillerato**

Nombre y apellidos: **Fecha:** ___/__ /____

Instrucciones:

- El examen se entregará en cuanto el profesor lo pida. En caso contrario el examen contará como no entregado y será calificado con un 0.
- No se puede salir de clase aún habiendo terminado el examen. El alumno esperará sentado hasta que el profesor abandone la clase.
- Queda prohibido el uso de típex y lápiz.
- Se permite el uso de calculadoras sin capacidad gráfica.
- Deberá justificarse la resolución de cada uno de los ejercicios. En caso contrario no se valorará el apartado.
- Una vez resuelto, el ejercicio hay que redactar correctamente la solución. En caso contrario no se valorará completamente el apartado.
- Hay que entregar todos los folios, también los que están en "sucio".

Ejercicios	1	2	3 a)	3 b)	4 a)	4 b)	5	TOTAL	NOTA
Puntos	2	1,25	0,5	2	1,75	1	1,5	10	10
Nota									

1. Sabiendo que $sen\,\alpha = -2/5$ y que $180^o \leq \alpha \leq 270^o$, se pide determinar de manera exacta el valor de las siguientes razones trigonométricas. No puedes usar la calculadora y debes usar las fórmulas trigonométricas:

a) $cos(\alpha - 45^o) = \cos\alpha \cos 45^o + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} 45^o = \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{42}}{10} + \frac{-2\sqrt{2}}{10} = \boxed{\frac{-\sqrt{42}-2\sqrt{2}}{10}}$ (0,25) (1)

CÁLCULO DE $\cos\alpha$

$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \to \cos^2\alpha + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = 1 \to \cos^2\alpha + \frac{4}{25} = 1 \to \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{25}$

$\to \cos^2\alpha = \frac{21}{25} \to \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ (0,5)

Como α está en el 3º cuadrante (0,75) $\cos\alpha$ es negativo

b) $sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{21}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{5+\sqrt{21}}{5}}{2}} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{10}}}$ (0,25) (0,75) (1)

SIGNO DE $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$

$180^o \leq \alpha \leq 270^o \to \frac{180^o}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{270^o}{2} \to 90^o \leq \frac{\alpha}{2} \leq 135^o$ (0,5)

Como $\frac{\alpha}{2}$ está en el 2º cuadrante, entonces $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ es positivo

2. En una calle hay 5 farolas F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5 alineadas y ordenadas en este mismo orden. Se sabe que la distancia entre farolas consecutivas es siempre la misma. Conociendo las coordenadas de $F_2 = (3,2)$ y $F_4 = (7,4)$ determinar las coordenadas de F_1. *(ADVERTENCIA: no se puede resolver por representación gráfica, hay que hacer cálculos)*

• PLANTEAMIENTO 0,75
• CÁLCULO 1,25

$\vec{F_2F_4} = F_4 - F_2 = (7,4) - (3,2) = (4,2)$

$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{F_2F_4} = \frac{1}{2}(4,2) = (2,1)$

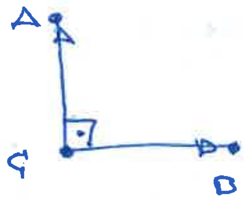
$F_1 = F_2 - \vec{v} = (3,2) - (2,1) = \boxed{(1,1)}$

3. En un plano coordenado se encuentran las coordenadas (en km) de los tres postes que determinan un terreno triangular

$$A = (k,2) \qquad B = (0,3) \qquad C = (1,4)$$

Determina cuánto tiene que valer k para que :

a) La finca forme un ángulo recto en el vértice C.



$\vec{CA} \perp \vec{CB} \Leftrightarrow \boxed{\vec{CA}\cdot\vec{CB} = 0}$ (0,25)

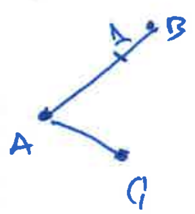
$\vec{CA} = A - C = (k,2) - (1,4) = (k-1,-2)$

$\vec{CB} = B - C = (0,3) - (1,4) = (-1,-1)$

$\vec{CA}\cdot\vec{CB} = (k-1,-2)\cdot(-1,-1) = (k-1)(-1) + (-2)\cdot(-1) = -k+1+2$

$= 3-k \qquad 3-k=0 \Rightarrow \boxed{k=3}$ (0,5)

b) La distancia del poste A al poste B sea 1 km menor que la de distancia de A a C.



$\boxed{d(A,B) = d(A,C) - 1}$ (0,25)

$d(A,B) = \sqrt{(0-k)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{k^2+1}$

$d(A,C) = \sqrt{(1-k)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1-2k+k^2+4} = \sqrt{k^2-2k+5}$

(0,5) (0,75)

$\sqrt{k^2+1} = \sqrt{k^2-2k+5} - 1 \Rightarrow (\sqrt{k^2+1})^2 = (\sqrt{k^2-2k+5} - 1)^2 \Rightarrow \cancel{k^2}+1 = \cancel{k^2}-2k+5 - 2\sqrt{k^2-2k+5} + 1 \Rightarrow 1+2k-5-1 = -2\sqrt{k^2-2k+5} \Rightarrow 2k-5 = -2\sqrt{k^2-2k+5}$

(1,25) (1,5)

$\Rightarrow (2k-5)^2 = (-2\sqrt{k^2-2k+5})^2 \Rightarrow 4k^2-20k+25 = 4(k^2-2k+5) \Rightarrow$

(1,75) (2)

$\cancel{4k^2}-20k+25 = \cancel{4k^2}-8k+20 \Rightarrow -20k+8k = 20-25 \Rightarrow -12k = -5 \Rightarrow k = \frac{5}{12}$

COMPROBACIÓN ✓

4. Un barco parte del punto O=(0,0) situado en la costa, representada por la recta y=0, y navega con un rumbo de 60° con respecto a la línea de costa, a una velocidad constante de 12 km/h.

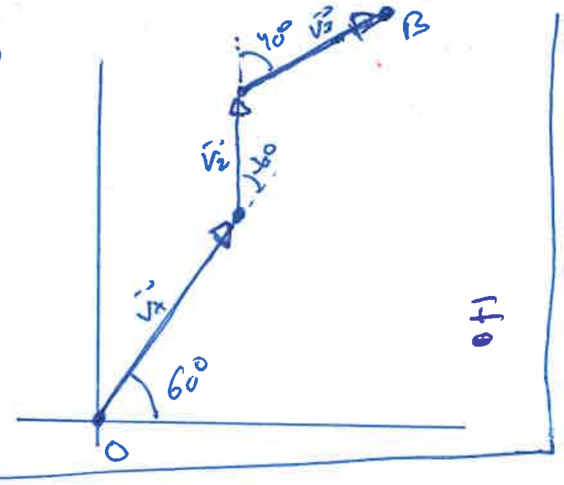
- A las 2 horas realiza un giro de 30° en sentido antihorario, manteniendo la misma velocidad.
- A las 3.5 horas realiza un nuevo giro de 40° en sentido horario, manteniendo la misma velocidad.
- A las 4 horas sufre una avería y la tripulación debe abandonar el barco en bote.

La isla más cercana está en el punto $I = (30, 5)$

a) Determina, en el momento del naufragio, si el barco está más cerca de la isla o de la línea de costa para decidir hacia dónde debe dirigirse la tripulación.

b) Representa gráficamente la situación con unos ejes coordenados y marcando todos los puntos de interés así como las posibles rutas de escape.

a)



$B = O + \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}$ (6,25)

$\vec{v_1} = (r\cos\alpha, r\,\text{sen}\,\alpha) = (24\cos 60°, 24\,\text{sen}\,60°) \simeq (12, 20'78)$

$\begin{cases} r = 12\ \frac{km}{h} \cdot 2h = 24\ km \\ \alpha = 60° \end{cases}$ (0,5)

$\vec{v_2} = (r\cos\alpha, r\,\text{sen}\,\alpha) = (18\cos 90°, 18\,\text{sen}\,90°) = (0, 18)$

$\begin{cases} r = 12\ \frac{km}{h} \cdot 1{,}5\ h = 18\ km \\ \alpha = 60° + 30° = 90° \end{cases}$ (0,75)

$\vec{v_3} = (r\cos\alpha, r\,\text{sen}\,\alpha) = (6\cos 50°, 6\,\text{sen}\,50°) \simeq (3'86, 4'60)$

$\begin{cases} r = 12\ \frac{km}{h} \cdot 0{,}5\ h = 6\ h \\ \alpha = 90° - 40° = 50° \end{cases}$ (1)

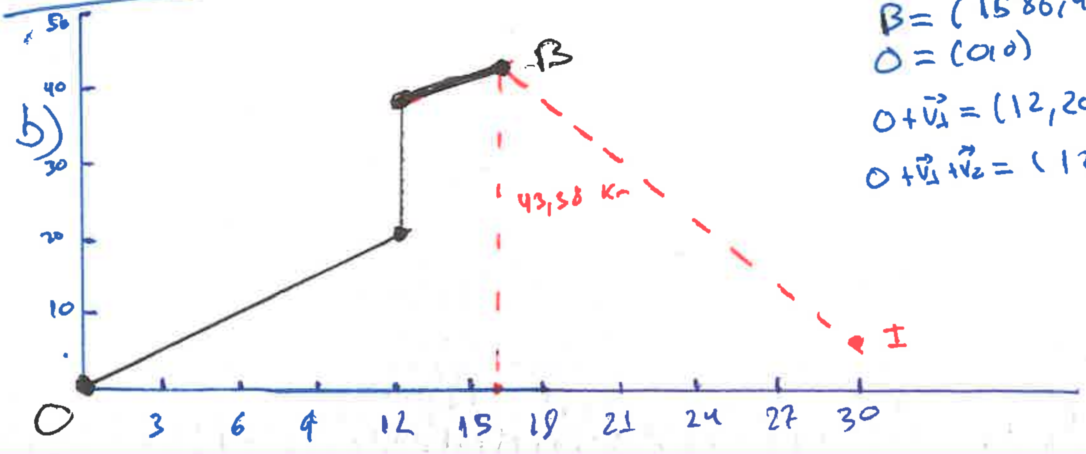
$B = O + \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} = (0,0) + (12, 20'78) + (0, 18) + (3'86, 4'60) \simeq (15'86, 43'38)$ (1,25)

$d(B, I) = \sqrt{(30 - 15'86)^2 + (5 - 43'38)^2} \simeq 40{,}90$ Km (1,5)

Distancia de $B = (15'86, 43'38)$ a la costa es 43,38 Km (1,75)

RESPUESTA: Está más cerca de la isla I

b)



$B = (15'86, 43'38)$
$O = (0, 0)$
$O + \vec{v_1} = (12, 20'78)$
$O + \vec{v_1} + \vec{v_2} = (12, 38'78)$

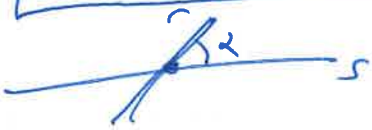
5. Dadas las rectas

$$r:\ 2x - y + 1 = 0, \qquad s:\ y = -3x + 4,$$

(0,75) a) Determina su posición relativa.

(0,75) b)Determina el ángulo que forman.

a) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 3x + y - 4 = 0 \end{cases}$ $\quad \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Rectas secantes}}$



Planteamiento : 0,25
CONCLUSIÓN : 0,75

b) $\vec{v_r} = (1,2)$

$\vec{v_s} = (1,-3)$

(0,25)

(0,5)

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|\,|\vec{v_s}|} = \frac{|(1,2)\cdot(1,-3)|}{|(1,2)|\,|(1,-3)|} = \frac{|1-6|}{\sqrt{1+4}\,\sqrt{1+9}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}\,\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right) = \boxed{45^\circ}$$

(0,75)