

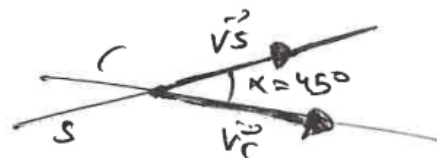
2. Hallar el valor de  $a$  para que las rectas  $r: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=2\lambda \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2+a\lambda \end{cases}$  formen un ángulo de  $45^\circ$ .

$$r: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=2\lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2+a\lambda \end{cases}$$

$$\vec{v}_r = (-1, 2)$$

$$\vec{v}_s = (2, a)$$



$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_s|}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{|(-1, 2) \cdot (2, a)|}{|(-1, 2)| |(2, a)|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-2+2a|}{\sqrt{1+4} \sqrt{4+a^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-2+2a|}{\sqrt{5} \sqrt{4+a^2}}$$

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-2+2a}{\sqrt{5} \sqrt{4+a^2}} \Rightarrow \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \left( \frac{-2+2a}{\sqrt{5} \sqrt{4+a^2}} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{4} = \frac{(-2+2a)^2}{(\sqrt{5})^2 (\sqrt{4+a^2})^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4-8a+4a^2}{5 \cdot (4+a^2)} \Rightarrow 5(4+a^2) = 2(4-8a+4a^2)$$

$$\Rightarrow 20 + 5a^2 = 8 - 16a + 8a^2 \Rightarrow 5a^2 + 16a - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-3a^2 + 16a + 12 = 0} \quad \begin{cases} a_1 = 6 & \checkmark \text{ V} \angle \text{FDA} \\ a_2 = -\frac{2}{3} & \checkmark \text{ V} \angle \text{FDA} \end{cases}$$

COMPROBACIÓN

$$\bullet a=6 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-2+2 \cdot 6|}{\sqrt{5} \sqrt{4+6^2}} \quad \checkmark$$

$$\bullet a=-\frac{2}{3} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-2+2 \cdot (-\frac{2}{3})|}{\sqrt{5} \sqrt{4+(-\frac{2}{3})^2}} \quad \checkmark$$

### OTRA FORMA

También se puede hacer usando la fórmula de la pendiente:

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$

A partir de los vectores directores de cada recta:

$$\vec{v}_r = (-1, 2) \quad \vec{v}_s = (2, a)$$

Se calculan las pendientes de cada recta:

$$m_r = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{-1} = -2 \quad m_s = \frac{v_2}{v_1} = \frac{a}{2}$$

La ecuación queda

$$\tan 45^\circ = \left| \frac{-2 - \frac{a}{2}}{1 + (-2) \cdot \frac{a}{2}} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{-\frac{4}{2} - \frac{a}{2}}{1 - \frac{2a}{2}} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{-\frac{4-a}{2}}{1-a} \right|$$

$$\Rightarrow 1 = \left| \frac{-4-a}{2(1-a)} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{-4-a}{2-2a} \right| \Rightarrow \frac{-4-a}{2-2a} = \pm 1$$

**CASO +**

$$\frac{-4-a}{2-2a} = 1 \Rightarrow -4-a = 2-2a \Rightarrow -a+2a = 2+4 \Rightarrow \boxed{a=6}$$

**CASO -**

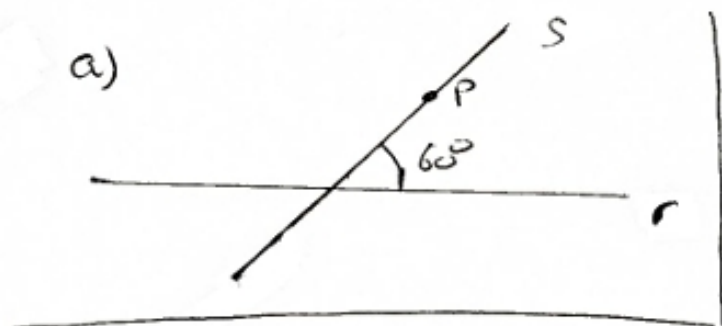
$$\frac{-4-a}{2-2a} = -1 \Rightarrow -4-a = -2+2a \Rightarrow -a-2a = -2+4 \Rightarrow -3a = 2$$
$$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{2}{3}}$$

9. La alcaldía de un ciudad está planificando la construcción de dos avenidas que se intersecan:

- La avenida A está representada por la recta  $r : 4x - 3y + 6 = 0$ .
- La avenida B debe ser diseñada para pasar por el punto  $P(1, 2)$  y formar un ángulo de  $60^\circ$  con la avenida A.

Determina:

- La ecuación explícita de las posibles ubicaciones de la avenida B.
- Representa graficamente la situación.
- Verifica si alguna de las ubicaciones es perpendicular a la recta  $x + y - 4 = 0$ , que representa una calle transversal.



$$P = (1, 2)$$

$$r: 4x - 3y + 6 = 0$$

$$s: y = mx + n \quad \text{¿m, n?}$$

La pendiente de  $r$  se obtiene así:

$$\vec{n}_r = (4, -3) \Rightarrow \vec{v}_r = (3, 4) \Rightarrow m' = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4}{3}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| \Rightarrow \tan 60^\circ = \left| \frac{m - \frac{4}{3}}{1 + m \cdot \frac{4}{3}} \right| \Rightarrow \sqrt{3} = \left| \frac{\frac{3m - 4}{3}}{\frac{3 + 4m}{3}} \right| \Rightarrow$$

$$\sqrt{3} = \left| \frac{3m - 4}{3 + 4m} \right| \Rightarrow \sqrt{3} = \left| \frac{3m - 4}{3 + 4m} \right| \Rightarrow \frac{3m - 4}{3 + 4m} = \pm \sqrt{3}$$

**Caso +**  $\frac{3m - 4}{3 + 4m} = \sqrt{3} \Rightarrow 3m - 4 = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3}m \Rightarrow 3m - 4\sqrt{3}m = 3\sqrt{3} + 4$

$$\Rightarrow (3 - 4\sqrt{3})m = 3\sqrt{3} + 4 \Rightarrow m = \frac{3\sqrt{3} + 4}{3 - 4\sqrt{3}} \approx -2,34$$

**Caso -**  $\frac{3m - 4}{3 + 4m} = -\sqrt{3} \Rightarrow 3m - 4 = -3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}m \Rightarrow 3m + 4\sqrt{3}m = -3\sqrt{3} + 4$

$$\Rightarrow (3 + 4\sqrt{3})m = -3\sqrt{3} + 4 \Rightarrow m = \frac{-3\sqrt{3} + 4}{3 + 4\sqrt{3}} \approx -0,12$$

Hay 2 opciones para la recta  $S$ , una con pendiente  $m_1 = -2,34$  y otra con pendiente  $m_2 = -0,12$ .

Para calcular la ecuación explícita se va a usar la ecuación Punto-pendiente

$$S_1: y - 2 = -2,34(x - 1)$$

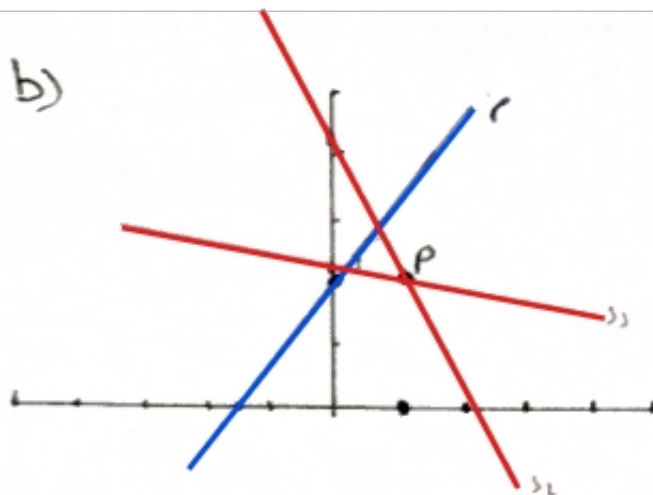
$$y = -2,34x + 2,34 + 2$$

$$\boxed{y = -2,34x + 4,34}$$

$$S_2: y - 2 = -0,12(x - 1)$$

$$y = -0,12x + 0,12 + 2$$

$$\boxed{y = -0,12x + 2,12}$$



$$r: 4x - 3y + 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -1,5 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$$

$$s_1: y = -2,34x + 4,34$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & 4,34 & 2 \end{array}$$

$$s_2: y = -0,12x + 2,12$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & 2,12 & 2 \end{array}$$

c)  $h: x + y - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_h = (1, 1) \Rightarrow \vec{v}_h = (1, -1) \Rightarrow m_h = \frac{v_{x2}}{v_{y2}} = \frac{-1}{1} = -1$

Veamos si  $S_1$  o  $S_2$  son perpendiculares a  $h$ .

$$m_h \cdot m_{S_1} = (-1) \cdot (-2,34) = 2,34 \neq -1 \Rightarrow h \nparallel S_1$$

$$m_h \cdot m_{S_2} = (-1) \cdot (-0,12) = 0,12 \neq -1 \Rightarrow h \nparallel S_2$$

Por lo tanto ninguna de las dos posibles ubicaciones es perpendicular a  $h$ .

