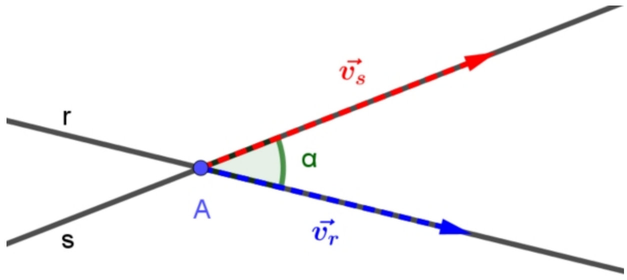
LECCIÓN 3. Ángulos.

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS:



Consideramos dos rectas r y s con vectores directores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$.
El ángulo que forman viene dado por[1] :

$$cos\,\alpha\;=\;\frac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}|\,|\overrightarrow{v_s}|}$$

EJEMPLO 1:

a) *Calcular el ángulo que forman las rectas* $r: x-1=\dfrac{y}{3}$ *y la recta* $s: 2x+3y+5=0$.

b) *Calcular el ángulo que forman la recta* r *determinada por los puntos* $A=(1,1)$ *y* $B=(2,2)$ *y la recta*

$$y=-\frac{5}{3}x+1$$

---

a) La ecuación continua de r *es :*

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}$$

Por lo tanto su vector director es : $\overrightarrow{v_r}=(1,3)$

El vector normal de s es $\overrightarrow{n_s}=(2,3)$ *, por lo que su vector director es:* $\overrightarrow{v_s}=(3,-2)$.
Se tiene entonces:

$$cos\,\alpha\;=\;\frac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}|\,|\overrightarrow{v_s}|}\;=\;\frac{|(1,3)\cdot(3,-2)|}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{3^2+(-2)^2}}\;=\;\frac{3}{\sqrt{130}}$$

Y por lo tanto:

$$\alpha\;=\;\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{130}}\right)\;\approx\;74,74^\circ$$

b) El vector director de r *es:*

$$\overrightarrow{v_r}\;=\overrightarrow{AB}=B-A=(2,2)-(1,1)=(1,1)$$

Para obtener el vector director de s *pasamos la ecuación a forma general:*

$$y=-\frac{5}{3}x+1\rightarrow\frac{5}{3}x+y-1=0\xrightarrow{\cdot 3}5x+3y-3=0$$

Como el vector normal es $\overrightarrow{n_s}=(5,3)$ *se deduce que el vector director es* $\overrightarrow{v_s}=(3,-5)$. *Por lo tanto:*

$$cos\,\alpha\;=\;\frac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}|\,|\overrightarrow{v_s}|}\;=\;\frac{|(1,1)\cdot(3,-5)|}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{3^2+(-5)^2}}\;=\;\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{34}}$$

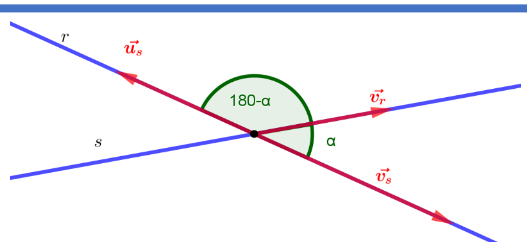
Y por lo tanto:

$$\alpha\;=\;\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{34}}\right)\;\approx\;75,96^\circ$$

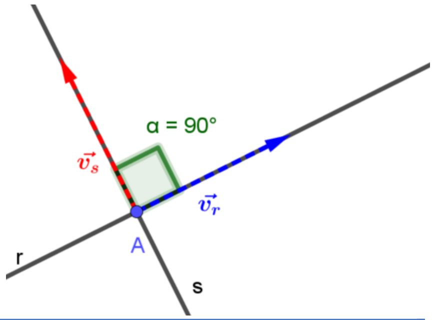
---

1 El valor absoluto sirve para que la fórmula nos de siempre al ángulo agudo que forman las dos rectas, no el obtuso.
Esto se debe a la igualdad:

$$cos\alpha=-cos(180^o-\alpha)$$



CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD:



Dos rectas r y s son perpendiculares si sus vectores directores son ortogonales. Es decir:

$$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = 0$$

EJEMPLO 2: *Determina si son perpendiculares las rectas*
a) $r: 2x+3y+1=0$ *y* $s: 3x-2y+5=0$
b) $r:(x,y)=(1,-1)+\lambda(1,1)$ *y* $s: \frac{x+3}{2}=\frac{y}{3}$

----

a) Los vectores normales de las rectas son:

$$\vec{n}_r = (2,3) \qquad \vec{n}_s = (3,-2)$$

Por lo tanto, sus vectores directores son:

$$\vec{v}_r = (3,-2) \qquad \vec{v}_s = (2,3)$$

Entonces :

$$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = (3,-2)\cdot(2,3) = 6-6 = 0$$

Por lo tanto los vectores son ortogonales y las rectas perpendiculares.

b) Los vectores directores son:

$$\vec{v}_r = (1,1) \qquad \vec{v}_s = (2,3)$$

Entonces :

$$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = (1,1)\cdot(2,3) = 2+3 = 5 \neq 0$$

Por lo tanto los vectores no son ortogonales y las rectas no perpendiculares.

EJEMPLO 3: *escribir la ecuación general de la perpendicular* r *a la recta* $s: 2x+y=0$ *por el punto* $A(1,1)$*.*

Evidentemente el vector director de r coincide con el normal de s*.*

$$\vec{v_r} = \vec{n_s} = (2,1)$$

Usamos la ecuación continua para llegar a la general:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x-1 = 2(y-1) \Rightarrow x-1 = 2y-2 \Rightarrow r: x-2y+1=0$$

PERPENDICULARIDAD A PARTIR DE LAS PENDIENTES:

Las rectas $r: y = mx+n$ y $s: y = m'x+n'$ son perpendiculares si $m \cdot m' = -1$.

<u>DEMOSTRACIÓN:</u> Si pasamos las rectas a forma general:

$$r: -mx+y-n=0 \ \text{ y } s: -m'x+y-' = 0$$

Se deduce que sus vectores normales son $\vec{n}_r = (-m,1)$ y $\vec{n}_s = (-m',1)$. Por lo tanto, los vectores directores son $\vec{v}_r = (1,m)$ y $\vec{v}_s = (1,m')$.
Para que las rectas sean perpendiculares:

$$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = 0 \implies (1,m)\cdot(1,m') = 0 \implies 1+mm' = 0 \implies mm' = -1$$

EJEMPLO 4: *Las rectas* $r: y = 5x + 3$ *y* $s: y = -\frac{1}{5}x$ *son perpendiculares pues* $m \cdot m' = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -1$

EJEMPLO 5: *Calcular la ecuación explícita de la perpendicular* r *a la recta* $s: y = -2x + 3$ *por el punto* $A(2,0)$*.*

Evidentemente la pendiente de s es -2 . Si m es la pendiente de r entonces :

$$m \cdot (-2) = -1 \Longrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Podemos usar ahora la ecuación punto pendiente de r para determinar su ecuación explícita:

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$$

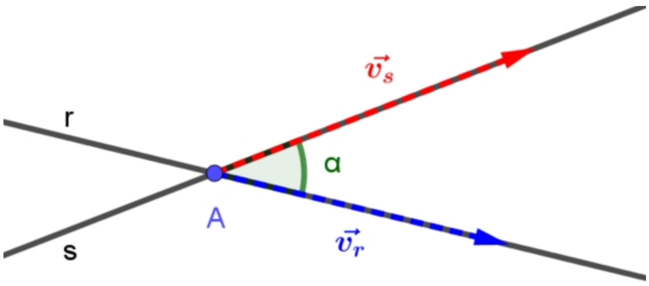
ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS A PARTIR DE SUS PENDIENTES:

El ángulo entre dos rectas

$$r: y = m_r x + n_r \qquad s: y = m_s x + n_s$$

se puede obtener a partir de las pendientes de las dos rectas como:

$$\tan\alpha = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$



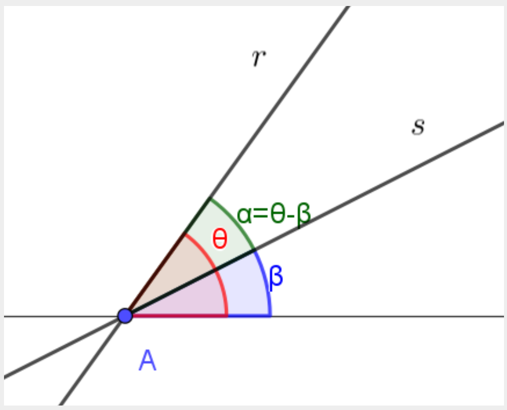
DEMOSTRACIÓN:

Se tiene que $\alpha = \theta - \beta$, donde $\theta \geq \beta$ son los ángulos que forman las rectas r y s con el eje X . Por lo tanto:

$$\tan\alpha = \tan\theta - \beta = \frac{tan\theta - tan\beta}{1 + tan\theta tan\beta} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

donde se ha usado la fórmula de la tangente de una diferencia vista en el tema de trigonometría.

El valor absoluto es necesario para los casos en los que $\theta < \beta$, ya que $tan(-\alpha) = -tan\alpha$



□

EJEMPLO 6. *Calcular el ángulo que forman la recta* r *determinada por los puntos* $A = (1,1)$ *y* $B = (2,2)$ *y la recta* $s: y = -\frac{5}{3}x + 1$

El vector director de la recta r *es:* $\vec{v_r} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,2) - (1,1) = (1,1)$

Por lo tanto, la pendiente de r *es:* $m_r = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{1}{1} = 1$

La pendiente de la recta s *es:* $m_s = -\dfrac{5}{3}$

Por lo tanto:

$$tan\,\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right| = \left|\frac{1-(-\frac{5}{3})}{1+1\cdot(-\frac{5}{3})}\right| = \left|\frac{1+\frac{5}{3}}{1-\frac{5}{3}}\right| = \left|\frac{\frac{8}{3}}{\frac{-2}{3}}\right| = \left|\frac{8}{-2}\right| = |-4| = 4$$

De donde se deduce: $\alpha = \arctan 4 \approx 75,96°$

EJERCICIOS

1. Calcular el ángulo que forman los siguientes pares de rectas

a) $2x - 3y + 4 = 0, 5x - 2y - 3 = 0 \quad (Soluc :\approx 34°31')$

b) $2x + 3y - 5 = 0, x - y + 7 = 0 \quad (Soluc :\approx 78°41')$

c) $y = 2x - 3, y = -2x + 1 \quad (Soluc :\approx 53°8')$

d) $y = 3x - 5, y = 3x + 2 \quad (Soluc :0°)$

e) $y + 2 = \frac{4}{3}(x-1),\ y - 3 = \frac{5}{12}x \quad (Soluc :\approx 30°31')$

f) $-x + 2y + 5 = 0, 2x - 3y + 4 = 0 \quad (Soluc :\approx 7°8')$

g) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3},\ -2x + 3y - 5 = 0 \quad (Soluc :\approx 22°37')$

h) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4},\ 3x + 4y = 0 \quad (Soluc :90°)$

i) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}, \begin{cases} x = -3 + 4\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$ (Soluc: $\approx 79°42'$)

j) $y = 2x + 3$ y $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$ (Soluc: 45^o)

2. **Hallar el valor de a para que las rectas** $r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=2\lambda \end{cases}$ **y** $s:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2+a\lambda \end{cases}$ **formen un ángulo de** 45^o **(SOL; a=6 o a=-2/3)**

3. Sean las rectas $r: 3x+my+12=0$ y $s: 2x+y+n=0$. Determinar m y n sabiendo que forman un ángulo de 60^o y que la recta s que pasa por el punto (-3,5). (1º SOL: $m=24+15\sqrt{13}$y $n=-1$; 2º SOL: $m=24-15\sqrt{13}$y $n=-1$)

4. **Determinar la ecuación de la recta que pasando por A(5,-2) forma un ángulo de** 45^o **con la que tiene por ecuación** $3x+7y-12=0$ **(SOL:** $y+2=\frac{2}{5}(x-5);\ y+2=\frac{-5}{2}(x-5)$¿**)**

5. Hallar la ecuación de la recta que, pasando por $P(2,-3)$, forma un ángulo de 45^o con la recta $3x-4y+7=0$ (SOL: $y+3=\frac{-1}{7}(x-2);\ y+3=7(x-2)$¿)

6. Determina la ecuación de la recta s que pasa por el punto P(3,−2) y forma un ángulo de 35^o con la recta r:2x−3y+5=0 (SOL: x+44.1y-88,2=0; 0,39x-y-3,17=0)

7. Hallar las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto (-3,0) y forman con la recta de ecuación 3x-5y+9=0 un ángulo cuya tangente vale 1/3 (SOL: $y=\frac{2}{9}(x+3); y=\frac{7}{6}(x+3)$)

8. Estudiar la posición relativa de $r: y = x - 2$ y $s: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$. En caso de ser secantes hallar el ángulo que forman.

9. La alcaldía de un ciudad está planificando la construcción de dos avenidas que se intersecan:

   - La avenida A está representada por la recta $r_1 : 4x - 3y + 6 = 0$.
   - La avenida B debe ser diseñada para pasar por el punto $P(1, 2)$ y formar un ángulo de 60^ocon la avenida A.

   Determina:

   1. La ecuación explícita de las posibles ubicaciones de la avenida B.
   2. Representa graficamente la situación.
   3. Verifica si alguna de las ubicaciones es perpendicular a la recta $x + y - 4 = 0$, que representa una calle transversal.

10. Un arquitecto está diseñando dos caminos en un parque, de la siguiente forma:

- El camino A está representado por la recta $r_1 : 3x + 2y - 7 = 0$.
- El camino B debe ser trazado para pasar por el punto $Q(2, -1)$ y formar un ángulo de 45^o con el camino A.

Determina:

a) La ecuación explícita de las posibles ubicaciones del camino B.

(SOL: $2x - 3y - 1 = 0$ y $2x + 3y - 8 = 0$)

b) Verifica si alguna de las ubicaciones del camino B es paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$, que representa un límite del parque. (SOL: Ninguna de las ubicaciones es paralela a $2x - y + 5 = 0$, ya que los coeficientes angulares son distintos).