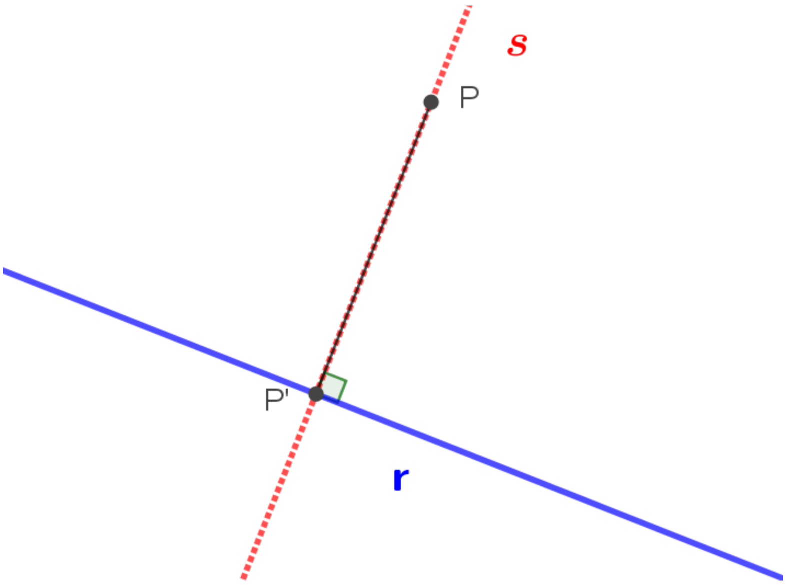
LECCIÓN 4. Distancias.

DISTANCIA PUNTO-RECTA:



La distancia entre un punto P y una recta r es la longitud del segmento PP' perpendicular a r, donde P' pertenece a la recta r.

Al punto P' se le llama **proyección ortogonal** del punto P en la recta r

Pasos a seguir:

1) Calcular la ecuación de s, la perpendicular a r que pasa por P.

2) Hallar el punto de corte de r y s. A ese punto de corte P' lo llamamos **proyección ortogonal** del punto P en la recta r.

3) Calcular la distancia entre P y P' que coincidirá con la distancia de P a r. Es decir:

$$d(P,r) = d(P,P') = \overrightarrow{PP'}$$

EJEMPLO 1: *Calcular la distancia del punto* $P=(2,-1)$ *a la recta* $r: -2x+3y=1$ *.*

---

1) *<u>Cálculo de la perpendicular s:</u>* *El vector normal a r coincide con el vector director de s*

$$\vec{v_s} = \vec{n_r} = (-2,3)$$

La ecuación paramétrica de s es:

$$\text{s: } \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = -1+3\lambda \end{cases}$$

2) *<u>Cálculo del punto de corte entre r y s:</u>* *(MÉTODO DEL PUNTO GENÉRICO)*

Tomamos un punto genérico de s:

$$P' = (2-2\lambda, -1+3\lambda)$$

Para que P' sea el punto de corte tiene que verificar la ecuación de r:

$$-2(2-2\lambda)+3(-1+3\lambda)=1 \Rightarrow -4+4\lambda-3+9\lambda=1 \Rightarrow 13\lambda=8 \Rightarrow \lambda=\frac{8}{13}$$

Luego el punto de corte es:

$$P' = \left(2-2\cdot\frac{8}{13}, -1+3\cdot\frac{8}{13}\right) = \left(\frac{10}{13}, \frac{11}{13}\right)$$

3) *<u>Cálculo de la distancia:</u>*

$$d(P,r) = d(P,P') = \sqrt{\left(\frac{10}{13}-2\right)^2 + \left(\frac{11}{13}+1\right)^2} = \frac{8\sqrt{13}}{13} \approx 2,22\,ud$$

<u>FÓRMULA DISTANCIA PUNTO-RECTA</u>: Para calcular la distancia entre el punto $P=(P_1,P_2)$ y la recta $r: Mx+Ny+D=0$, se puede usar la fórmula:

$$d(P,r) = \frac{|MP_1+NP_2+D|}{\sqrt{M^2+N^2}}$$

EJEMPLO 2: *Calcular la distancia del punto* $P=(2,-1)$ *a la recta* $r: -2x+3y=1$.

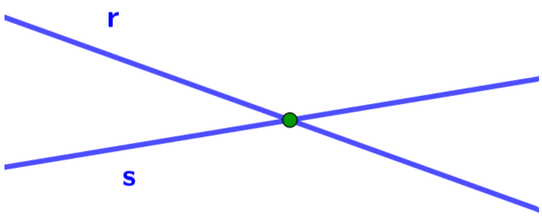
La ecuación general de la recta es $r: -2x+3y-1=0$

$$d(P,r)=\frac{|MP_1+NP_2+D|}{\sqrt{M^2+N^2}}=\frac{|-2\cdot 2+3\cdot(-1)-1|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{8}{\sqrt{13}}=\frac{8\sqrt{13}}{13}\approx 2,22\,ud$$

ADVERTENCIA: Hay que saber calcular la distancia por los dos métodos.

DISTANCIA RECTA-RECTA:

la distancia entre dos rectas r y s será:

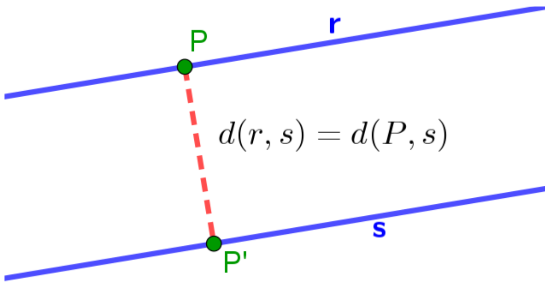


- *CASO I: Si r y s son secantes , entonces*

$$d(r,s)=0$$

- *CASO II: Si r y s son paralelas o coincidentes, la distancia será igual a la distancia de un punto cualquiera* $P\in r$ *a la recta* s. *Es decir:*

$$d(r,s)=d(P,s)$$



Que se calculará de la manera vista en el apartado anterior. Evidentemente si:

  - $d(r,s)=0$ *, entonces serán coincidentes*
  - $d(r,s)>0$*, entonces serán paralelas*

ES MUY IMPORTANTE COMPROBAR QUE LAS RECTAS NO SON SECANTES ANTES DE PROCEDER A CALCULAR LA DISTANCIA.

EJEMPLO 3: *Calcular la distancia entre las rectas* $r: x+y-1=0$ *y* $s: 2x+2y=0$.

Los vectores normales de las rectas son:

$$\vec{n_r}=(1,1) \qquad \vec{n_s}=(2,2)$$

Por lo tanto los vectores directores son :

$$\vec{v_r}=(1,-1) \qquad \vec{v_s}=(2,-2)$$

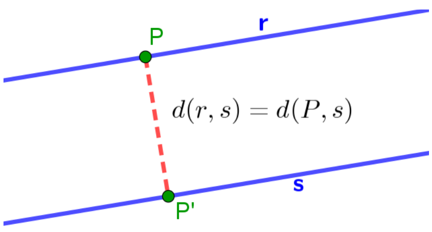
Estos vectores son proporcionales ya que:

$$\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}$$

Por lo tanto las rectas ***no son secantes****, son paralelas o coincidentes.*

Sabiendo que no son secantes tenemos que para cualquier punto $P\in r$

$$d(r,s)=d(P,s)$$

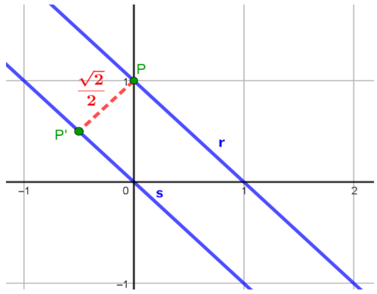


Para determinar un punto $P\in r$ *hay que encontrar una solución de la ecuación general de r. Una manera de hacerlo es fijar el valor* $x=0$ *y despejar y:*

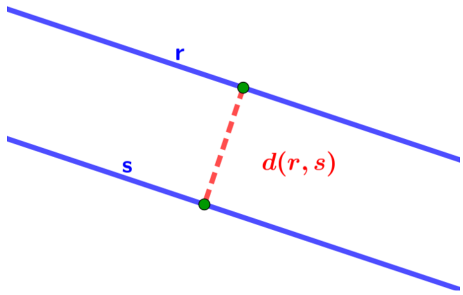
$$0+y-1=0\Rightarrow y=1$$

Obtenemos entonces el punto $P=(0,1)\in r$ *. Por lo tanto:*

$$d(r,s) = d(P,s) = \frac{|2\cdot 0 + 2\cdot 1|}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2\sqrt{8}}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, ud \approx 0.71\, ud$$



<u>FÓRMULA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS NO SECANTES</u>:
(NO SE PERMITE EN EXAMEN)



Dadas dos rectas paralelas

$$r: Mx + Ny + D = 0 \qquad s: Mx + Ny + D' = 0$$

Su distancia se puede calcular como:

$$d(r,s) = \frac{|D - D'|}{\sqrt{M^2+N^2}}$$

EJEMPLO 4: *Calcular la distancia entre las rectas* $r: 5x + 8y - 7 = 0$ *y* $s: -15x - 24y - 9 = 0$

Primero hay que comprobar que son paralelas. Evidentemente los vectores normales de las rectas son:

$$\overrightarrow{n_r} = (5,8) \qquad \overrightarrow{n_s} = (-15,-24)$$

Por lo tanto los vectores directores son :

$$\overrightarrow{v_r} = (8,-5) \qquad \overrightarrow{v_s} = (-24,15)$$

Estos vectores son paralelos ya que:

$$\frac{8}{24} = \frac{-5}{-15}$$

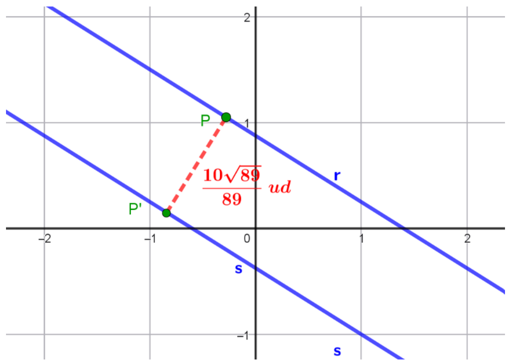
Se deduce entonces que las rectas ***no son secantes****, son paralelas o coincidentes.*

Para poder aplicar la fórmula es necesario que los coeficientes de la x y de la y sean iguales en ambas rectas. Para conseguir esto se puede dividir entre -3 *la ecuación de s :*

$$s: -15x - 24y - 9 = 0 \xrightarrow{:(-3)} s: 5x + 6y + 3 = 0$$

Ahora si que se puede aplicar la fórmula.

$$d(r,s) = \frac{|D - D'|}{\sqrt{M^2+N^2}} = \frac{|-7-3|}{\sqrt{5^2+8^2}} = \frac{10}{\sqrt{89}} = \frac{10\sqrt{89}}{89}\, ud \approx 1{,}06\, ud$$



Ejercicios.

1. Calcular de dos formas la distancia del punto P(-2,5) a la recta r: 3x+2y+5=0. (SOL: $19\sqrt{13}/13u$)

2. Calcular la distancia del punto P(1,4) a la recta determinada por los puntos A(-2,3) y B(1,1) (SOL: $\sqrt{10}$ u)

3. Hallar la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por los puntos A(-2,1) y B(3,-2) (Soluc: $\frac{1}{\sqrt{34}}$ u)

4. Hallar la distancia del punto P(-1,2) al punto de corte de las rectas x=2 y 2x+y-2=0 (SOL: 5)

5. Hallar la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasando por el punto A(4,2) tiene de pendiente -1 (SOL: $\sqrt{2}$)

6. Determinar c para que la distancia de la recta $x-3y+c=0$ al punto $(6,2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades. (Aviso: puede haber dos soluciones). Hacer un dibujo explicativo de la situación (SOL: $c=\pm 10$)

7. Calcular el valor de b para que la distancia del punto P(6,4) a la recta r: bx+y−4=0 sea igual a 5. (SOL: $b=\pm 5/\sqrt{11}$)

8. Calcular el valor de a para que la distancia del punto P(1,2) a la recta $ax+2y-2=0$ sea igual a $\sqrt{2}$. Hacer un dibujo explicativo de la situación (SOL: $a=2$)

PROBLEMAS

9. Un ingeniero está diseñando una valla que debe delimitar un terreno triangular. Una de las líneas de la valla se representará por la ecuación kx+3y=0, donde k es un parámetro desconocido. Además, el punto P(8,6) representa un poste eléctrico que no debe estar a más de10 unidades de esta línea para no interferir con el diseño. Determina el valor de k que debe cumplir esta línea para que la distancia entre el poste eléctrico y la valla sea exactamente 10. (SOL k=4)

10. Un ingeniero necesita diseñar una línea de energía a lo largo de una trayectoria recta definida por y = 2. Se desea encontrar un punto P sobre la línea de energía tal que la distancia desde P hasta la torre ubicada en el punto Q(5,3) sea igual a la distancia desde P a la recta 3x - 4y + 12 = 0. Determina las coordenadas de dicho punto P.

11. Un ingeniero está diseñando una carretera que conectará una fábrica ubicada en el punto P(3,4) con un centro logístico. El centro logístico está situado en el origen de coordenadas (0,0), ya que este punto representa el cruce principal de dos avenidas importantes. Para garantizar que la carretera no interfiera con la plaza central situada en el origen, se establece que la distancia mínima entre la carretera y el origen debe ser exactamente de 5 km. Encuentra las posibles ecuaciones de la recta que cumplan estas condiciones. (PISTA: usar la ecuación explícita de la recta)