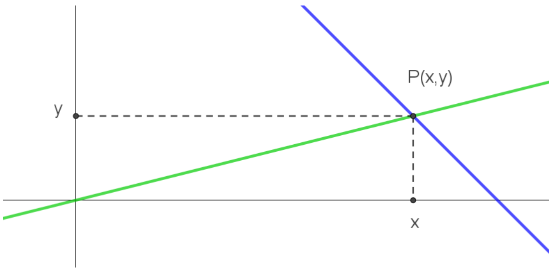
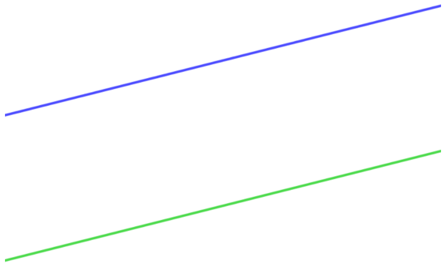
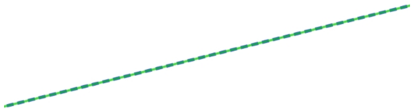
LECCIÓN 2. Posición relativa entre rectas.

Las posibles posiciones relativas de dos rectas son:

RECTAS SECANTES: se cortan en un punto $P \in r \cap s$	**RECTAS PARALELAS:** no se cortan nunca.	**RECTAS COINCIDENTES:** se cortan en ∞ puntos
		

Hay dos enfoques para estudiar la posición relativa de dos rectas:

1) **POSICIÓN RELATIVA POR SISTEMAS DE ECUACIONES**

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

- **COMPATIBLE:** con solución
  - **DETERMINADO (SCD):** solución única → **RECTAS SECANTES.** El punto de corte es la solución del sistema P(x,y)
  - **INDETERMINADO (SCI):** infinitas soluciones → **RECTAS COINCIDENTES**
- **INCOMPATIBLE (SI):** sin solución → **RECTAS PARALELAS**

EJEMPLO 1: *Determinar la posición relativa de los siguientes pares de rectas. En caso de que se corten, determina su punto de corte.*

a) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = -2 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - 3y = -1 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x - 3y = -1 \\ -2x + 6y = 7 \end{cases}$

---

a) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{5}y = -2 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 15} \begin{cases} 5x + 6y = -30 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases} \xrightarrow[\cdot(-3)]{} \begin{cases} 5x + 6y = -30 \\ -6x - 6y = 12 \end{cases}$$

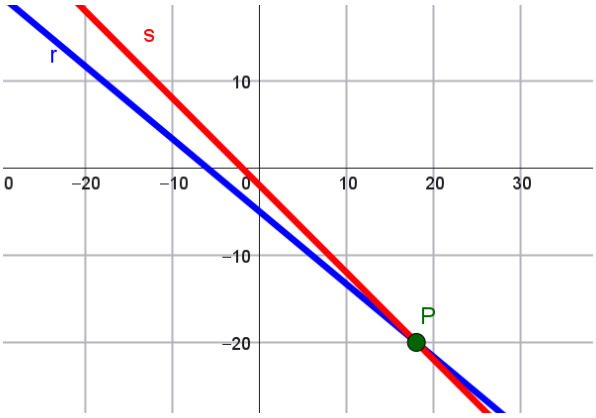
Sumando ambas ecuaciones obtenemos :

$$-x = -18 \Longrightarrow x = 18$$

Sustituyendo el valor de la x obtenido en la primera ecuación obtenemos el valor de la y *:*

$$5 \cdot 18 + 6y = -30 \Longrightarrow 90 + 6y = -30 \Longrightarrow 6y = -120 \Longrightarrow y = \frac{-120}{6} = -20$$

Se tiene entonces un ***Sistema Compatible Determinado*** *(SCD) . Esto significa que tiene una única solución dada por el punto* $P = (18, -20)$*.*



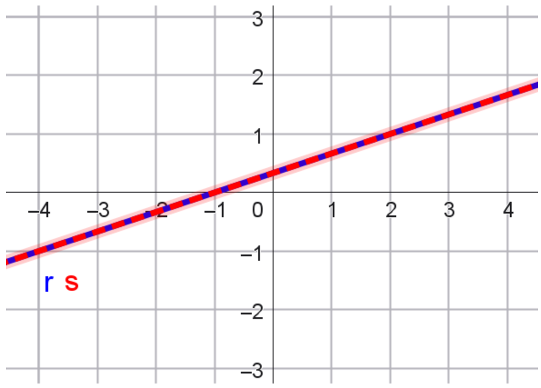
Geometricamente lo que tenemos son dos rectas

$$r : \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = -2 \qquad\qquad s : 2x + 2y = -4$$

secantes *que se cortan en el punto* $P = (18, -20)$*.*

b) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 2x - 6y = -2 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$$



Sumando ambas ecuaciones obtenemos la ecuación nula

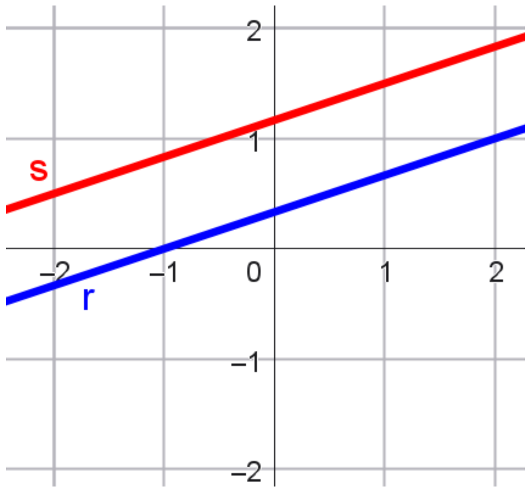
$$0x + 0y = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

Deducimos entonces que es un ***Sistema Compatible Indeterminado*** *(SCI) . Esto significa que tiene infinitas soluciones dadas en forma de recta.*

Geometricamente lo que tenemos es que ambas rectas son ***coincidentes.***

c) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ -2x + 6y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 2x - 6y = -2 \\ -2x + 6y = 7 \end{cases}$$



Sumando ambas ecuaciones obtenemos una ecuación sin soluciones

$$0x + 0y = 5 \Longrightarrow 0 = 5$$

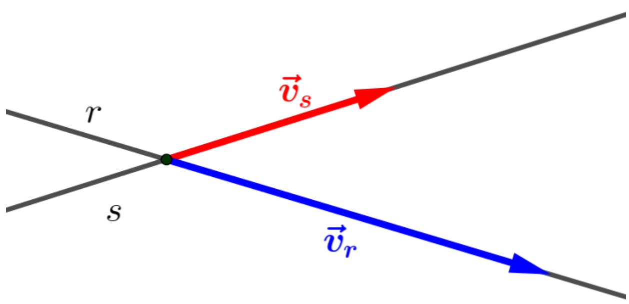
Deducimos entonces que es un ***Sistema Incompatible*** *(SI) . Esto significa que no tiene ninguna solución.*

Geometricamente lo que tenemos es que ambas rectas son ***paralelas.***

2) POSICIÓN RELATIVA POR VECTORES:

Dadas dos rectas r y s

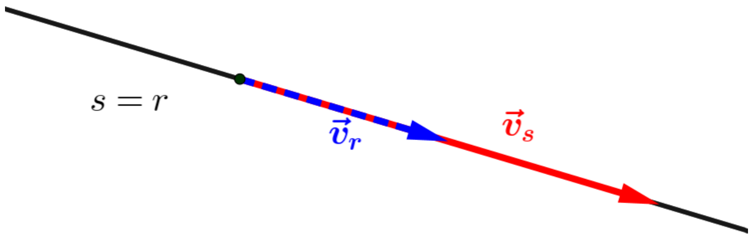
a. Si sus **vectores directores** no son **paralelos** entonces son **rectas secantes.**

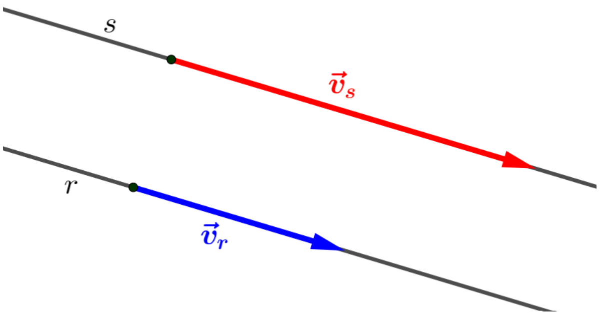


b. Si sus vectores directores son paralelos entonces pueden ocurrir 2 cosas

i. r y s se **intersecan**. Entonces se tiene que son la misma recta $r = s$.

ii. r **y** s **no tienen puntos** en común. Entonces se tiene que son paralelas $r \parallel s$.





EJEMPLO 2: *Estudiar la posición relativa de las rectas. En caso de que sean secantes hallar el punto de corte:*

a) $r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2\beta \\ y = 1 - \beta \end{cases}$

Los vectores directores son:

$$\vec{v_r} = (1,2) \qquad \vec{v_s} = (2,-1)$$

que no son paralelos ya que

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-1}$$

Se deduce entonces que son ***rectas secantes.***

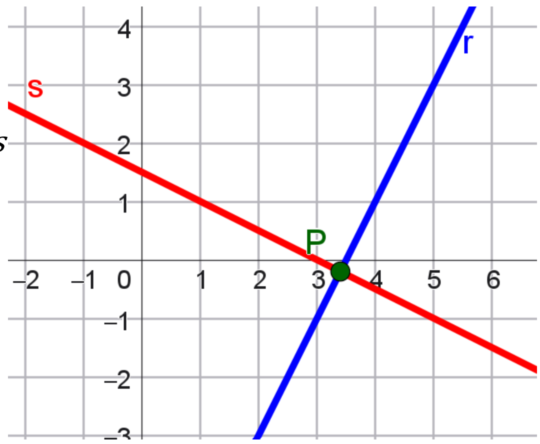
Vamos a determinar el punto de corte. Para ello vamos a determinar para que valores de los parámetros λ *y* β *ambas ecuaciones pasan por el mismo punto. Esto se hace resolviendo el sistema resultante de igualar las ecuaciones paramétricas de cada recta:*

$$\begin{cases} 2 + \lambda = 1 + 2\beta \\ -3 + 2\lambda = 1 - \beta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda - 2\beta = -1 \\ 2\lambda + \beta = 4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} -2\lambda + 4\beta = 2 \\ 2\lambda + \beta = 4 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones :

$$5\beta = 6 \Longrightarrow \beta = \frac{6}{5}$$

Sustituyendo el valor de β *en la primera ecuación y despejando obtenemos que* $\lambda = \dfrac{7}{5}$.



Ahora podemos sustituir cualquiera de los dos parámetros en la ecuación correspondiente para determinar el punto de corte:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\beta = 1 + 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{17}{5} \\ y = 1 - \beta = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

El punto de corte es $P = \left(\dfrac{17}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$.

---

b) $r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-3+2\lambda \end{cases} \quad , \quad s:\begin{cases} x=1+2\beta \\ y=1+4\beta \end{cases}$

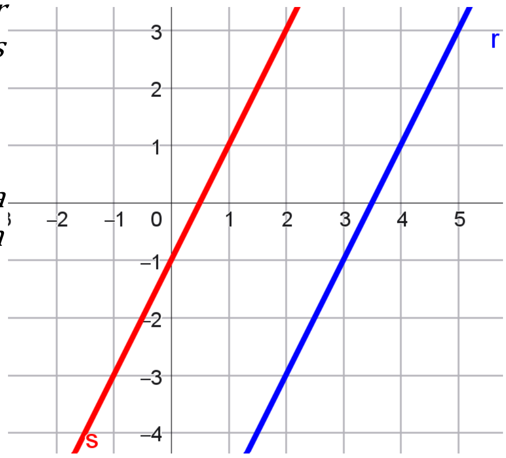
Los vectores directores son:

$$\vec{v_r}=(1,2) \qquad \vec{v_s}=(2,4)$$

que son paralelos ya que

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$$

*Se concluye que las recta son **paralelas o coincidentes.** Para ver en que caso estamos tomamos un punto de una de las dos rectas y comprobamos si ese punto pertenece a la otra recta.*



Tomamos $A=(2,-3)\in r$ *, vamos a comprobar si está en la recta* s *. Si estuviese en la recta debería de verificarse que para cierto valor del parámetro* β *:*

$$\begin{cases} 2=1+2\beta \longrightarrow 1=2\beta \longrightarrow \beta=\frac{1}{2} \\ -3=1+4\beta \longrightarrow -4=4\beta =\!\!\longrightarrow \beta=\frac{-4}{4}=-1 \end{cases}$$

Como hemos obtenido dos resultado distintos, se concluye entonces que $A\notin s$ *y por lo tanto las rectas son **paralelas.***

---

c) $r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-3+2\lambda \end{cases} \quad , \quad s:\begin{cases} x=1+2\beta \\ y=1+4\beta \end{cases}$

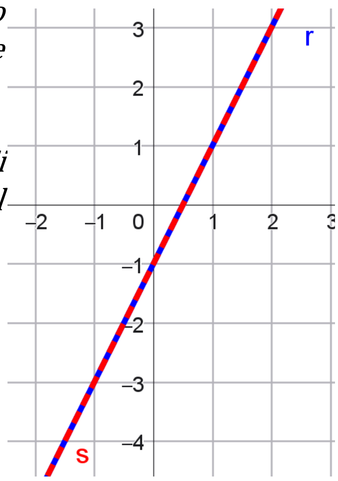
Los vectores directores son:

$$\vec{v_r}=(1,2) \qquad \vec{v_s}=(2,4)$$

que son paralelos ya que

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$$

*Se concluye que las recta son **paralelas o coincidentes.** Para ver en que caso estamos tomamos un punto de una de las dos rectas y comprobamos si ese punto pertenece a la otra recta.*



Tomamos $A=(-1,-3)\in r$ *, vamos a comprobar si está en la recta* s *. Si estuviese en la recta debería de verificarse que para cierto valor del parámetro* β *:*

$$\begin{cases} -1=1+2\beta \longrightarrow -2=2\beta \longrightarrow \beta=\frac{-2}{2}=-1 \\ -3=1+4\beta \longrightarrow -4=4\beta =\!\!\longrightarrow \beta=\frac{-4}{4}=-1 \end{cases}$$

Como obtenemos el mismo valor de β *en ambas ecuaciones, se concluye entonces que* $A\in s$ *y por lo tanto las rectas son **coincidentes.***

EJEMPLO 3: *Determinar la posición relativa de r:* $\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -3+2\lambda \end{cases}$ *y* $s: -x+4y=14$ *. En caso de que se corten determinar su punto de corte usando el método del punto genérico.*

Evidentemente : $\overrightarrow{v_r} = (-1,2)$*.*

Por otro lado el vector normal de s es $\overrightarrow{n_s} = (-1,4)$ *de lo que se deduce que su vector director es* $\overrightarrow{v_s} = (4,1)$ *.*

Claramente estos vectores no son paralelos ya que $\frac{-1}{4} \neq \frac{2}{1}$*, por lo que las rectas son* ***secantes.***

Vamos a calcular el punto de corte usando lo que se conoce como el ***método del punto genérico.*** *Tomamos un punto genérico de la recta r:*

$$P = (1-\lambda, -3+2\lambda)$$

Ahora tenemos que calcular el valor de λ *para que el punto* P *pertenezca a la recta* s *. Está claro que el punto* P *pertenece a* s *si sus coordenadas verifican la ecuación general de* s*:*

$$-(1-\lambda)+4(-3+2\lambda)=14$$

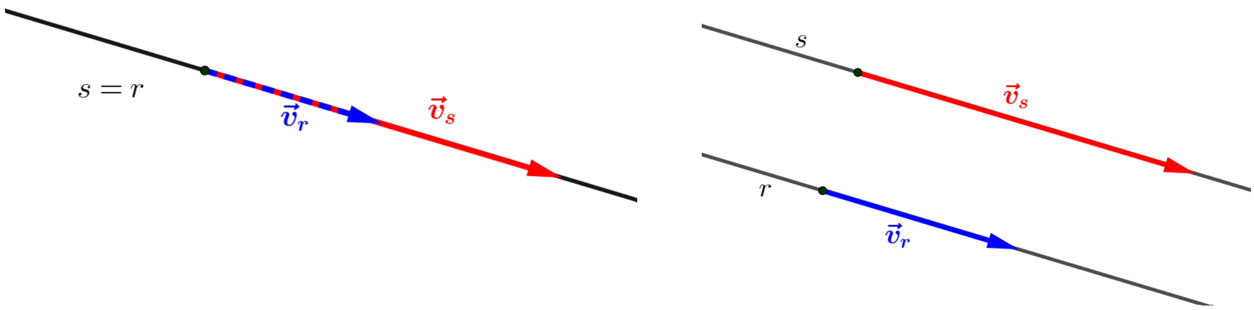
Despejando se obtiene el valor $\lambda = 3$ *. Por lo tanto el punto de corte de ambas rectas es:*

$$P = (1-3, -3+2\cdot 3) = (-2,3)$$

<u>CONDICIONES DE PARALELISMO</u>

Se distinguen tres condiciones de paralelismo:

1) Dos rectas son paralelas si tienen vectores directores paralelos (proporcionales) y además no se intersecan. (Si se intersecan serían coincidentes)



2) Dos rectas en forma general $\begin{cases} r: Mx+Ny+C=0 \\ s: M'x+N'y+C'=0 \end{cases}$ son:

- Paralelas si: $\frac{M}{M'} = \frac{N}{N'} \neq \frac{C}{C'}$ - Coincidentes si: $\frac{M}{M'} = \frac{N}{N'} = \frac{C}{C'}$

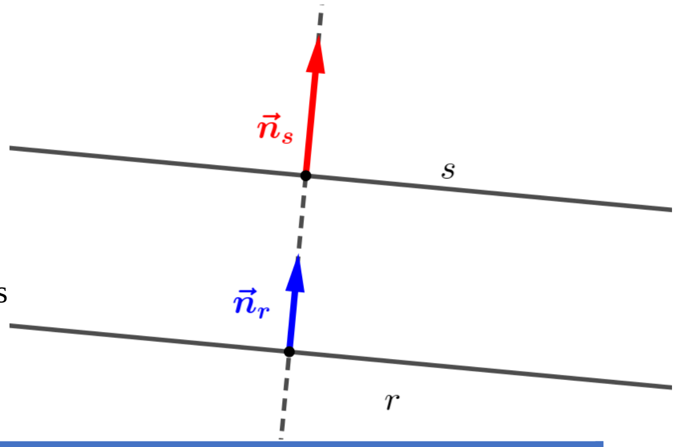
Para comprender esta condición hay que darse cuenta que los vectores normales a ambas rectas son

$$\overrightarrow{n_r} = (M,N) \qquad \overrightarrow{n_r} = (M',N')$$

Evidentemente las rectas serán paralelas o coincidentes cuando ambos vectores sean proporcionales:

$$\frac{M}{M'} = \frac{N}{N'}$$

Si además se verifica que los términos C y C' también son proporcionales, entonces ambas ecuaciones generales serán proporcionales y tendrán las mismas soluciones, por lo que las rectas serán coincidentes.



EJEMPLO 4

Paralelas: $\begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ -4x + 6y - 4 = 0 \end{cases}$ *ya que* $\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \neq \frac{-2}{-4}$

Coincidentes: $\begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ -4x + 6y + 4 = 0 \end{cases}$ *ya que* $\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \frac{-2}{4}$

Secantes: $\begin{cases} 2x + 5y - 2 = 0 \\ -4x + 6y + 4 = 0 \end{cases}$ *ya que* $\frac{2}{-4} \neq \frac{5}{6}$

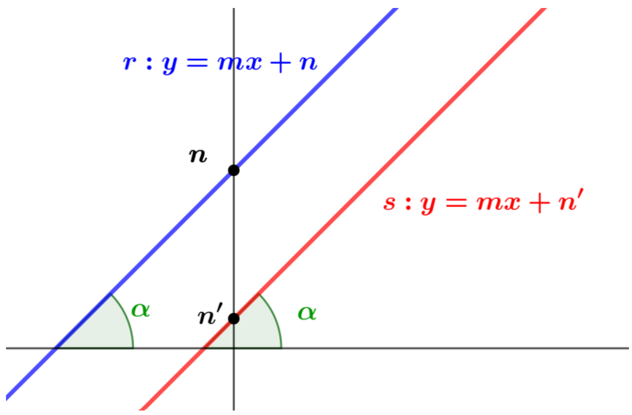
3) Dos rectas en forma explícita $r: y = mx + n$ y s: $y = m'x + n'$son:

- Paralelas si: $m = m'$y $n \neq n'$
- Coincidentes si: $m = m'$ y $n = n'$

Esta condición es evidente si tenemos en cuenta que dos rectas con la misma pendiente m forman el mismo ángulo con el eje OX ya que:

$$m = \tan \alpha$$

Si además tienen la misma ordenada en el origen n entonces ambas cortan al eje OY en el mismo punto y por lo tanto deberán ser coincidentes.



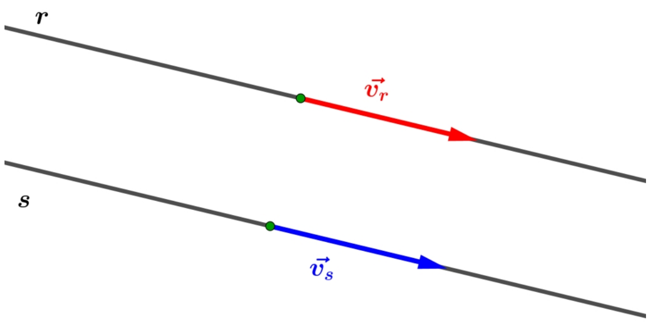
EJEMPLO 5

Paralelas: $r: y = 5x + 3, s: y = 5x + 1$

Coincidentes: $r: y = 5x + 3, s: y = 5x + 3$

Secantes: $r: y = 2x + 3, s: y = x + 3$

EJEMPLO 6: *Escribir la ecuación paramétrica de la paralela s a la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{3}$ por el punto $P=(1,0)$. Determinar también la ecuación general de la recta t perpendicular a s pasando por B=(3,5)*



Evidentemente la recta s tiene la misma dirección que r. Por lo tanto:

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_r} = (2,3)$$

Se deduce entonces que le ecuación paramétrica de la recta es:

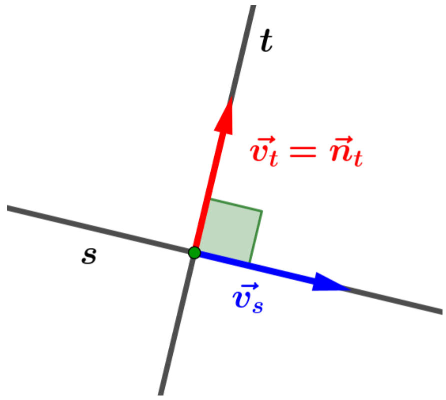
$$\text{s: } \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 + 3\lambda \end{cases}$$

Para calcular t vamos a usar la ecuación continua. Evidentemente el vector director de t coincide con el vector normal a s .

$$\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{n_s} = (3,-2)$$

Se tiene entonces:

$$t : \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-2}$$



De donde se obtiene la ecuación general $t : 2x + 3y - 21 = 0$.

EJERCICIOS

1. Determinar la posición relativa de los siguientes pares de rectas. En caso de cortarse, determina su punto de corte:

   a) r: 2x - 3y + 5 = 0 y s:4x - 6y - 10 = 0
   b) r: x + y - 3 = 0 y s:2x - y + 1 = 0
   c) r:5x+2y-7=0 y s: -10x -4y +14 = 0
   d) r: 3x - 4y + 2 = 0 y s: 6x - 8y + 5 = 0

   SOLUCIONES: a) Paralelas b) Secantes. Punto de corte (2/3, 7/3). c) Coincidentes. d) Paralelas.

2. Dadas las siguientes rectas determinar si se cortan, son paralelas o coinciden. En caso de que se corten, hallar el punto de intersección.

a) $r: \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \end{cases} \qquad s: \; 2x + y - 7 = 0$

b) $r: \; \frac{x+2}{3} = y - 1 \qquad s: \; 3x - 9y + 6 = 0$

c) $r: \; 5x - y + 3 = 0 \qquad s: \; \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-5}$

d) $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 4t \end{cases} \qquad s: \; x - 4y + 10 = 0$

e) $r: \; \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{1} \qquad s: \; 8x - 2y - 26 = 0$

f) $r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -5 + \mu \\ y = 9 - 3\mu \end{cases}$

g) $r: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -3 + t \end{cases} \qquad s: \; \frac{x+1}{-1} = \frac{y-4}{5}$

h) $r: \; (x,y) = (3,2) + \lambda(1,-2) \qquad s: \; \frac{x-7}{2} = \frac{y+1}{-4}$

3. Dadas las siguientes rectas determinar si se cortan, son paralelas o coinciden. En caso de que se corten, hallar el punto de intersección.

a) $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 + \lambda \end{cases} \; ; \; s: 3x - 2y + 5 = 0$

b) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1}; \; s: 2x - 4y + 7 = 0$

c) $r: 4x-3y+7=0, \quad s: \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+4}{-3}$

d) r: x + 2y - 1 = 0, s: $\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-2-2\lambda \end{cases}$

e) $r: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+3}{2}, \quad s: 6x-12y-42=0$

f) r: $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+3t \end{cases}$, s: 4x - 12y + 8 = 0

g) $r: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}$, s: $\begin{cases} x=1-4t \\ y=-2+2t \end{cases}$

h) $r: (x,y)=(1,-3)+\lambda(2,3)$, $s: \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+2}{1}$

SOLUCIONES; a) Secantes. Punto de corte: (-6, -13/2). b) Paralelas. c) Secantes. Punto de corte: (-77/29, -35/29). d) Secantes. Punto de corte: (7/3, -2/3). e) Coincidentes. f) Secantes. Punto de corte: (1'9, 1'3). g) Paralelas h)Secantes (1/2,-15/4)

4. Dada la r recta determinada por A=(2,3) y B=(9,6), se pide la ecuación general de la paralela a r que pasa por el punto C=(-1,0) (SOL: 3x-7y+3)

5. Determinar la paralela r:5x+7y=0 que pase por el punto (1,2) (SOL: 5x+7y-19=0)

6. Determinar el valor de m y de n para que la recta $r: mx+ny+3=0$ pase por el punto $(2,3)$ y sea paralela a la recta determinada por los puntos $A=(6,4)$ y $B=(1,-1)$. (SOL: m=3, n=-3)

7. ¿Cuánto tiene que valer k para que la recta $r: 4x+3y-1=0$ sea paralela a la recta $s: \dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+1}{k}$?