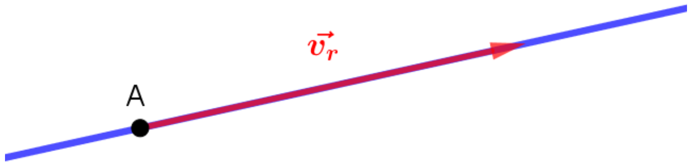
LECCIÓN 1. Ecuaciones de la recta.

Una recta r en el plano queda determinada por un **punto** cualquiera de ella A y un **vector director** $\overrightarrow{v}_r$

Ambos elementos, punto y vector constituyen la **determinación principal de la recta.**



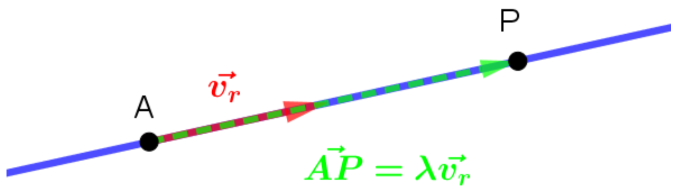
$$r = \{A, \overrightarrow{v}_r\}$$

Supongamos $A = (a_1, a_2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (v_1, v_2)$. Tomamos un **punto genérico** de la recta $P = (x, y)$. Entonces el vector $\overrightarrow{AP}$ es proporcional al vector director de r y por lo tanto

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{v}_r$$

para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. De lo que se deduce que:

$$P = A + \lambda \overrightarrow{v}_r$$



Introduciendo las coordenadas de A y P se deduce:

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA: $r : (x, y) = (a_1, a_2) + \lambda(v_1, v_2) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Desarrollando la ecuación vectorial de la recta se tiene que:

$$(x, y) = (a_1 + \lambda v_1, a_2 + \lambda v_2)$$

Igualando coordenadas obtenemos la:

ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA: r: $\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Tanto la ecuación vectorial como la paramétrica son **ecuaciones de tipo paramétrico**. Es decir, para obtener un punto de la recta tenemos que darle un valor al parámetro λ.

Ahora en la ecuación paramétrica vamos a **despejar** λ en ambas expresiones, obteniéndose:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x-a_1}{v_1} \\ \lambda = \frac{y-a_2}{v_2} \end{cases}$$

Igualando ambas expresiones de λ se obtiene la:

ECUACIÓN CONTINUA DE LA RECTA: $r : \quad \dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}$ (siempre que $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$)

Si ahora simplificamos multiplicando en cruz y obtenemos:

$$v_2(x - a_1) = v_1(x - a_2)$$

Si desarrollamos la expresión obtenemos la:

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA: $r : Mx + Ny + D = 0$

EJEMPLO 1: *Hallar sucesivamente las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua y general de la recta que pasa por* $A=(1,-3)$ *y tiene vector director* $\overrightarrow{v}=(2,-1)$.

La determinación principal $r=\{A,\vec{v}\}$ *.*

Ecuación vectorial=> $r:(x,y)=(1,-3)+\lambda(2,-1) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$

Ecuación paramétrica=> $r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-3-\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$

Ecuación continua=> $r: \quad \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}$

Ecuación general => $r: x+2y+5=0$

OBSERVACIÓN: *Cuando* v_1 *o* v_2 *es igual a 0, se pasa inmediatamente de la ecuación paramétrica a la general sin pasar por la continua. Por ejemplo, la ecuación paramétrica que pasa por el punto A=(4,5) y tiene vector director* $\overrightarrow{v}_r=\vec{i}=(1,0)$ *es:*

$$\text{r: }\begin{cases} x=4+\lambda \\ y=5 \end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Si nos quedamos con la segunda ecuación obtenemos la ecuación general:

$$r: y-5=0$$

TIPOS DE ECUACIONES:

$$\begin{cases} \text{ECUACIONES DEL TIPO PARAMÉTRICO} \begin{cases} \text{Ecuación vectorial} \\ \text{Ecuación paramétrica} \end{cases} \\ \text{ECUACIONES DEL TIPO IMPLÍCITO} \begin{cases} \text{Ecuación continua} \\ \text{Ecuación general} \\ \text{.....} \end{cases} \end{cases}$$

Las ecuaciones del tipo paramétrico dependen de ese parámetro. Al dar valores al parámetro obtenemos distintos puntos de la recta.

Las ecuaciones del tipo implícito no tienen parámetro. Los puntos se obtienen como soluciones de dichas ecuaciones.

EJEMPLO 2: *Obtener dos puntos de la recta* $\text{r: }\begin{cases} x=5+3\lambda \\ y=7-2\lambda \end{cases}$*. Indica su vector director.*

Si tomamos el valor $\lambda=0$ *se obtiene el punto A=(5,7) .*

Si tomamos el valor $\lambda=1$ *se obtiene el punto* $B=(8,5)$.

EJEMPLO 3: *Dada la recta* $r:2x-3y+5=0$ *, se pide:*
a) Comprobar si los puntos A=(2,-1) y B=(-1,1) está en la recta.
b) Calcular tres puntos de la recta.

---

a) Sustituimos las coordenadas de A en la ecuación:

$$2\cdot 2 – 3\cdot(-1)+5=12\neq 0$$

Por lo que $A\notin r$ *(A no pertenece a r)*
Hacemos lo mismo con B :

$$2\cdot(-1)-3\cdot 1+5=0$$

Por lo que $B\in r$ *(B pertenece a r)*

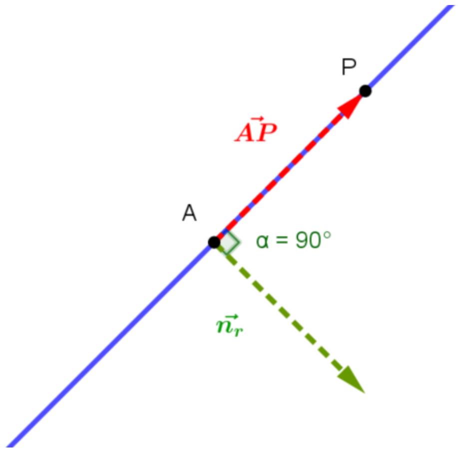
b) Encontrar un punto de la recta es encontrar una solución (x,y) de la ecuación. Un procedimiento habitual es dar un valor a una de las variables y despejar el valor de la otra. Por ejemplo:

- Tomando: $x=0\rightarrow 2\cdot 0-3y+5=0\rightarrow -3y=-5\rightarrow y=5/3\ \rightarrow P=(0,5/3)$

- Tomando : $x=1\rightarrow 2\cdot 1-3y+5=0\rightarrow -3y=-7\rightarrow y=7/3\ \rightarrow Q=(1,7/3)$

- Tomando : $y=2\rightarrow 2x-3\cdot 2+5=0\rightarrow 2y=1\rightarrow y=1/2\ \rightarrow R=(1/2,2)$

ECUACIÓN NORMAL DE LA RECTA:



Dada una recta r de la que conocemos un punto $A=(a_1,a_2)$ un vector normal $\overrightarrow{n}_r=(n_1,n_2)$.

Si $P=(x,y)$ es un punto genérico de la recta entonces los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{n}_r$ son ortogonales de donde se deduce:

$$\overrightarrow{n_r}\cdot\overrightarrow{AP}=0\Leftrightarrow(n_1,n_2)\cdot(x-a_1,y-a_2)=0$$

de donde se obtiene:

ECUACIÓN NORMAL DE LA RECTA: $r:n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)=0$

Si desarrollamos la ecuación normal de la recta obtenemos la ecuación general de la recta.

$$r:Mx+Ny+D=0$$

EJEMPLO 4: *Calcular la ecuación normal de la recta que pasa por los puntos A=(3,-1) y B=(-1,2) . Úsala para obtener la ecuación general.*

Un vector director de r es: $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=B-A=(-4,3)$

Por lo tanto podemos tomar como vector normal : $\overrightarrow{n}=(3,4)$

Ecuación normal => $r:3(x-3)+4(y+1)=0$

Operando los paréntesis y reduciendo se obtiene la ecuación general: $r:3x+4y-5=0$

NOTA: A partir de la ecuación general de la recta podemos recuperar fácilmente un vector normal y un vector director de la recta:

$$r: Mx+Ny+D=0 \qquad \overrightarrow{n_r}=(M,N) \qquad \overrightarrow{v_r}=(N,-M)$$

EJEMPLO 5: *Dada la recta* $r: -3x+2y+1=0$ *se pide calcular su ecuación vectorial.*

Para calcular la ecuación vectorial de la recta se necesita un punto A *y un vector director* $\overrightarrow{v_r}$ *.*

CÁLCULO DE A *: Tomando el valor* $x=0$ *en la ecuación de la recta se obtiene el valor de* $y=\frac{-1}{2}$ *, obteniéndose* $A=(0,\frac{-1}{2})$

CÁLCULO DE $\overrightarrow{v_r}$ *: Un vector normal es* $\overrightarrow{n_r}=(-3,2)$ *y por lo tanto, un vector director es* $\overrightarrow{v_r}=(2,3)$*.*

ECUACIÓN VECTORIAL: $r:(x,y)=(0,-\frac{1}{2})+\lambda(2,3) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE Y ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA:

Vamos a ver los dos últimos tipos de ecuaciones de la recta. Partamos de nuevo de la ecuación de la recta $r=\{A,\vec{v}_r\}$ en forma continua, operando se obtiene:

$$r:\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2} \Longrightarrow y-a_2=\frac{v_2}{v_1}(x-a_1) \overset{m=\frac{v_2}{v_1}}{\Longrightarrow} y-a_2=m(x-a_1)$$

A la última expresión se le llama ecuación punto- pendiente y a l cociente $m=\frac{v_2}{v_1}$ se le llama pendiente de la recta.

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE: $r: y-a_2=m(x-a_1)$ Pendiente: $m=\frac{v_2}{v_1}$

Si operamos un poco despejando la y, y aplicando la propiedad distributiva en el paréntesis obtenemos la :

ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA: $r: y=mx+n$

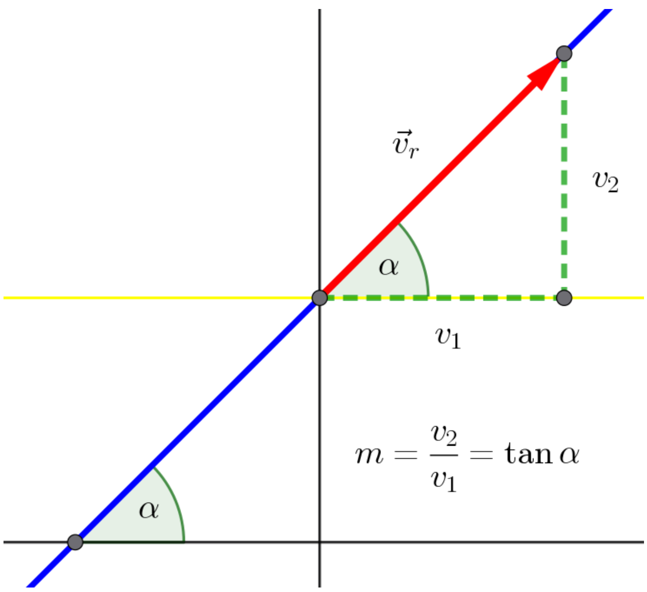
m=Pendiente de la recta $\qquad$ n=ordenada en el origen.

OBSERVACIONES:

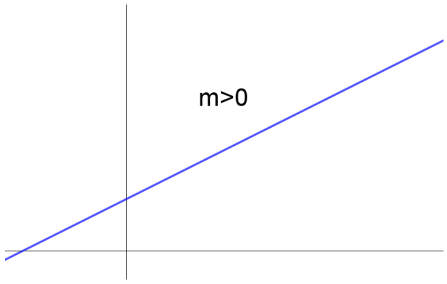
a) La pendiente m de la recta se puede identificar como la tangente del ángulo que forma la recta con el eje X

$$m=\frac{v_2}{v_1}=\tan\alpha$$

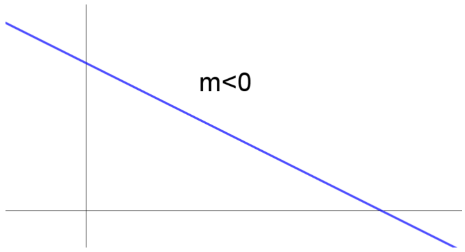
En consecuencia, el signo de la pendiente nos indica si la recta es creciente (m>0) o decreciente (m<0) además del grado de inclinación de esta.



PENDIENTE POSITIVA – RECTA CRECIENTE

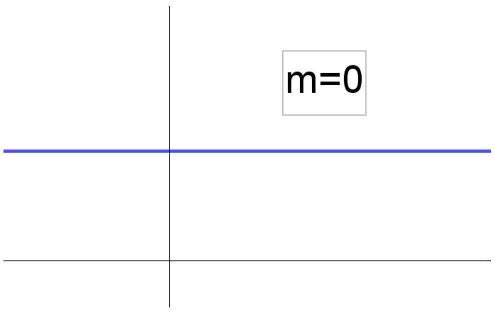


PENDIENTE NEGATIVA – RECTA DECRECIENTE

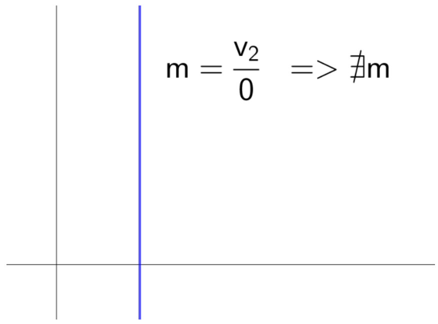


Las rectas horizontales tienen pendiente 0 y las rectas verticales no tienen pendiente pues al hacer el cociente $m=\frac{v_2}{v_1}$ el denominador se anula.

PENDIENTE NULA – RECTA HORIZONTAL

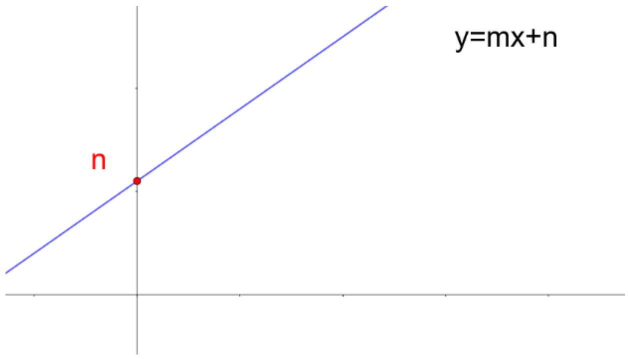


NO HAY PENDIENTE – RECTA VERTICAL



b) La ordenada en el origen n nos indica en que lugar la recta corta al eje Y.

APPLET INTERACTIVO:
PENDIENTE DE LA RECTA.



EJEMPLO 6: *Calcular la ecuación explícita de las rectas que pasan por los siguientes puntos, represéntalas e indica que ángulo forman con el eje OX*

a) A =(-1,2) y B =(1,-3) *b) A =(2,3) y B =(1,3)* *c) A =(2,3) y B =(2,5)*

En los 3 casos se va a usar la ecuación punto pendiente:

a) El vector director es

$$\vec{v_r} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2, -5)$$

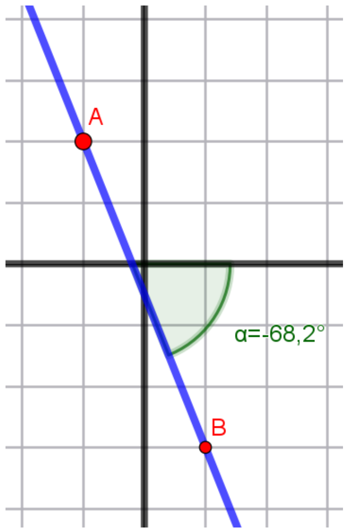
Por lo que la pendiente es: $m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-5}{2}$.

Entonces, la ecuación punto pendiente de la recta es:

$$r : y - 2 = -\frac{5}{2}(x+1)$$

Despejando la y y reduciendo se obtiene la ecuación explícita de la recta:

$$y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$$

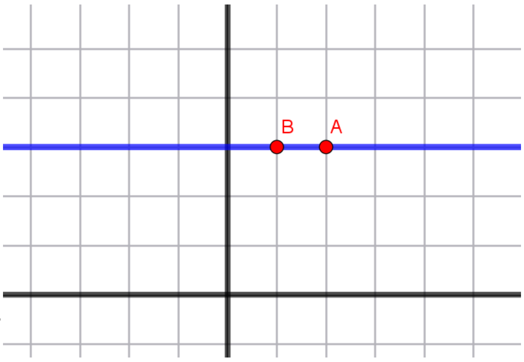


Para determinar el ángulo que forma con el eje OX usamos la relación:

$$\tan\alpha = -\frac{5}{2} \Longrightarrow \alpha = \arctan\left(-\frac{5}{2}\right) \approx -68,20^\circ$$

b) Como ambos puntos tienen la misma coordenada y vamos a tener una recta horizontal. El vector director es

$$\vec{v_r} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 0)$$



Por lo que la pendiente es: $m = \dfrac{0}{-1} = 0$.

Entonces, la ecuación punto pendiente de la recta es:

$$r : y - 3 = 0(x - 2)$$

Despejando la y y reduciendo se obtiene la ecuación explícita de la recta:

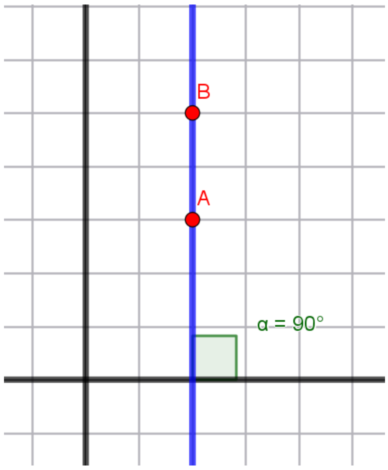
$$y = -2$$

Para determinar el ángulo que forma con el eje OX usamos la relación:

$$\tan\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = \arctan 0 = 0^\circ$$

c) Como ambos puntos tienen la misma coordenada x vamos a tener una recta vertical. El vector director es

$$\vec{v_r} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2)$$



Y la pendiente no existe ya que obtenemos una división entre cero : $m = \dfrac{2}{0} = \nexists$. *Como no hay pendiente no hay ecuación explícita.*

Evidentemente forma un ángulo de 90° *con el eje OX.*

EJERCICIOS:

1. **Hallar todas la ecuaciones de la recta determinada por los puntos** $A=(3,-2)$ **y** $B=(-2,-3)$**.**

2. Calcula una ecuación paramétrica de la recta $2x+3y-5=0$.

3. Dada la recta $r: 3x+y+1=0$ se pregunta: a) Indica si $A(1,-1)$ está contenido en la recta b) Idem con $B(-1,2)$ c) ¿Cuánto tiene que valer λ para que el punto $P(1-\lambda, 3+\lambda)$ este contenido en la recta?

4. Calcula el ángulo que forman las siguientes rectas con el eje de abscisas:

   a. $3x-2y+6=0$ b. $2x+5y-4=0$ c. 2x + 8y + 1 = 0

   (SOL: a) $56^o 18' 36''$; b) $-21^o 48' 3''$ c) $-14^o 2' 10''$)

5. **Calcular la ecuación explícita de la recta que forma un ángulo de** 160^o **con el eje OX y que pasa por el punto A=(2,0).**

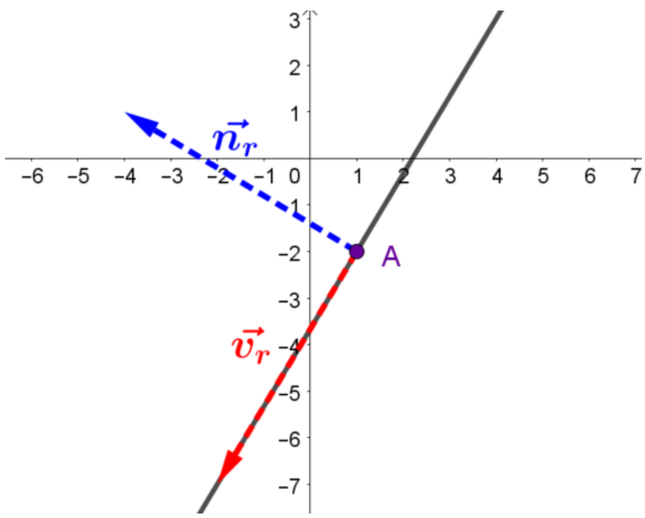
6. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,1) y que forma un ángulo de 120^o con la parte positiva del eje OX. (SOL: $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}+1$)

7. Calcular la ecuación de la recta que forma un ángulo de 30^o con el eje OX y que pasa por el punto $A(3,2)$(SOL: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}+2$)

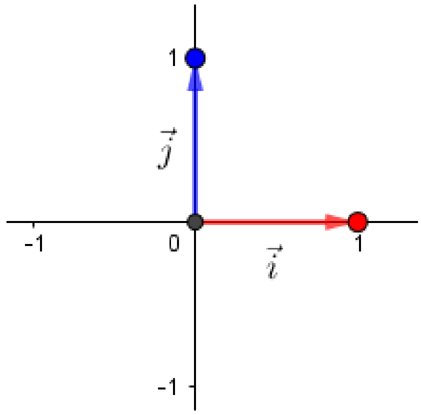
8. Hallar el área limitada por la recta 5x+y-5=0, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. Hacer el dibujo. (Soluc: $\frac{5}{2}u^2$)

ESQUEMA ECUACIONES DE LA RECTA

ECUACIÓN	RECTA GENÉRICA $r=\{A=(a_1,a_2),\vec{v}_r=(v_1,v_2)\}$	RECTA GENÉRICA $r=\{A=(1,-2),\vec{v}_r=(-3,-5)\}$
VECTORIAL	$r:(x,y)=(a_1,a_2)+\lambda(v_1,v_2),\ \lambda\in\mathbb{R}$	$r:(x,y)=(1,-2)+\lambda(-3,-5),\ \lambda\in\mathbb{R}$
PARAMÉTRICA	r: $\begin{cases} x=a_1+\lambda v_1 \\ y=a_2+\lambda v_2 \end{cases}\quad \lambda\in\mathbb{R}$	r: $\begin{cases} x=\ \ 1-3\lambda \\ y=-2-5\lambda \end{cases}\quad \lambda\in\mathbb{R}$
CONTINUA	$r:\ \dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}$ ($v_1\neq 0$, y $v_2\neq 0$)	$r:\ \dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+2}{-5}$
NORMAL	$r:n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)=0$	$r:-5(x-1)+3(y+2)=0$
GENERAL o IMPÍCITA (Se calcula desde la continua, la normal o la explícita	$r:Mx+Ny+D=0$ $\vec{n_r}=(M,N)\quad \vec{v_r}=(-N,M)$	$r:-5x+3y+11=0$ $\vec{n_r}=(-5,3)\quad \vec{v_r}=(3,5)$
PUNTO-PENDIENTE	$r:y-a_2=m(x-a_1)$ Pendiente: $m=\dfrac{v_2}{v_1}=tan\,\alpha$	$r:y+2=\dfrac{5}{3}(x-1)$ Pendiente: $m=\dfrac{-5}{-3}=\dfrac{5}{3}$
EXPLÍCITA	$r:y=mx+n$ m=Pendiente de la recta n=ordenada en el origen.	$r:y=\dfrac{5}{3}x-\dfrac{11}{3}$



	EJE OX	EJE OY
DETERMINACIÓN	$OX=\{O,\vec{i}\}$ $O=(0,0)\vec{i}=(1,0)$	$OY=\{O,\vec{j}\}$ $O=(0,0)\vec{j}=(0,1)$
VECTORIAL	$(x,y)=\lambda(1,0)$ $(\lambda\in R)$	$(x,y)=\lambda(0,1)$ $(\lambda\in R)$
PARAMÉTRICA	$\begin{cases}x=\lambda\\y=0\end{cases}(\lambda\in R)$	$\begin{cases}x=0\\y=\lambda\end{cases}(\lambda\in R)$
CONTINUA	No tiene	No tiene
NORMAL	$\vec{j}\cdot(x,y)=0$ $0x+1y=0$	$\vec{i}\cdot(x,y)=0$ $1x+0y=0$
GENERAL	$y=0$	$x=0$
EXPLÍCITA	$y=0$	No tiene



De manera similar obtenemos como serán las ecuaciones de las rectas horizontales y verticales:

	RECTA HORIZONTAL QUE PASA $A(a_1,a_2)$	RECTA VERTICAL QUE PASA $A(a_1,a_2)$
DETERMINACIÓN	$r=\{A,\vec{i}\}$ $A=(a_1,a_2)\vec{i}=(1,0)$	$r=\{A,\vec{j}\}$ $A=(a_1,a_2)\vec{j}=(0,1)$
VECTORIAL	$(x,y)=(a_1,a_2)+\lambda(1,0)(\lambda\in R)$	$(x,y)=(a_1,a_2)+\lambda(0,1)(\lambda\in R)$
PARAMÉTRICA	$\begin{cases}x=a_1+\lambda\\y=a_2\end{cases}(\lambda\in R)$	$\begin{cases}x=a_1\\y=a_2+\lambda\end{cases}(\lambda\in R)$
CONTINUA	No tiene	No tiene
GENERAL	$y=a_2$	$x=a_1$
EXPLÍCITA	$y=a_2$	No tiene