

Nombre y apellidos:

Fecha límite de entrega: 20 / 11 / 24

Instrucciones:

- Se entregará esta hoja con las resoluciones de los ejercicios grapadas.
- Se escribirá la respuesta de cada apartado en esta hoja.
- Deberá justificarse la resolución de cada uno de los ejercicios. En caso contrario no se valorará el apartado.
- Una vez resuelto el ejercicio hay que redactar correctamente la solución. En caso contrario no se valorará completamente el apartado.
- Este boletín sirve para reforzar los contenidos vistos en clase de cara a los exámenes. No es sustitutivo de un correcto estudio de los materiales de clase: apuntes, exámenes previos, tareas, etc.

Ejercicios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOTAL	NOTA
Puntos	1	1,5	1,5	1	1	1	1	1	1	10	10
Nota											

1. Sin usar calculadora, calcular las razones trigonométricas directas de los siguientes ángulos: a) 2760° b) -3270° . Para ello reduce previamente a un ángulo del primer cuadrante.

RESPUESTA:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos 2760^\circ &= -\frac{1}{2} \\ \sin 2760^\circ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 2760^\circ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 3270^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 3270^\circ &= -\frac{1}{2} \\ \tan 3270^\circ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

2. Sabiendo que $\sin \alpha = -3/5$ y que α está en el 3º cuadrante, determinar de manera exacta y sin calculadora:

a) $\sin 2\alpha$

b) $\cos(\alpha + 60^\circ)$

c) $\tan \frac{\alpha}{2}$

RESPUESTA: a) $\frac{24}{25}$

b) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$

c) -3

3. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\sec 3x = 3\sec x - 4\sec^3 x$

b) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$

c) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = \tan^2 \alpha$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos(2x) = -3\cos(x)$

b) $10\sin 2\alpha + 3\cos \alpha = 0$

RESPUESTA: a) $\alpha_1 \approx 106^\circ + K360^\circ$
 $\alpha_2 \approx 254^\circ + K360^\circ$

b) $\alpha_1 = 90^\circ + K360^\circ$
 $\alpha_2 = 270^\circ + K360^\circ$
 $\alpha_3 = -9^\circ + K360^\circ$
 $\alpha_4 = 189^\circ + K360^\circ$

5. Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37° . Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso.

RESPUESTA: Altura globo: $71,6 \text{ m}$

Longitud cable: 119 m

6. Para salvar un barranco de 24 m de profundidad se quiere construir un puente. Desde cada una de las orillas se ve la misma piedra del fondo bajo ángulos de depresión 42° y 28° respectivamente. Calcula la longitud del puente.

RESPUESTA: $71,79$

7. Para medir la altura de una torre CD (D es el punto más alto y C la base) se sigue el siguiente procedimiento. Se toman dos puntos de referencia A y B que distan entre ellos 20 m. Luego se miden los siguientes ángulos:

$$\angle BAD = 57^\circ \quad \angle ABD = 60^\circ \quad \angle CBD = 70^\circ$$

Se pide determinar la altura de la torre de manera exacta y luego aproximarla con 3 cifras significativas.

RESPUESTA: EXACTA: $\frac{20 \sin 57^\circ \sin 70^\circ}{\sin 63^\circ}$ APROXIMADA: $17,7 \text{ m}$

8. Un faro está sobre un acantilado. Desde un barco tomamos un punto C y la parte superior del faro se ve con un ángulo de elevación de 75° . Situándose en un punto D 30 m más lejos, se constata que dicho ángulo de elevación se transforma en 60° , y que el de la base del faro vale 40° . ¿Cuál es la altura del faro y del acantilado?

RESPUESTA: Altura faro: 50 m

Altura acantilado: 47 m

9. Dos barcos salen de dos puertos distintos A y B situados en la línea de costa. Se encuentran en un mismo punto en el mar a una distancia de ~~32~~ 30 km del puerto A y a 15 km del puerto B. Sabiendo que ambos puertos distan 20 km, se pide:

a) Determinar con qué ángulo sale el barco A con respecto a la línea de costa.

RESPUESTA: $26,38^\circ$

b) Determinar a qué distancia se encuentran de la línea de costa.

RESPUESTA: $13,33 \text{ km}$

NOTA: Se puede suponer que la línea de costa es una línea recta.

$$\textcircled{1} \text{ a) } 2760^\circ : 360^\circ = \begin{cases} C=7 \\ R=240^\circ \end{cases} \quad 2760^\circ = 7 \cdot 360^\circ + 240^\circ$$

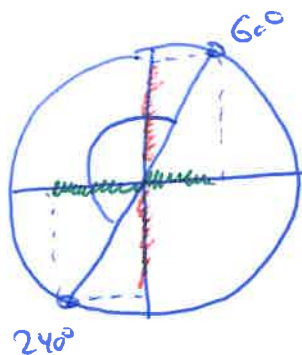
Las razones de 2760° coinciden con las de 240°

Razones de 240° (3º cuadrante)

$$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \frac{\sin 240^\circ}{\cos 240^\circ} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} = \sqrt{3}$$



$$240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

Solución

$$\cos 2760^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 2760^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 2760^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{b) } 3270^\circ : 360^\circ = \begin{cases} C=9 \\ R=30^\circ \end{cases} \quad \begin{aligned} 3270^\circ &= 9 \cdot 360^\circ + 30^\circ \\ -3270^\circ &= 9 \cdot (-360^\circ) - 30^\circ \end{aligned}$$

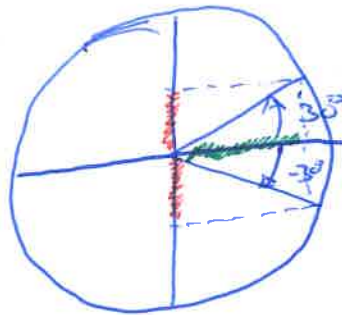
Las razones de -3270° coinciden con las de -30°

Razones de -30°

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(-30^\circ) = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Solución

$$\cos(-3270^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-3270^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(-3270^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\textcircled{2} \quad \sin \alpha = -\frac{3}{5} \quad 180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$$

$$\text{a) } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

CÁLCULO DE $\cos \alpha$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$b) \cos(\alpha + 60^\circ) = \cos \alpha \cos 60^\circ - \sin \alpha \sin 60^\circ = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{4}{10} + \frac{3\sqrt{3}}{10} = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$$

$$c) \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{-\frac{3}{5}} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{9}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{9}{-3} = -3$$

③ a) $\sin(3x) = \sin(x+2x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x$

$$= \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos x (2 \sin x \cos x) = \sin x \cos^2 x - \sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3 \sin x (1 - \sin^2 x) - \sin^3 x$$

$$= 3 \sin x - 3 \sin^3 x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

b) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$

$$= (\cos \alpha \cos \beta)^2 - (\sin \alpha \sin \beta)^2 = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta =$$

$$= \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \cos^2 \alpha) \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$c) \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = 2 \tan^2 \alpha$$

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{1 - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} = \frac{\overset{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cancel{\sin^2 \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = 2 \tan^2 \alpha$$

$$(4) a) \cos 2x = 3 \cos x \rightarrow \cos^2 x - \overset{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x} = 3 \cos x \rightarrow$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0 \rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x - 3 \cos x = 0$$

$$\rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 1 = 0 \quad \begin{cases} \cos x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \approx 1.78 & (1) \\ \cos x = \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \approx -0.281 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cos x = 1.78 \quad \left. \begin{array}{l} \text{No solution pues } -1 \leq \cos x \leq 1 \\ \alpha_1 = \arccos\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right) + K360^\circ \approx 106^\circ + K360^\circ \\ \alpha_2 = 360^\circ - \alpha_1 + K360^\circ \approx 254^\circ + K360^\circ \end{array} \right\} \text{SOLUCIONES}$$

$$(2) \cos x = \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha_1 = \arccos\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right) + K360^\circ \approx 106^\circ + K360^\circ \\ \alpha_2 = 360^\circ - \alpha_1 + K360^\circ \approx 254^\circ + K360^\circ \end{array} \right\} K \in \mathbb{Z}$$

$$b) 10 \sin 2\alpha + 3 \cos \alpha = 0 \rightarrow 10(2 \sin \alpha \cos \alpha) + 3 \cos \alpha = 0 \rightarrow 20 \sin \alpha \cos \alpha + 3 \cos \alpha = 0$$

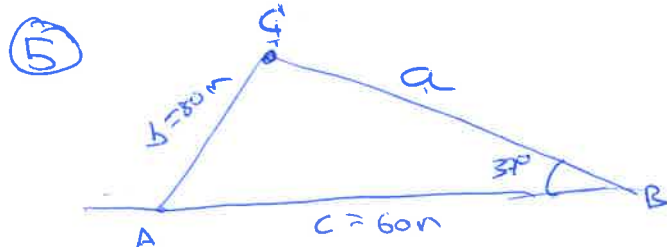
$$\rightarrow \cos \alpha (20 \sin \alpha + 3) = 0 \quad \begin{cases} \cos \alpha = 0 & (1) \\ 20 \sin \alpha + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cos \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 90^\circ + K360^\circ \\ \alpha_2 = 270^\circ + K360^\circ \end{cases}$$

$$(2) 20 \sin \alpha + 3 = 0 \rightarrow 20 \sin \alpha = -3 \rightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{20} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \approx -9^\circ + K360^\circ \\ \alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 + K360^\circ \\ \quad \quad \quad \approx 189^\circ + K360^\circ \end{cases}$$

SOLUCIONES

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 90^\circ + K360^\circ \\ \alpha_2 &= 270^\circ + K360^\circ \\ \alpha_3 &= -9^\circ + K360^\circ \\ \alpha_4 &= 189^\circ + K360^\circ \end{aligned} \quad K \in \mathbb{Z}$$



1) CÁLCULO DE A

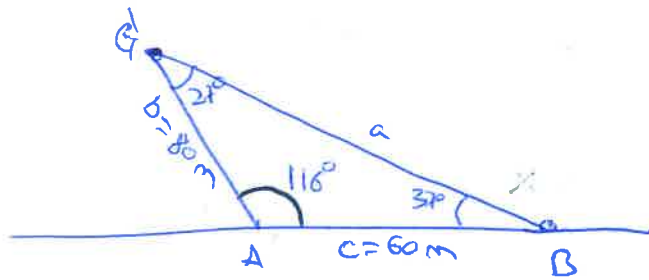
$$\frac{\text{TSENO}}{\text{SNO}} \quad \frac{60}{\sin A} = \frac{80}{\sin 37^\circ} \rightarrow \sin A = \frac{60 \sin 37^\circ}{80}$$

$$\rightarrow \sin A = \frac{6 \sin 37^\circ}{8}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A_1 = \arcsin\left(\frac{6 \sin 37^\circ}{8}\right) \approx 27^\circ \\ A_2 = 180^\circ - A_1 \approx 153^\circ \end{cases}$$

Hay 2 posibilidades:

1ª POSIBILIDAD $C' = 27^\circ$



$$A = 180^\circ - 27^\circ - 37^\circ = 116^\circ$$

T. SENO

$$\frac{a}{\sin 116^\circ} = \frac{60}{\sin 27^\circ} \rightarrow a = \frac{60 \sin 116^\circ}{\sin 27^\circ} \rightarrow$$

$$a \approx 119 \text{ m}$$

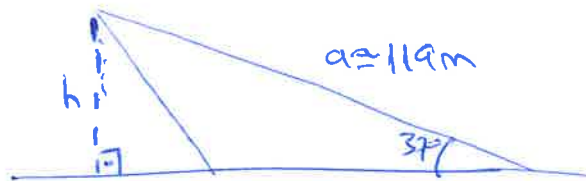
2ª POSIBILIDAD

$$C' = 153^\circ$$

No puede ser pues $D + C = 153 + 37 = 190^\circ$

No válida

2) CÁLCULO DE h

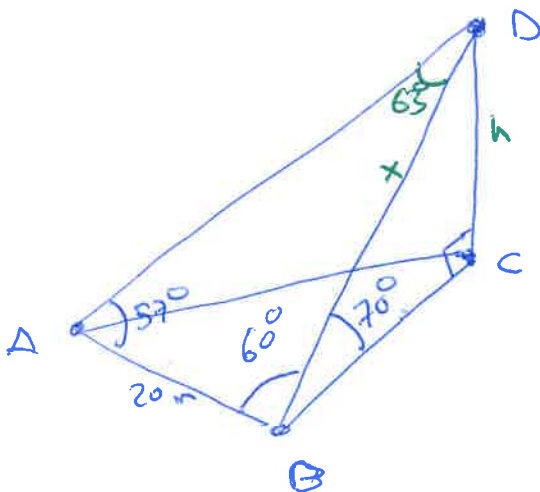


$$\sin 37^\circ = \frac{h}{119} \rightarrow h = 119 \sin 37^\circ$$

$$\rightarrow h \approx 71,6 \text{ m}$$

SOLUCIÓN: El cable más extenso mide 119 m y el globo está a 71,6 m.

(7)



1) CÁLCULO DE x

T. SENO

$$\frac{x}{\sin 57^\circ} = \frac{20}{\sin 63^\circ} \rightarrow x = \frac{20 \sin 57^\circ}{\sin 63^\circ}$$

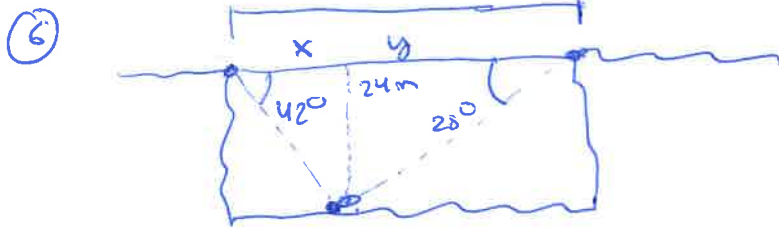
$$\rightarrow x \approx 18,8 \text{ m}$$

2) CÁLCULO DE h

$$\sin 70^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \sin 70^\circ$$

$$\rightarrow h = \frac{20 \sin 57^\circ}{\sin 63^\circ} \sin 70^\circ \approx 17,7 \text{ m}$$

SOLUCIÓN: El edificio mide 17,7 m



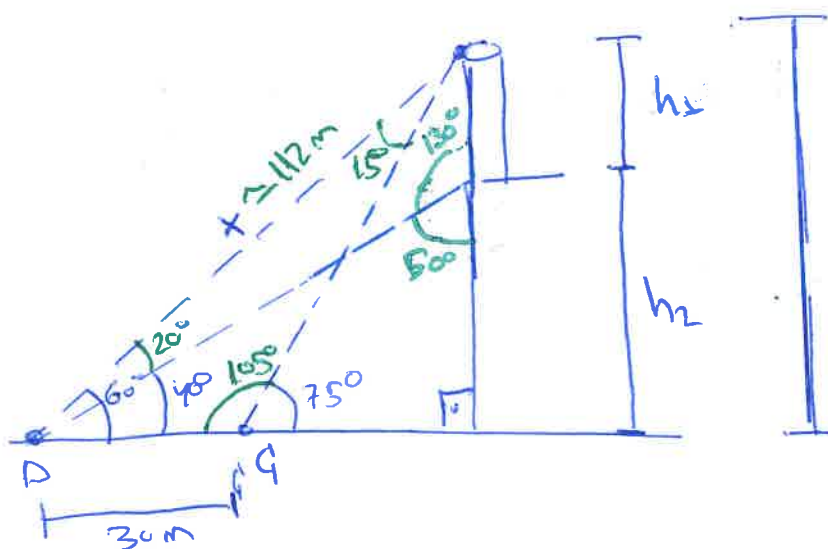
$$\tan 42^\circ = \frac{24}{x} \rightarrow x = \frac{24}{\tan 42^\circ}$$

$$\tan 28^\circ = \frac{24}{y} \rightarrow y = \frac{24}{\tan 28^\circ}$$

La longitud del puente $\Rightarrow$

$$L = x + y = \frac{24}{\tan 42^\circ} + \frac{24}{\tan 28^\circ} = 71,79$$

⑧



$$H = h_1 + h_2 \approx 97m$$

1) CÁLCULO DE X T.SENO $\frac{X}{\sin 105^\circ} = \frac{30}{\sin 15^\circ} \rightarrow X = \frac{30 \sin 105^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 112m$

2) CÁLCULO DE h1 T.SENO $\frac{h_1}{\sin 20^\circ} = \frac{112}{\sin 130^\circ} \rightarrow h_1 = \frac{112 \sin 20^\circ}{\sin 130^\circ} \approx 50m$

3) CÁLCULO DE H

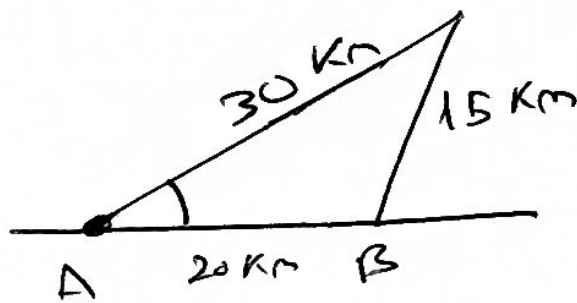
$$\sin 60^\circ = \frac{H}{X} \rightarrow H = X \sin 60^\circ = 112 \sin 60^\circ \approx 97m$$

4) CÁLCULO DE h2

$$h_2 = H - h_1 = 97 - 50 = 47m$$

SOLUCIÓN: El faro mide 50 m y el acantilado 47 m

9 a)



T. COSENO

$$15^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos \hat{A}$$

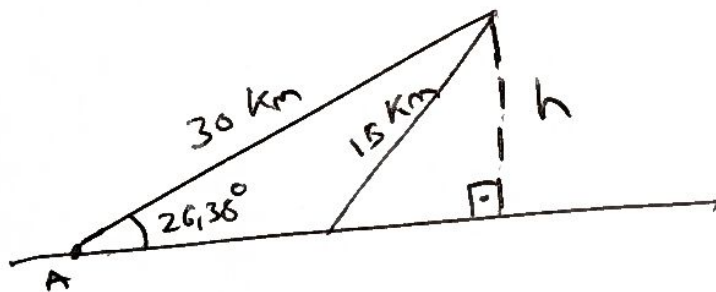
$$2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos \hat{A} = 30^2 + 20^2 - 15^2$$

$$\cos \hat{A} = \frac{30^2 + 20^2 - 15^2}{2 \cdot 30 \cdot 20}$$

$$\hat{A} = \arccos \left(\frac{30^2 + 20^2 - 15^2}{2 \cdot 30 \cdot 20} \right) \approx 26,38^\circ$$

SOLUCIÓN: $26,38^\circ$

b)



$$\sin 26,38^\circ = \frac{h}{30}$$

$$h = 30 \sin 26,38^\circ \approx \underline{13,33 \text{ km}}$$

SOLUCIÓN: $13,33 \text{ km}$