2. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-3)$ y $\vec{v}=(1,1)$, calcular:

a. El ángulo que forman

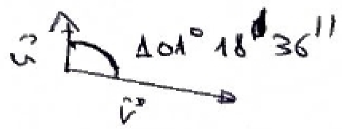
b. Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ que sea unitario

c. Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ de módulo 7

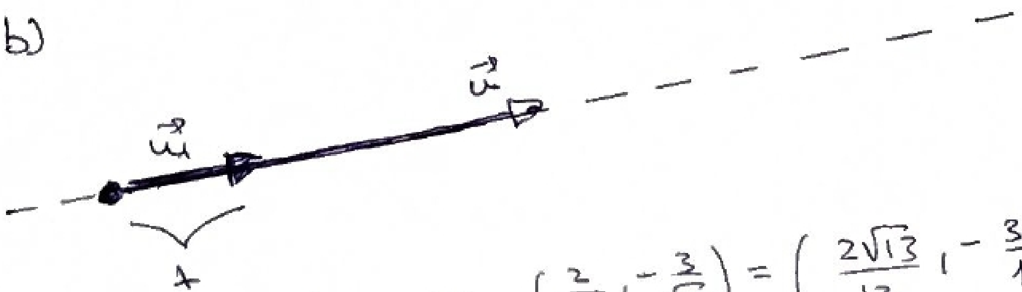
d. ¿Es $\vec{u}$ ortogonal al vector $\vec{w}=(4,5)$? En caso contrario, buscar un vector ortogonal a $\vec{u}$ con el mismo módulo y otro con módulo 5.

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{(2,-3)\cdot(1,1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\,\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{2-3}{\sqrt{13}\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{26}}$

$\alpha = \arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{26}}\right) \simeq 101^\circ 18' 36''$



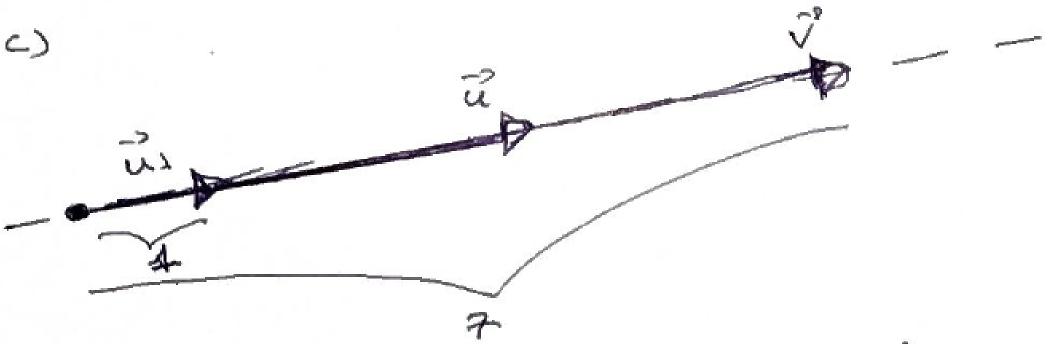
b)



$\vec{u}_1 = \dfrac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2,-3) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, -\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right) = \left(\dfrac{2\sqrt{13}}{13}, -\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\right)$

$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$

c)



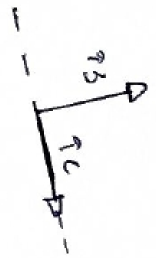
$\vec{V} = 7\vec{u}_1 = 7\left(\dfrac{2\sqrt{13}}{13}, \dfrac{-3\sqrt{13}}{13}\right) = \left(\dfrac{14\sqrt{13}}{13}, -\dfrac{21\sqrt{13}}{13}\right)$

d) No son ortogonales ya que:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,-3)\cdot(4,5) = 8-15 = -7 \neq 0$

Un vector ortogonal a $\vec{u}=(2,-3)$ y con el mismo módulo es

$\vec{n} = (3,2)$ (también valdría $\vec{n} = (-3,-2)$)



Un vector ortogonal a $\vec{u}$ de módulo 5 sería

$$\vec{V} = \frac{5}{|\vec{n}|}\vec{n} = \frac{5}{\sqrt{13}}(3,2) = \left(\frac{15}{\sqrt{13}}, \frac{10}{\sqrt{13}}\right) = \left(\frac{15\sqrt{13}}{13}, \frac{10\sqrt{13}}{13}\right)$$

4. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-1)$ y $\vec{v}=(a,3)$, calcular a de modo que:

   a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales
   b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen un ángulo de 60^o
   c) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan la misma dirección

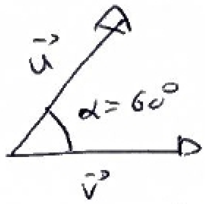
a) $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,-1)\cdot(a,3) = 2a-3$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2a-3 = 0 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$

Solución: $a = \frac{3}{2}$

b)



$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}}$$

$$\cos 60° = \frac{(2,-1)\cdot(a,3)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\,\sqrt{a^2+3^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2a-3}{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+9}} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2a-3}{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+9}}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{(2a-3)^2}{(\sqrt{5})^2(\sqrt{a^2+9})^2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{4a^2-12a+9}{5\,(a^2+9)}$$

$$\Rightarrow 5(a^2+9) = 4(4a^2-12a+9) \Rightarrow 5a^2+45 = 16a^2-48a+36$$

$$\Rightarrow 0 = 16a^2-48a+36-5a^2-45 \Rightarrow 0 = 11a^2-48a-9 \checkmark$$

$$\Rightarrow 11a^2-48a-9=0 \quad \begin{cases} \to a_1 = \dfrac{24+15\sqrt{3}}{11} \simeq 4{,}54 \\ \to a_2 = \dfrac{24-15\sqrt{3}}{11} \simeq -0{,}18 \end{cases}$$

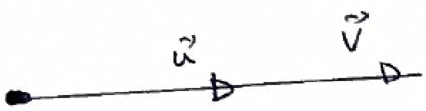
<u>comprobación</u>

- $\dfrac{2\cdot 4{,}54-3}{\sqrt{5}\,\sqrt{4{,}54^2+9}} \simeq \dfrac{1}{2}$ ✓ $\quad a_1 \simeq 4{,}54$ es válida

- $\dfrac{2\cdot(-0{,}18)-3}{\sqrt{5}\,\sqrt{(-0{,}18)^2+9}} \neq \dfrac{1}{2}$ ✗ $\quad a_2 \simeq -0{,}18$ no es válida.

<u>SOLUCIÓN</u>: $a \simeq \dfrac{24+15\sqrt{3}}{11}$

c)

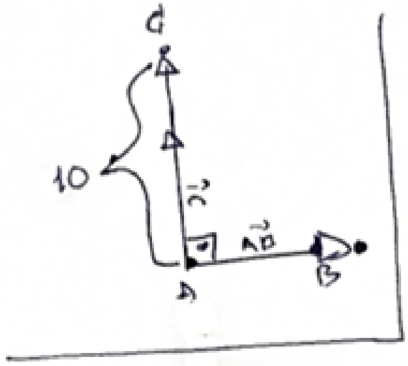


$$\boxed{\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y}}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{3} \Rightarrow 6 = -a \Rightarrow \boxed{a=-6}$$

<u>SOLUCIÓN</u>: $\boxed{a=-6}$

9. Considerar los puntos $A(1,2)$ y $B(4,6)$. Hallar un punto C tal que el segmento AB sea $\perp$ al segmento AC y de longitud 10. Hallar el área del triángulo ABC. (Es recomendable hacer previamente un dibujo)



El vector $\boxed{\vec{AC} = \frac{10}{|\vec{n}|}\vec{n}}$

$\vec{AB} = B - A = (4,6) - (1,2) = (3,4)$

$\vec{n} = (4,-3)$

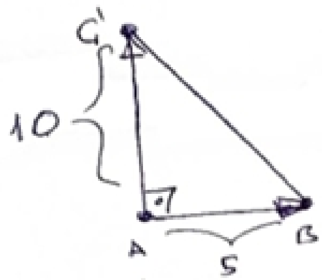
$|\vec{n}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{AC} = \frac{10}{|\vec{n}|}\vec{n} = \frac{10}{5}(4,-3) = 2(4,-3) = (8,-6)$

Luego $C = A + \vec{AC} = (1,2) + (8,-6) = (9,-4)$

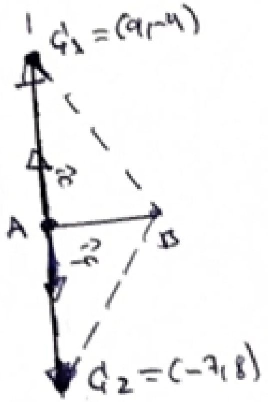
Como ADC es un triángulo rectángulo en A su área es:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BASE \cdot ALTURA = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \, |\vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25 \ u^2$



En este ejercicio hay otro punto posible, que sería el que obtendríamos tomando como vector normal $-\vec{n} = (-4,3)$

$C_2 = A - \vec{AC_1} = (1,2) - (8,-6) = (-7,8)$

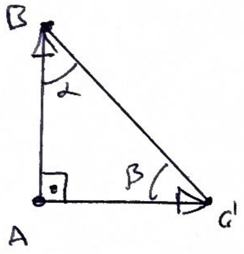


COMPROBACIÓN

$$C_1 = (9,-4) \quad \begin{cases} 3\cdot 9 + 4\cdot(-4) = 11 \ ✓ \\ (9-1)^2 + (-4-2)^2 = 100 \ ✓ \end{cases} \Bigg| \Rightarrow C_1 \text{ es válida}$$

$$C_2 = (-7,8) \quad \begin{cases} 3\cdot(-7) + 4\cdot 8 = 11 \ ✓ \\ (-7-1)^2 + (8-2)^2 = 100 \ ✓ \end{cases} \Bigg| \Rightarrow C_2 \text{ es válida}$$

10. Demostrar que los puntos $A(-3{,}2)$, $B(1{,}9)$ y $C(4,-2)$ forman un triángulo rectángulo en A y calcular cuanto miden sus lados, sus ángulos y su área.



Para comprobar que es rectángulo en A hay que ver que

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

Se calculan:

$\vec{AB} = B - A = (1,9) - (-3,2) = (4,7)$

$\vec{AC} = C - A = (4,-2) - (-3,2) = (7,-4)$

Se tiene que:

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (4,7) \cdot (7,-4) = 28 - 28 = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AC}$

Se concluye que es rectángulo en A.

$\boxed{\text{LADOS}}$

$\overline{AB} = |\vec{AB}| = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65}$ ud

$\overline{AC} = |\vec{AC}| = \sqrt{7^2+(-4)^2} = \sqrt{65}$ ud

Aplicando Pitágoras

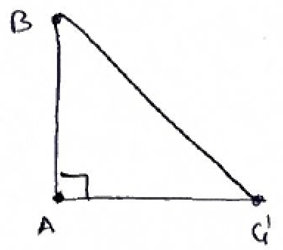
$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \Rightarrow \overline{BC}^2 = (\sqrt{65})^2 + (\sqrt{65})^2 \Rightarrow \overline{BC}^2 = 130 \Rightarrow$

$\overline{BC} = \sqrt{130}$ ud

$\boxed{\text{ÁNGULOS}}$ Como el triángulo es isósceles los ángulos α y β deben de coincidir. Se concluye entonces

$\hat{A} = 90^\circ \qquad \hat{B} = \hat{C} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

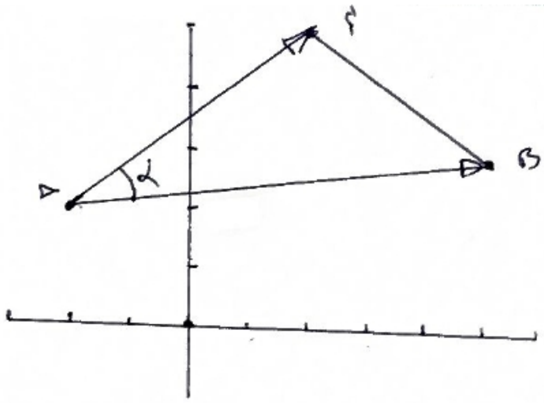
$\boxed{\text{ÁREA}}$



$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \text{BASE} \cdot \text{ALTURA} = \frac{1}{2} |\vec{AC}| \, |\vec{AB}| = \frac{1}{2} \sqrt{65}\sqrt{65}$

$= \frac{65}{2}$ ud^2

12.Representar graficamente el triángulo de vértices A=(-2,2), B=(5,3) y C=(2,5) y hallar también su área.



Se va a usar la fórmula

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\ \overline{AC}\ \text{sen}\,\alpha$

Teniendo en cuenta que

$\overline{AB} = |\vec{AB}|$ y $\overline{AC} = |\vec{AC}|$

la fórmula queda:

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\vec{AB}|\,|\vec{AC}|\ \text{sen}\,\alpha}$$

$\vec{AB} = B - A = (5,3) - (-2,2) = (7,1)$

$\vec{AC} = C - A = (2,5) - (-2,2) = (4,3)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\ ud$

$|\vec{AC}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5\ ud$

Para calcular α usamos que:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AC}|} = \frac{(7,1)\cdot(4,3)}{5\sqrt{2}\cdot 5} = \frac{28+3}{25\sqrt{2}} = \frac{31}{25\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{31}{25\sqrt{2}}\right) \simeq 28^{\circ}44'23''$$

Por lo tanto:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\vec{AB}|\,|\vec{AC}|\ \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot 5\cdot \text{sen}(28^{\circ}44'23'') = \frac{25\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}(28^{\circ}44'23'')$$

$$\simeq 8{,}499\ldots \simeq 8{,}5\ ud^2$$

SOLUCIÓN $\boxed{S_{ABC} \simeq 8{,}5\ ud^2}$

- El ejercicio también se puede hacer de forma exacta teniendo en cuenta que:

$\boxed{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1}$ y que $\cos\alpha = \frac{31}{25\sqrt{2}} = \frac{31\sqrt{2}}{25\cdot 2} = \frac{31\sqrt{2}}{50}$

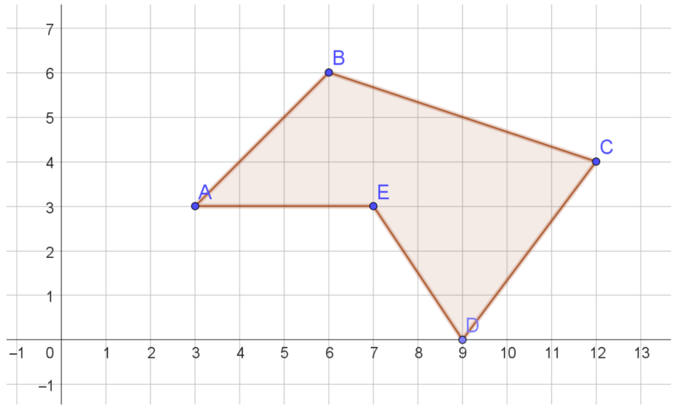
$$\left(\frac{31\sqrt{2}}{50}\right)^2 + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{31^2\cdot 2}{50^2} + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{961}{1250} + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{961}{1250} \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{289}{1250} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = +\sqrt{\frac{289}{1250}} = \frac{17\sqrt{2}}{50}$$

Por lo tanto:

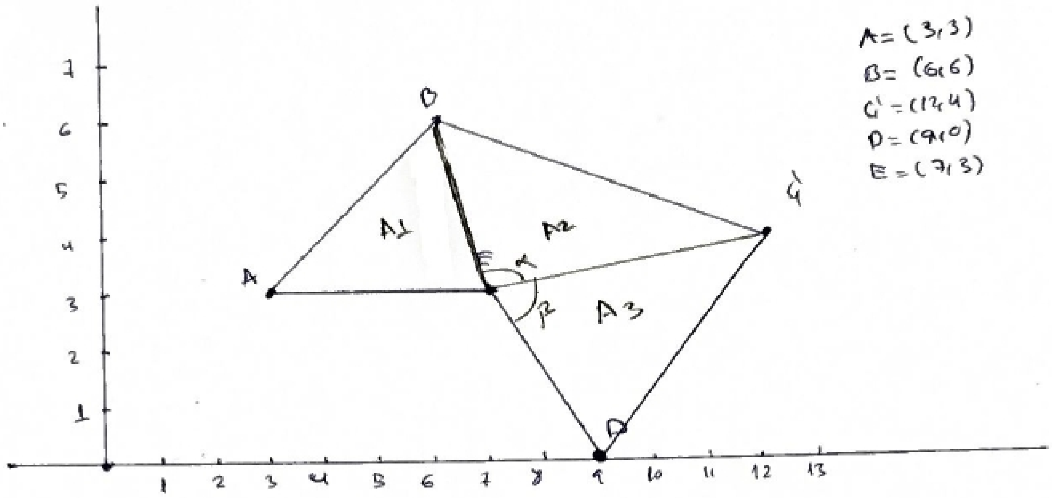
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB}||\vec{AC}| \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{17\sqrt{2}}{50} = \frac{25 \cdot 2 \cdot 17}{2 \cdot 50} = \frac{17}{2}\, m^2$$

19. La piscina de una urbanización tiene la forma que se indica en la imagen (coordenadas en metro. Se quiere vallar con una valla que cuesta $15€/m$ y cubrir con una lona que cuesta $10€/m^2$.



a) ¿Cuánto cuesta vallar y cubrir la piscina?(SOL 347,59 €; 225 €)

b) Si la piscina tuviese una profundidad de 2 m, ¿cuánta agua haría falta para llenarla? (SOL: 45 m^3)



a) Hay que hallar área y perímetro

PERÍMETRO $\quad P = |\vec{AB}| + |\vec{BC}| + |\vec{CD}| + |\vec{DE}| + |\vec{EA}|$

$\vec{AB} = B - A = (6,6) - (3,3) = (3,3) \rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ m

$\vec{BC} = C - B = (12,4) - (6,6) = (6,-2) \rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ m

$\vec{CD} = D - C = (9,0) - (12,4) = (-3,-4) \rightarrow |\vec{CD}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ m

$\vec{DE} = E - D = (7,3) - (9,0) = (-2,3) \rightarrow |\vec{DE}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ m

y claramente $|\vec{EA}| = 4$ ud

Luego $P = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{10} + 5 + \sqrt{13} + 4 \simeq \underline{23,17\,m}$

COSTO VALLA $= 23,17\,m \cdot 15\,\frac{€}{m} \simeq \underline{347,55\,€}$

ÁREA $A = A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot BASE \cdot ALTURA = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6\ m^2$

$A_2 = \frac{1}{2} |\vec{EB}||\vec{EC}| \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{26} \cdot \operatorname{sen} 97^\circ \simeq 8\ m^2$

$$\begin{cases} \vec{EB} = B - E = (6,6) - (7,3) = (-1,3) \Rightarrow |\vec{EB}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}\ m \\ \vec{EC} = C' - E = (12,4) - (7,3) = (5,1) \Rightarrow |\vec{EC}| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}\ m \\ \cos \alpha = \frac{\vec{EB} \cdot \vec{EC}}{|\vec{EB}||\vec{EC}|} = \frac{(-1,3)\cdot(5,1)}{\sqrt{10}\ \sqrt{26}} = \frac{-2}{\sqrt{260}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{260}}\right) \simeq 97^\circ \end{cases}$$

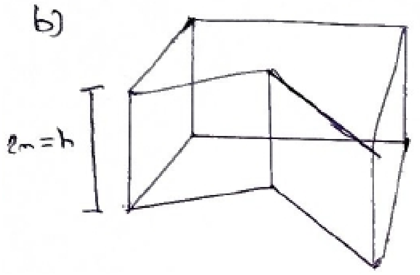
$A_3 = \frac{1}{2} |\vec{EC}|\, |\vec{ED}| \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{13} \cdot \operatorname{sen} 68^\circ \simeq 8{,}5\ ud$

$$\begin{cases} \vec{EC} = C' - E = (12,4) - (7,3) = (5,1) \Rightarrow |\vec{EC}| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}\ m \\ \vec{ED} = D - E = (9,0) - (7,3) = (2,-3) \Rightarrow |\vec{ED}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\ m \\ \cos \beta = \frac{\vec{EC} \cdot \vec{ED}}{|\vec{EC}|\, |\vec{ED}|} = \frac{(5,1)\cdot(2,-3)}{\sqrt{26}\ \sqrt{13}} = \frac{7}{13\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{7}{13\sqrt{2}}\right) \simeq 68^\circ \end{cases}$$

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 6 + 8 + 8{,}5 \simeq 22{,}5\ m^2$

COSTO CUBRIR $= 22{,}5\ m^2 \cdot 10 \frac{€}{m^2} = \underline{225\ €}$

b)



$V_{PRISMA} = A_{base} \cdot h$

$= 22{,}5 m^2 \cdot 2\ m = \underline{45\ m^3}$