

LECCIÓN 5. Base de vectores.

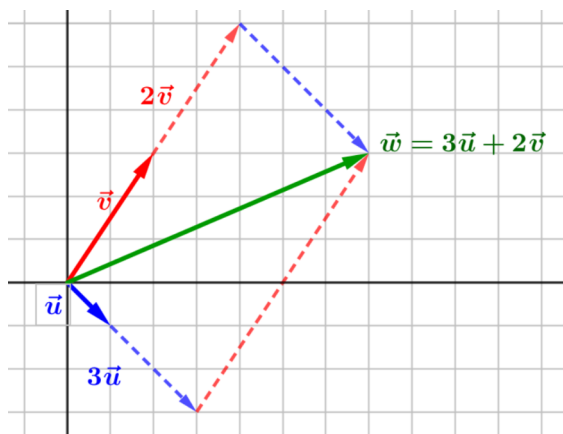
COMBINACIÓN LINEAL DE DOS VECTORES: Se dice que un vector $\vec{w}$ es combinación lineal (CL) de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si:

$$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}$$

Para ciertos escalares $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

EJEMPLO COMBINACIÓN LINEAL: Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3)$, un ejemplo de combinación lineal sería:

$$\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v} = (3, -3) + (4, 6) = (7, 3)$$



EJEMPLO 1. Escribir el vector $\vec{w} = (7, 1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 5)$. Representar gráficamente la combinación lineal.

$$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v} \Rightarrow (7, 1) = \lambda(2, -3) + \beta(3, 5) \Rightarrow (7, 1) = (2\lambda - 3\beta, 3\lambda + 5\beta)$$

De donde se obtiene el sistema :

$$\begin{cases} 2\lambda - 3\beta = 7 & \cdot 5 \\ 3\lambda + 5\beta = 1 & \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\lambda - 15\beta = 35 \\ 9\lambda + 15\beta = 3 \end{cases}$$

Al restar ambas ecuaciones se obtiene:

$$19\lambda = 38 \Rightarrow \lambda = 2$$

Para hallar β usamos sustituimos el valor obtenido de λ en la primera ecuación:

$$2 \cdot 2 - 3\beta = 7 \Rightarrow 4 - 3\beta = 7 \Rightarrow -3\beta = 3 \Rightarrow \beta = -1$$

Solución:

$$\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$$

BASE: Se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una **base** de vectores si cualquier otro vector $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

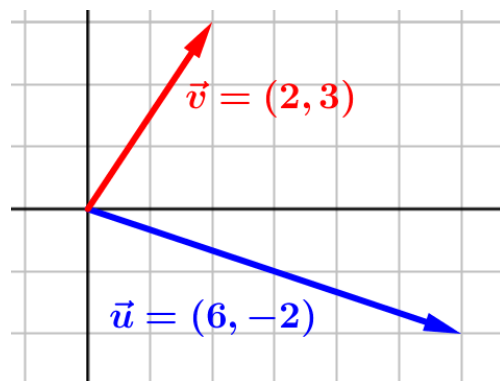
$$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v} \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

A los valores escalares λ y β se les llama **coordenadas de $\vec{w}$ en la base $\vec{u}, \vec{v}$** .

PROPIEDAD: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base si y solo si :

- 1) $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ (No nulos)
- 2) $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ (No paralelos)

Un ejemplo de base podría ser el de la imagen:



Demostración

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos y no paralelos, vamos a ver como un tercer vector $\vec{w}$ se puede escribir como CL de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Tomamos los tres vectores referenciados al origen de coordenadas y seguimos los siguientes pasos:

1) Dibujamos los ejes definidos por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

2) Trazamos las paralelas a dichos ejes pasando por el extremo de $\vec{w}$.

3) Dibujamos los puntos A y B que se obtienen como intersección de los ejes y las paralelas dibujadas.

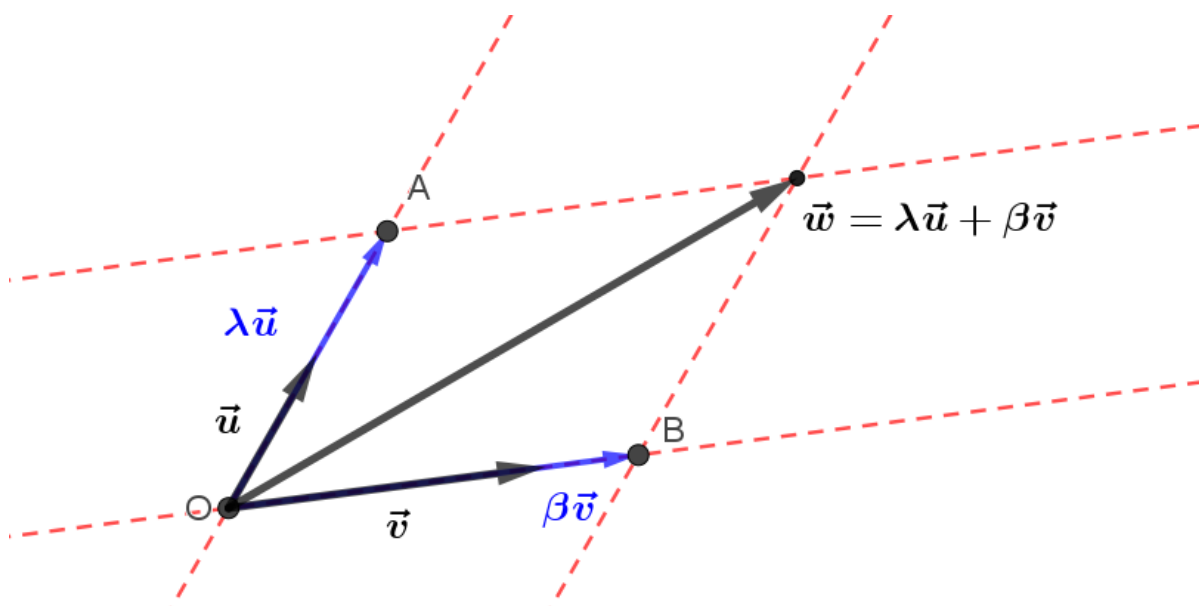
4) Como O y A se encuentran sobre el eje definido por $\vec{u}$ se va a tener que $\vec{OA}$ va a ser proporcional a $\vec{u}$ y por lo tanto

$$\vec{OA} = \lambda \vec{u} \text{ para un cierto escalar } \lambda.$$

De la misma manera se deduce que:

$$\vec{OB} = \beta \vec{v} \text{ para un cierto escalar } \beta.$$

5) Claramente, $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v}$.



EJEMPLO 2: Comprobar que los vectores $\vec{u} = (4, 5)$ y $\vec{v} = (2, 3)$ forman una base y expresar $\vec{w} = (4, -2)$ como una CL de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Escribir las coordenadas de $\vec{w}$ en la base $\vec{u}, \vec{v}$.

Los vectores $\vec{u} = (4, 5)$ y $\vec{v} = (2, 3)$ son

1) No nulos

2) No paralelos, pues $\frac{4}{2} \neq \frac{5}{3}$

Por lo tanto forman una base. Vamos a expresar $\vec{w} = (4, -2)$ como una combinación lineal de la base:

$$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \beta \vec{v} \Rightarrow (4, -2) = \lambda(4, 5) + \beta(2, 3) \Rightarrow (4, -2) = (4\lambda, 5\lambda) + (2\beta, 3\beta) \\ \Rightarrow (4, -2) = (4\lambda + 2\beta, 5\lambda + 3\beta)$$

De donde se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 4\lambda + 2\beta = 4 & \cdot 6 \rightarrow -12\lambda - 6\beta = -12 \\ 5\lambda + 3\beta = 2 & \cdot 2 \rightarrow 10\lambda + 6\beta = 4 \\ \hline -2\lambda = -8 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

Sustituyendo en la 1ª ecuación el valor obtenido de λ se obtiene el valor de β :

$$4 \cdot 4 + 2\beta = 4 \rightarrow 16 + 2\beta = 4 \rightarrow 2\beta = -12 \rightarrow \beta = -6$$

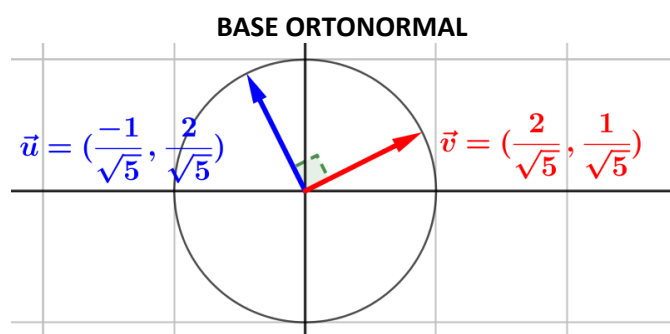
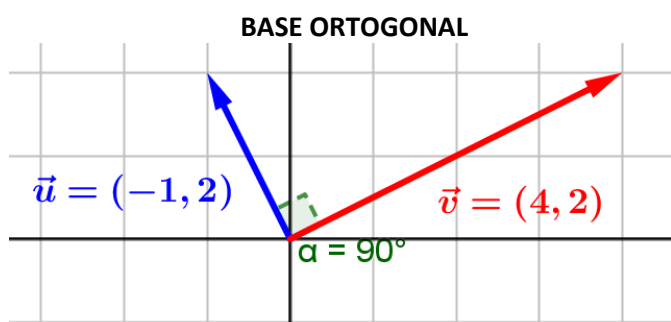
Se tiene entonces que $\vec{w} = 4\vec{u} - 6\vec{v}$

SOLUCIÓN: Las coordenadas de $\vec{w}$ en la base son 4 y -6.

BASE ORTOGONAL: Se dice que una base es ortogonal si los vectores son perpendiculares (ortogonales).

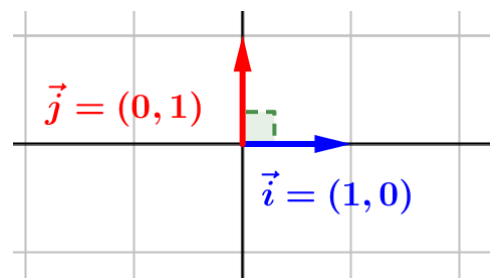
BASE ORTONORMAL: Una base se dice ortonormal si es ortogonal y además los vectores son unitarios (tienen módulo 1)

[CALCULADORA DE COORDENADAS](#)



De entre todas las bases ortonormales la base más importante de todas es la **base canónica** dada por los vectores unitarios definidos por los ejes coordenados:

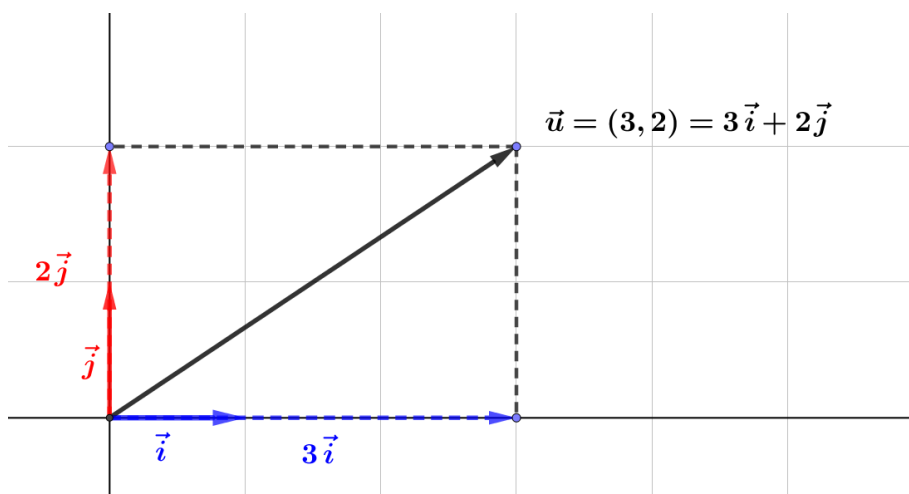
$$\vec{i} = (1, 0) \quad \vec{j} = (0, 1)$$



Las coordenadas de un vector $\vec{u}$ en la base canónica son lo que normalmente llamamos coordenadas

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} = u_x(1, 0) + u_y(0, 1) = (u_x, 0) + (0, u_y) = (u_x, u_y)$$

Por ejemplo:



EJERCICIOS

- ¿Forman $\vec{u} = (-2, 1)$ y $\vec{v} = (4, -2)$ una base?
- Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 3)$ y $\vec{v} = (5, 4)$ se pide:
 - Razonar que forman una base.
 - Obtener las coordenadas de $\vec{w} = (12, 5)$ en la base anterior.
 - Explicar gráficamente la situación.
- Dados los vectores $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (-2, 3)$ se pide:
 - Razonar que forman una base.
 - Obtener las coordenadas de $\vec{w} = (-12, 1)$ en la base anterior. (SOL: -2 y 3)
 - Explicar gráficamente la situación.