LECCIÓN 4. Producto escalar

Se define el **producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$** como:

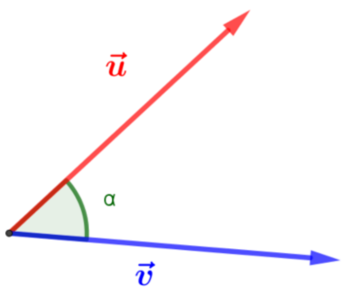
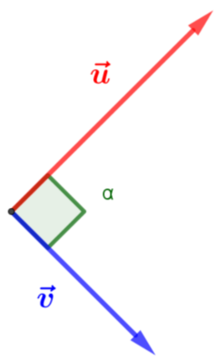
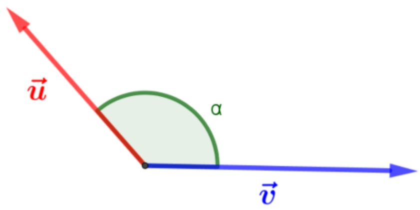
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\alpha$$

siendo α el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Ese ángulo se escribe a veces como $\alpha = \angle(\vec{u},\vec{v})$.

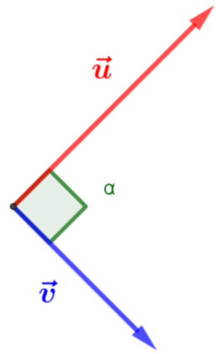
EJEMPLO 1: *Calcular el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 6$ y que forman un ángulo de 80^o.*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\alpha = 3\cdot 6\cdot\cos 80^\circ = 18\cos 80^\circ \approx 3,13$$

Es evidente que el **signo del producto escalar coincide con el signo de $\cos\alpha$ y depende exclusivamente del ángulo** α . Se deduce entonces que:

Si el ángulo es **agudo** ($0^0 \le \alpha < 90^0$), entonces $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$.	Si el ángulo es **recto** ($\alpha = 90^o$), entonces $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.	Si el ángulo es **obtuso** ($90^o < \alpha < 180^o$),entonces $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$.
		

VECTORES ORTOGONALES: dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales o perpendiculares si forman entre ellos un ángulo recto (90°) . Para decir que dos vectores son ortogonales escribimos $\vec{u}\perp\vec{v}$.



CONDICIÓN DE ORTOGONALIDAD: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si y solo si su producto escalar es cero**:**

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

EXPRESIÓN ANALÍTICA: el producto escalar de dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, se puede expresar analíticamente como:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

EJEMPLO 2: *Calcular el producto escalar de los siguientes vectores $\vec{u} = (-1,3)$ y $\vec{v} = (-1,3)$ $\vec{v}=(3,1)$ e indica si son ortogonales.*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1,3)\cdot(3,1) = (-1)\cdot 3 + 3\cdot 1 = -3+3 = 0$$

Por lo tanto se tiene $\vec{u}\perp\vec{v}$, es decir son ortogonales.

ÁNGULO QUE FORMAN 2 VECTORES:
Utilizando la expresión analítica del producto escalar podemos **calcular el ángulo** α **que forman dos vectores** $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ usando que:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$$

EJEMPLO 3: *Calcular el ángulo que forman* $\overrightarrow{u} = (-3,4)$ *y* $\overrightarrow{v} = (2,2)$

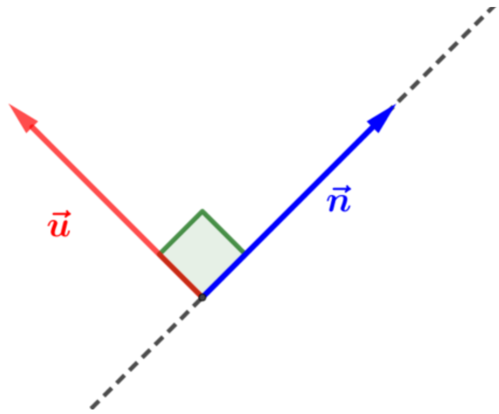
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|} = \frac{(-3,4)\cdot(2,2)}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{-6+8}{\sqrt{25}\sqrt{8}} = \frac{2}{5\sqrt{8}}$$

Se tiene entonces:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{8}}\right) \approx 81°52'12''$$

VECTOR NORMAL : Un problema que surge muchas ocasiones en geometría es, dado un vector $\overrightarrow{u}$,encontrar un vector ortogonal $\overrightarrow{n}$ al vector dado, que vamos a llamar **vector normal**.

Utilizando la condición de ortogonalidad se deduce fácilmente que un posible vector normal de $\vec{u}$ viene dado por:



$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2) \perp \overrightarrow{n} = (u_2, -u_1)$$

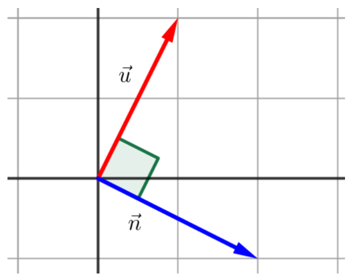
De esta manera,

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n} = u_1u_2 + u_2(-u_1) = u_1u_2 - u_2u_1 = 0$$

y por lo tanto $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{n}$.

NOTA: evidentemente el vector $\overrightarrow{n}$ así calculado no es el único vector normal(perpendicular) al vector $\overrightarrow{u}$. Hay más vectores, pero todos proporcionales a $\overrightarrow{n}$ (es decir vectores de la forma $\lambda\overrightarrow{n}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$)

EJEMPLO 4: *Calcular un vector ortogonal a* $\overrightarrow{u} = (1,2)$ *y representa ambos:*



El vector $\overrightarrow{n} = (2,-1)$ *es ortogonal a* $\overrightarrow{u}$.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR:

1) Conmutativa: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
2) Asociativa mixta: $(\lambda\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\cdot(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$
3) Distributiva: $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$

Estas propiedades se pueden demostrar fácilmente usando cualquiera de las dos expresiones del producto escalar.

NOTA IMPORTANTE: no confundir **producto por un escalar** $\lambda\vec{u}$, que da como resultado un vector, con el **producto escalar de dos vectores** $\vec{u}\cdot\vec{v}$**,** que da como resultado un escalar.

EJERCICIOS

1. Dados los vectores $\vec{u}=(5,0)$ y $\vec{v}=(2,2)$ se pide: a) Dibujarlos b) Calcular su producto escalar de dos formas posibles y comprobar que coinciden en resultado.

2. **Dados los vectores $\vec{u}=(2,-3)$ y $\vec{v}=(1,1)$, calcular:**
   a. **El ángulo que forman**
   b. **Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ que sea unitario**
   c. **Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ de módulo 7**
   d. **¿Es $\vec{u}$ ortogonal al vector $\vec{w}=(4,5)$? En caso contrario, buscar un vector ortogonal a $\vec{u}$ con el mismo módulo y otro con módulo 5.**

3. Dados los vectores $\vec{u}=(3,-4)$ y $\vec{v}=(5,6)$, calcular:
   a. El ángulo que forman
   b. Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ que sea unitario
   c. Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ de módulo 15
   d. ¿Son $\vec{u}$ y $\vec{v}$ ortogonales? En caso contrario, buscar un vector cualquiera ortogonal a $\vec{u}$

   SOL:(a) $103^o 19'$ b) (3/5, -4/5) c) (9,-12) d) No; (4,3))

4. **Dados los vectores $\vec{u}=(2,-1)$ y $\vec{v}=(a,3)$, calcular a de modo que:**
   a. $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$**sean ortogonales (SOL: a=3/2)**
   b. $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ **formen un ángulo de** 60^o **(SOL:** $a=\frac{24+15\sqrt{3}}{11}$ **)**
   c. $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ **tengan la misma dirección (SOL: a=-6)**

5. Dados los vectores $\vec{a}=(1,-1)$ y $\vec{b}=(2,m)$, hallar m de forma que:
   a. $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ sean ortogonales (SOL: m=2)
   b. $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ tengan la misma dirección (SOL: m=-2)
   c. $\vec{b}$ sea unitario (SOL: $\nexists\, sol$¿
   d. $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ formen un ángulo de 45^o

6. Dados $\vec{a}=(3,-4)$ y $\vec{b}=(5,x)$, hallar x para que:
   a. Sean perpendiculares (SOL: $x=15/4$)
   b. Formen 30^o (SOL: $x_1\cong-2{,}1; x_2\cong-41{,}5$)
   c. Tengan la misma dirección (SOL:$x\cong-20/3$)

7. Dados $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(a,-3)$, se pide:
   a. Hallar a para que sean //. Justificar gráficamente la solución obtenida (SOL: a=-6)
   b. Hallar a para que sean $\perp$. Justificar gráficamente la solución obtenida (SOL: a=3/2)
   c. Hallar a para que formen 45^o. Justificar gráficamente la solución obtenida (SOL: a=9)
   d. Hallar un vector $\perp$ a $\vec{u}$ de módulo 5. (SOL: $(-\sqrt{5},2\sqrt{5})$ o su opuesto)

8. Dados $\vec{u}=(3,-4)$ y $\vec{v}=(a,2)$, se pide:
   a. Hallar a tal que $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$ (SOL: a=4)
   b. ¿Qué ángulo formarán $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el caso anterior? (SOL $\alpha\cong79^o 41' 43''$)
   c. Hallar a tal que $\vec{u}\,//\,\vec{v}$. Explicar gráficamente la situación (SOL: a=-3/2)
   d. Hallar un vector $\perp$ a $\vec{u}$ de módulo 10. Explicar gráficamente la situación (SOL: (8,6) o su opuesto)

9. **Considerar los puntos $A(1,2)$ y $B(4,6)$. Hallar un punto C tal que el segmento AB sea $\perp$ al segmento AC y de longitud 10. Hallar el área del triángulo ABC. (Es recomendable hacer previamente un dibujo) (Sol: (9,-4) o (-7,8); Aréa=25 u²)**

10. **Demostrar que los puntos $A(-3,2)$, $B(1,9)$ y $C(4,-2)$ forman un triángulo rectángulo en A y calcular cuanto miden sus lados, sus ángulos y su área.**

11. Dado el triángulo de vértices A(1,1), B(5,4) y C(-5,9), se pide:
    a. Dibujarlo.
    b. Demostrar que es rectángulo en A
    c. Hallar su área (SOL: 25 u^2)

12. **Representar graficamente el triángulo de vértices A=(-2,2), B=(5,3) y C=(2,5) y hallar también su área.**

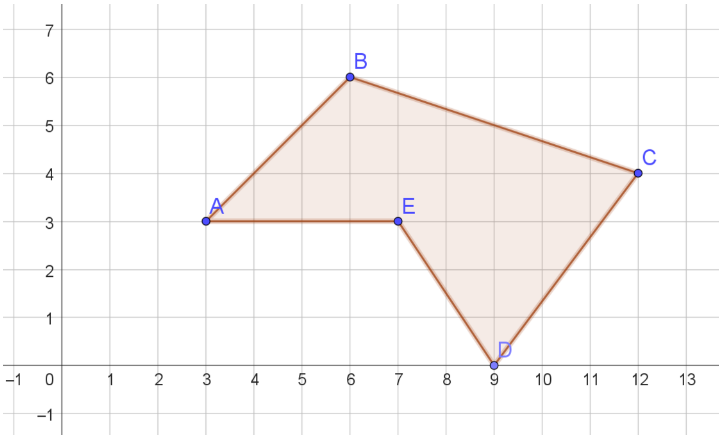
13. Ídem con A=(1,-2), B=(3,-1) y C=(2,1) y hallar su área (SOL=$2,5\,u^2$)
14. Ídem con A=(3,8), B=(-11,3) y C=(-8,-2) (SOL: $S_{ABC}=42,5\,u^2$)
15. Ídem con A=(4,-1), B=(2,1) y C=(0,2) (SOL: $S_{ABC}=1\,u^2$)

16. Dado el triángulo determinado por los puntos $A=(-3,2)$, $B=(1,1)$ y $C=(1,4)$ se pide: a) La longitud de sus lados b) Sus ángulos c) Su área. (Sol: a) 3; 4,47; 4,12 b) $63,43^o$; $40,6^o$; $75,96^o$ c) $6\,u^2$

17. Dado el triángulo determinado por los puntos $A=(-2,-3)$, $B=(2,-2)$ y $C=(1,1)$ se pide: a) La longitud de sus lados b) Sus ángulos c) Su área. (Sol: a) 3,16; 5; 4,12 b) $55,3^o$; $33,09^o$; $85,6^o$ c) $6,5\,u^2$)

18. Dado el triángulo determinado por los puntos $A=(-1,4)$, $B=(2,-2)$ y $C=(5,3)$ se pide: a) La longitud de sus lados b) Sus ángulos c) Su área. (Sol: a) 5,83; 6,08; 6,71 b) $68,5^o$; $53,97^o$; $57,53^o$ c) $16,5\,u^2$)

19. **La piscina de una urbanización tiene la forma que se indica en la imagen (coordenadas en metro. Se quiere vallar con una valla que cuesta $15€/m$ y cubrir con una lona que cuesta $10€/m^2$.**



    a. **¿Cuánto cuesta vallar y cubrir la piscina?(SOL 347,59 €; 225 €)**

    b. **Si la piscina tuviese una profundidad de 2 m, ¿cuánta agua haría falta para llenarla? (SOL: 45 m^3)**