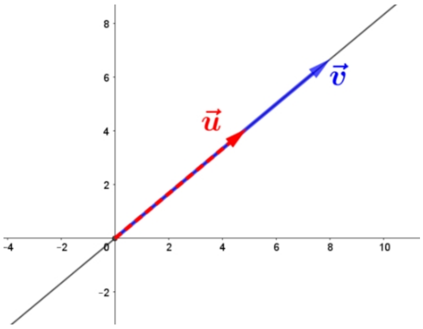
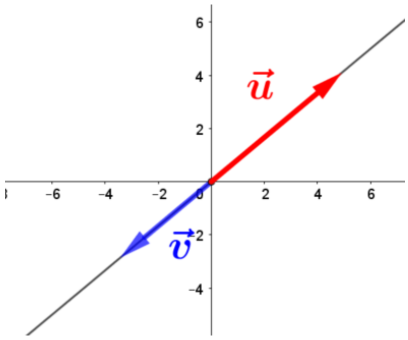
LECCIÓN 3. Condición de paralelismo.

Vamos a decir que dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son **paralelos** si tienen la misma dirección. Cuando dos vectores son paralelos escribimos $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ y cuando no lo son $\overrightarrow{u} \nparallel \overrightarrow{v}$





Evidentemente, para que dos vectores sean paralelos deben ser proporcionales, esto es $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$ para cierto valor de $\lambda \in \mathbb{R}$. Esto es lo mismo que decir:

CONDICIÓN DE PARALELISMO: Dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos si sus coordenadas son proporcionales:

$$\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y}$$

siempre y cuando las dos coordenadas de $\overrightarrow{v}$ sean distintas de cero. En el caso de que alguna de las coordenadas de $\overrightarrow{v}$ fuese cero, entonces la condición habría que reescribirla como:

$$\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow u_x \cdot v_y = u_y \cdot v_x$$

Esto es debido a la imposibilidad de hacer divisiones entre 0 en matemáticas.

EJEMPLO 1 *Comprobar si son paralelos los vectores:*

a) $\overrightarrow{u} = (-2,3)$ *y* $\overrightarrow{v} = (4,-6)$ *b)* $\overrightarrow{u} = (-2,3)$ *y* $\overrightarrow{v} = (4,5)$

---

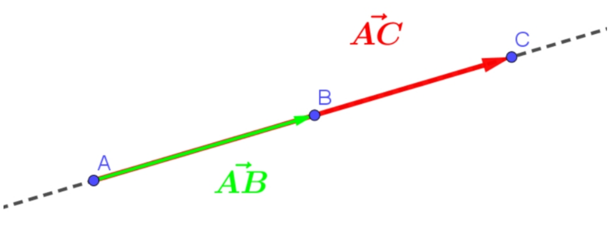
a) Como $\dfrac{-2}{4} = \dfrac{3}{-6}$ *entonces son paralelos (*$\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$*)*

b) Como $\dfrac{-2}{4} = \dfrac{3}{5}$ *entonces no son paralelos (*$\overrightarrow{u} \nparallel \overrightarrow{v}$*)*

CONDICIÓN DE COLINEALIDAD: los puntos A, B y C están **alineados** si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos (proporcionales)

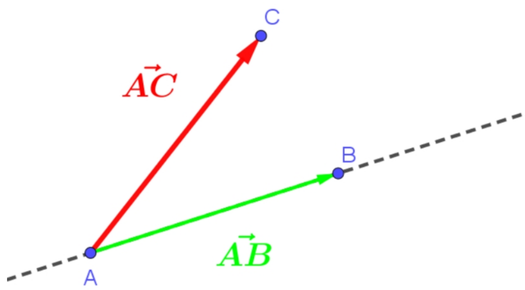
$$A,\ B,\ y\, C\, alineados \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$$

PUNTOS ALINEADOS



Vectores paralelos: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$

PUNTOS NO ALINEADOS



Vectores no paralelos: $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$

EJEMPLO 2: *¿Están alineados los puntos* $A=(0,1)$, $B=(-1,3)$ *y* $C=(1,-1)$*?*

Usaremos que: $A,\ B,\ y\,C\ alineados \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$

Calculamos los vectores:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,3) - (0,1) = (-1,2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = C - A = (1,-1) - (0,1) = (1,-2)$

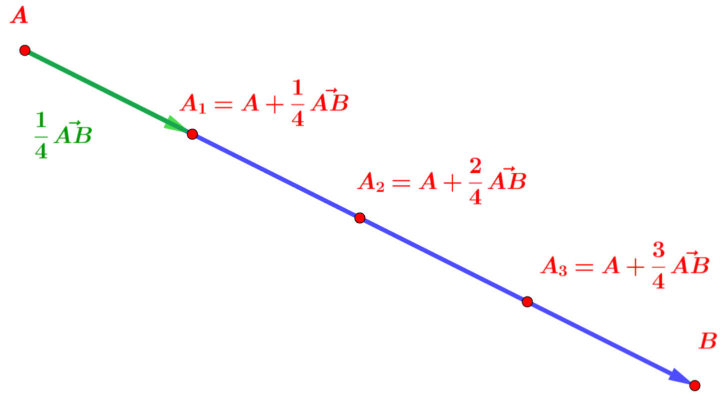
que son paralelos ya que:

$$\frac{-1}{1} = \frac{2}{-2}$$

Por lo tanto los puntos están alineados.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES: Si se divide el segmento AB en n partes iguales se obtienen $n-1$ puntos dados por

$$A_1 = A + \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$$
$$A_2 = A + \frac{2}{n}\overrightarrow{AB}$$
$$A_3 = A + \frac{3}{n}\overrightarrow{AB}$$
$$\vdots = \vdots$$



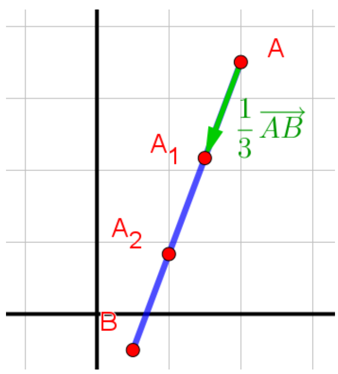
EJEMPLO 3: *Dividir el segmento determinado por los puntos* $A = (4,7)$ *y* $B = (1,-1)$ *en* 3 *partes iguales.*

Primero calculamos el vector:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,-1) - (4,7) = (-3,-8)$$

Los puntos que dividen al segmento AB en 3 partes iguales son:

$$A_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (4,7) + \frac{1}{3}(-3,-8) = (4,7) + (-1, \frac{-8}{3}) = (3, \frac{13}{3})$$
$$A_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (4,7) + \frac{2}{3}(-3,-8) = (4,7) + (-2, \frac{-16}{3}) = (2, \frac{5}{3})$$



EJERCICIOS

1. Determinar si están alineados los puntos
   a. $A=(2,3)$, $B=(4,5)$ y $C=(1,1)$ (SOL:NO)
   b. $A=(2,3)$, $B=(4,5)$ y $C=(7,8)$ (SOL: SÍ)

2. Dado el vector $\vec{u}=(6,8)$ se pide:
   a. Hallar los vectores unitarios paralelos a $\vec{u}$.
   b. Hallar un vector en la misma dirección que $\vec{u}$ de módulo 7.
3. Hallar los vectores paralelos a $\vec{u}=(2,-3)$ de módulo 3. (SOL: $\vec{u_1}=\left(\frac{6}{\sqrt{13}},\frac{-9}{\sqrt{13}}\right)$ y $\vec{u_2}=\left(\frac{-6}{\sqrt{13}},\frac{9}{\sqrt{13}}\right)$¿

4. **Hallar k para que los puntos A(4,2), B(-1,4) y C(k,5) estén alineados.**

5. Hallar k para que los puntos A(1,7), B(-3,4) y C(k,5) estén alineados. (SOL k=-5/3)

6. Dados A=(1,2) y B=(4,7) hallar los puntos que dividen al segmento en 4 partes iguales.

7. . Considerar el segmento de extremos A(-2,1) y B(5,4). Hallar:
   a. El punto medio M [Sol: M(3/2,5/2)]
   b. Los dos puntos P y Q que lo dividen en tres partes iguales. [Soluc: P(1/3,2) y Q(8/3,3)]

8. **Tres ciudades A, B y C se encuentran en línea recta en una carretera. Se sabe que la distancia entre las ciudades A y B es la tercera parte de la distancia entre las ciudades B y C. Sabiendo que, en un sistema de coordenadas, se tiene que A=(2,3) y B=(-4,5), ¿qué coordenadas tiene la ciudad C? (SOL: (-22,11))**

9. El segmento AB está divido en 5 partes iguales determinadas por 4 puntos, A_1, A_2, A_3 y A_4 . Se conocen las coordenadas del punto A=(1,1) y de A_3 =(4,5). Se pide determinar B. (SOL: (6, 7.67))

10. **Dados los puntos A= (1,1) , B=(3,5) , C=(7,10) y D=(5,6) , ¿Es ABCD un paralelogramo?**

11. **Sabiendo que ABCD es un paralelogramo, y que A=(-1,-1) , B=(-2,3) y C=(5,-2) se pide determinar las coordenadas del punto D y representarlo graficamente.**

12. La plaza de un pueblo tiene forma tiene forma de paralelogramo $ABCD$, en el que las longitudes de los lados son $\overline{AB} = 10m$, $\overline{AD} = 24m$ y $\widehat{BAD} = 30^o$
    a. Introducir unos ejes coordenados y calcular las coordenadas de los 4 puntos.
    b. Determinar el área de la plaza. (120 m²)
    c. Determinar las coordenadas del centro de la plaza. (SOL: (15.39,6))