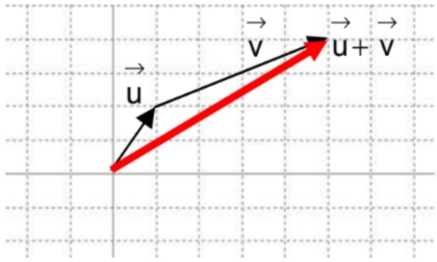
LECCIÓN 2. Operaciones básicas con vectores.

SUMA DE VECTORES



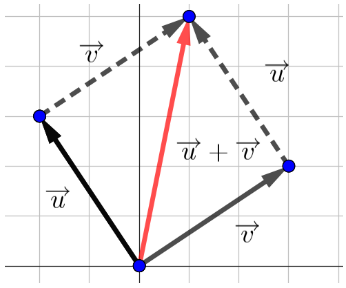
Se engancha el segundo vector al extremo del primero, y el vector suma de ambos será aquel que tiene su origen en el del primero y su extremo en el del último.

En coordenadas, si $\vec{u} = (u_x, u_y)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$, entonces:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

***EJEMPLO 1:** Calcular la suma de los vectores* $\vec{u} = (-2,3)$ *y* $\vec{u} = (3,2)$.

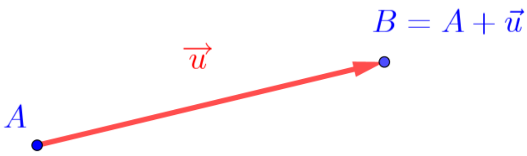
$$\vec{u} + \vec{v} = (-2,3) + (3,2) = (-2+3, 3+2) = (1,5)$$



PROPIEDADES SUMA DE VECTORES

1) Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2) Asociativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u}$
4) Elemento opuesto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

SUMA PUNTO Y VECTOR

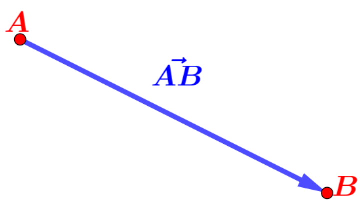


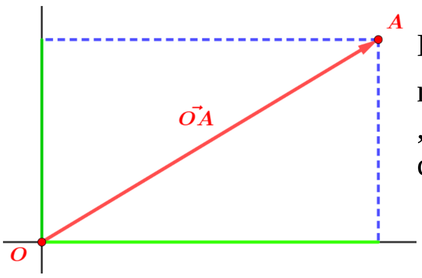
Cuando sumamos a un punto $A = (a_x, a_y)$ y un vector $\vec{u} = (u_x, u_y)$ obtenemos otro punto que se obtiene al desplazarse desde A en la dirección , sentido y longitud determinadas por $\vec{u}$.

$$B = A + \vec{u} = (a_x + u_x, a_y + u_y)$$

Está claro que el vector que hay que sumar a A para llegar al punto B es el vector $\overrightarrow{AB}$.

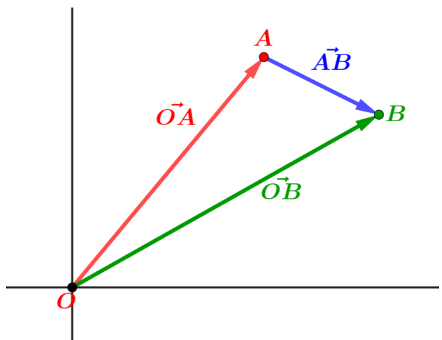
$$A + \overrightarrow{AB} = B$$





En realidad, los puntos no se pueden sumar, y cuando operamos con A realmente lo que estamos haciendo es identificar dicho punto con el vector $\overrightarrow{OA}$,conocido como **vector de posición de A** , cuyas coordenadas como vector coinciden con las coordenadas de A como punto

$$A = \overrightarrow{OA}$$



Usando dicha identificación la suma punto vector se puede entender como la suma de dos vectores.

Así cuando escribimos

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$

lo que estamos haciendo en verdad es la siguiente suma de vectores

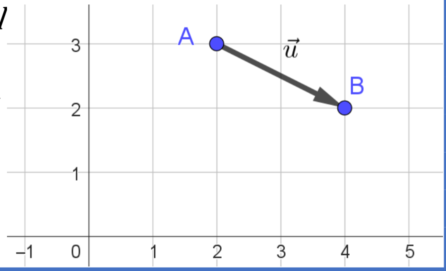
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

En resumen:

VECTOR + VECTOR = VECTOR   PUNTO + VECTOR = PUNTO   ~~PUNTO + PUNTO~~

EJEMPLO 2: *Dado el punto* $A = (2,3)$*, obtén el punto que se obtiene al desplazarte según el vector* $\overrightarrow{u} = (2,-1)$*. Dibuja la situación.*

$$B = A + \overrightarrow{u} = (2,3) + (2,-1) = (2+2, 3-1) = (4,2)$$



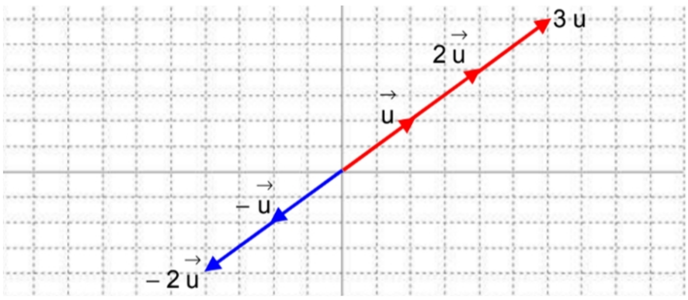
<u>PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR</u>

Dado un vector $\overrightarrow{u}$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se define su producto como el vector $\lambda\overrightarrow{u}$ con la **misma dirección** y :

- Si el escalar λ es <u>positivo</u> entonces la operación $\lambda\vec{u}$ dará lugar a un vector con el <u>mismo sentido</u> y cuyo módulo es amplificado/reducido tantas veces como nos indique el valor de λ
- Si el escalar λ es <u>negativo</u> entonces la operación $\lambda\vec{u}$ dará lugar a un vector con <u>sentido opuesto</u> y cuyo módulo es amplificado/reducido tantas veces como nos indique el valor de λ

Para ser más específicos, el módulo del vector $\lambda\overrightarrow{u}$ será:

$$\left|\overrightarrow{\lambda u}\right| = |\lambda|\,|\overrightarrow{u}|$$



En coordenadas, si $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y)$, entonces:

$$\lambda\overrightarrow{u} = (\lambda u_x\ ,\ \lambda u_y)$$

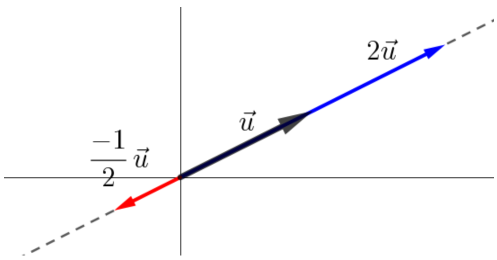
<u>PROPIEDADES PRODUCTO POR UN ESCALAR</u>

1) Asociativa: $\lambda\,(\mu\,\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\,\overrightarrow{u}$
2) Distributiva respecto a la suma de vectores: $\lambda\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$
3) Distributiva respecto a la suma de escalares: $(\lambda + \mu)\,\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\,\overrightarrow{u}$
4) Elemento neutro: $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

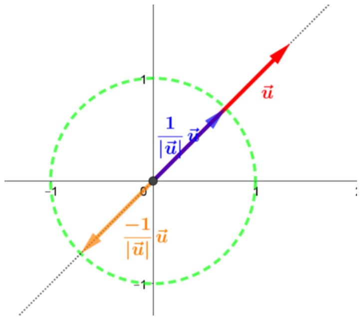
EJEMPLO 3: *Dado* $\overrightarrow{u} = (2,1)$*calcular y representar* $2\overrightarrow{u}$ *y* $-\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$ ***.***

$$2\overrightarrow{u} = 2(2,1) = (2\cdot 2, 2\cdot 1) = (4,2)$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{u} = -\frac{1}{2}(2,1) = ((-\frac{1}{2})\cdot 2, (-\frac{1}{2})\cdot 1) = (-1, -\frac{1}{2})$$



VECTOR UNITARIO:



Se dice que un vector es unitario si su módulo es igual a 1. Dado un vector $\vec{u}$ hay dos vectores con la misma dirección que $\vec{u}$ con módulo 1.

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|u|}\ \vec{u} \qquad\qquad \vec{u}_2 = -\vec{u}_1 = -\frac{1}{|u|}\ \vec{u}$$

EJEMPLO 4: *Dado* $\vec{u} = (-2,1)$
a) Calcular dos vectores unitarios en la dirección de $\vec{u}$*.*
b) Determina un vector en la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ *con módulo 3.*
c) Determina un vector en la misma dirección y sentido opuesto que $\vec{u}$ *con módulo 3.*

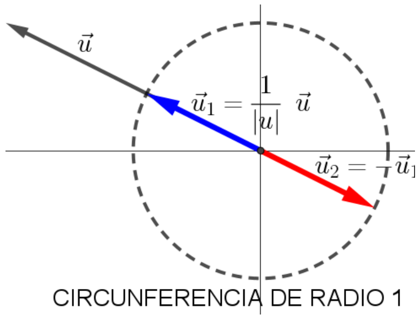
----

a) Determinamos el módulo del vector: $|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Los vectores pedidos son:

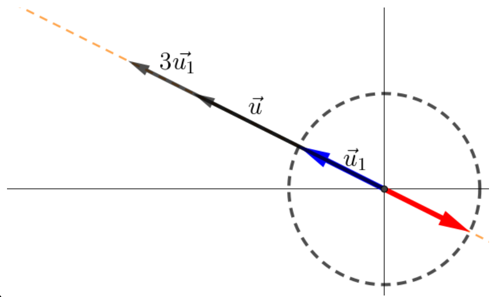
$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|u|}\ \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\approx (-0'89, 0'45)$$



$$\vec{u}_2 = -\vec{u}_1 = -\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \approx (0'89, -0'45)$$

b) Como el vector $\vec{u}_1$ *tiene módulo 1 , si lo multiplicamos por 3 obtenemos un vector de módulo 3 con la misma dirección y sentido que* $\vec{u}$*. El vector pedido es:*



$$\vec{v_1} = 3u_1 = 3\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right) \approx (-1'34, 0'44)$$

c) El vector pedido es

$$\vec{v_2} = -\vec{v_1} = -\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right) = \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}}{5}\right) \approx (1'34, -0'44)$$

Esto es lo mismo que si hubiesemos multiplicado $-\vec{u}_2$ *por* 3*.*

<u>EJERCICIOS</u>

1. Calcula dos vectores unitarios con la misma dirección que $\vec{u} = (7,3)$.

2. Determinar un vector con longitud 7 con la misma dirección que $\vec{u} = (5,3)$.

3. **Un coche, que se encuentra en el punto A=(3,2), avanza en línea recta durante 9 km según la dirección que indica el vector** $\vec{u} = (1,-2)$**. Determina las coordenadas del punto en el que se encuentra después del desplazamiento.**

4. Demostrar que si A, B, C, D y E son los vértices de un pentágono, entonces :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}$$

5. **Del paralelogramo** $ABCD$ **se conocen las coordenadas de los puntos** $A = (1,1)$ **,** $B = (2,3)$ **y** $D = (3,5)$**. Determinar las coordenadas del punto** C**. (SOL:** $C = (4,7)$ **)**

6. **Dos barcos salen de dos puertos que se encuentran en la linea de costa (que se puede suponer recta) y que distan entre ellos $5km$. El primer barco sale con un ángulo de 60^o con respecto a la línea de costa, con una trayectoria rectlínea avanza a una velocidad de $12km/h$ durante 2 horas, luego da un giro de -40^0 y avanza en línea recta con la misma velocidad. Al mismo tiempo, el segundo barco sale del segundo puerto con un ángulo de 30^o, con una trayectoria rectilínea y a una velocidad de $15km/h$. Se pide:**

   a) **Determinar a qué distancia se encuentran los barcos al cabo de 3 horas.**
   b) **¿A qué distancia se encuentran de la costa?**
   c) **Hacer una representación gráfica realista de la situación (con ejes coordenados y usando una regla).¿Se cruzan en algún momento las trayectorias de ambos barcos?.**

7. Un barco sale desde un puerto situado en una línea de costa recta. El barco parte con un ángulo de 30^0 y avanza en una trayectoria recta a una velocidad de 16 km/h. Al cabo de 2 horas y media se detiene y parte de la tripulación baja del barco y se sube en un bote. Luego ambos continúan avanzando a la misma velocidad. El barco mantiene su trayectoria y el bote da un giro de – 40^0 .

   a) ¿A qué distancia se encuentra el barco del bote transcurridas 4 horas? . Representa graficamente la situación. (SOL: 16,42 km)
   b) ¿A qué distancia se encuentra cada uno de los barcos de la línea de costa?(SOL: 32 km y 15,83 km)

8. **Se construye una carretera entres dos ciudades A y B. La carretera está formada por tramos rectos de carretera. El primer tramo mide $15km$, el segundo mide $7km$ y forma con el primero una curva de 30° y el tercero mide $9km$ y forma con el segunda una curva de -20^o . ¿A qué distancia se encuentran ambas ciudades?**

9. **Dados los puntos A=(1,1) y B=(2,3), determinar las coordenadas de un punto C que diste 2 unidades de A y de manera que $\widehat{CAB} = 20^0$ (sentido de giro antihorario con respecto al eje AB) . Determinar el área del triángulo resultante (SOL: C=(1'23, 2'99) ; S=0,765 m²)?**

10. Repetir el ejercicio anterior pero con un sentido de giro horario con respecto al eje AB. (SOL C=(2,'45, 2'37; S=0,765 m²)

11. En un parque urbano usamos un plano con ejes coordenados en metros. El acceso principal está en $A(100, 120)$ y la caseta de información en $B(180, 300)$. Queremos colocar una fuente C a exactamente 60 m del acceso de forma que el ángulo $\widehat{CAB}$ sea de 20°. Determinar las posibles ubicaciones de C. (SOL: (104'15, 179'86); (141'65 , 163'19))

12. Una hormiga sale de su hormiguero que se encuentra en una pared plana. Avanza durante $3m$ por el suelo, en una trayectoria rectilínea que forma un ángulo agudo desconocido con la pared α . Luego realiza un giro de $+\alpha$ y avanza durante otros $4m$. Sabiendo que se ha desplazado horizontalmente con respecto a la pared unos 5m, ¿con qué ángulo α sale la hormiga de la pared? Representa gráficamente la situación (SOL: 27^o aprox)

13. Un dron despega desde un punto situado junto a una pared vertical.
   - Primero avanza 50 m en línea recta formando un ángulo agudo α con la pared.
   - Luego realiza un giro de +α y recorre 80 m más.

   Al final del recorrido, se comprueba mediante GPS que el dron se ha desplazado 100 m paralelamente a la pared. ¿Con qué ángulo α salió inicialmente el dron respecto a la pared? (SOL : 26° aprox)