IES ILLA DE TAMBO CORRECCIÓN 1º BACH A **Examen matemáticas 1º bachillerato**

Nombre y apellidos: **Fecha:** ___/__ /____

Instrucciones:

- El examen se entregará en cuanto el profesor lo pida. En caso contrario el examen contará como no entregado y será calificado con un 0.
- No se puede salir de clase aún habiendo terminado el examen. El alumno esperará sentado hasta que el profesor abandone la clase.
- Queda prohibido el uso de típex y lápiz.
- Se permite el uso de calculadoras sin capacidad gráfica.
- Deberá de justificarse la resolución de cada uno de los ejercicios . En caso contrario no se valorará el apartado.
- Una vez resuelto el ejercicio hay que redactar correctamente la solución. En caso contrario no se valorará completamente el apartado.
- Hay que entregar todos los folios, también los que están en "sucio".

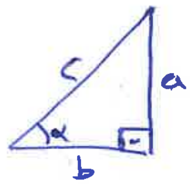
Ejercicios	1	2 a)	2 b)	3	4	5	TOTAL	NOTA
Puntos	1,5	1,25	1,25	2	2	2	10	10
Nota								

1. Responde **unicamente a una** de las dos siguientes preguntas teóricas:

   a) Explica razonadamente de donde se obtiene la fórmula fundamental de la trigonometría
   $$cos^2\,\alpha \;+\; sen^2\,\alpha \;=\; 1$$

   b) Demuestra que $tan(\alpha+\beta) = \dfrac{tan\alpha \,+\, tan\beta}{1 - tan\alpha\, tan\beta}$

a) Si aplicamos el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo con un ángulo α



$$a^2+b^2=c^2 \xrightarrow{:c^2} \frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1 \Rightarrow sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

b) $$tan(\alpha+\beta) = \frac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)} = \frac{sen\alpha\, cos\beta + cos\alpha\, sen\beta}{cos\alpha\, cos\beta - sen\alpha\, sen\beta} = \frac{\dfrac{sen\alpha\, cos\beta + cos\alpha\, sen\beta}{cos\alpha\, cos\beta}}{\dfrac{cos\alpha\, cos\beta - sen\alpha\, sen\beta}{cos\alpha\, cos\beta}} =$$

$$= \frac{\dfrac{sen\alpha\, cos\beta}{cos\alpha\, \cancel{cos\beta}} + \dfrac{\cancel{cos\alpha}\, sen\beta}{\cancel{cos\alpha}\, cos\beta}}{\dfrac{\cancel{cos\alpha}\, \cancel{cos\beta}}{\cancel{cos\alpha}\, \cancel{cos\beta}} - \dfrac{sen\alpha\, sen\beta}{cos\alpha\, cos\beta}} = \frac{\dfrac{sen\alpha}{cos\alpha} + \dfrac{sen\beta}{cos\beta}}{1 - \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}\cdot\dfrac{sen\beta}{cos\beta}} = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\, tan\beta}.$$

2. Sabiendo que $sen\,\alpha = -2/5$ y que $180^o \leq \alpha \leq 270^o$, se pide determinar de manera exacta el valor de las siguientes razones trigonométricas sin usar la calculadora, usando fórmulas trigonométricas:

0,75 1 1,25

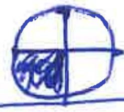
a) $sen(\alpha + 30°) = sen\alpha \cos 30^o + \cos\alpha\, sen\, 30^o = \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{10}$

CÁLCULO DE $\cos\alpha$ 0,75

$\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \frac{4}{25} = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{25} \Rightarrow$

$\cos^2\alpha = \frac{21}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

Sen − Cos −



Cos α es negativo pues α está en el 3º cuadrante

b) $cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{10}}$ 1,25

0,75

Signo de $\cos\alpha/2$ 0,75

$180^o \leq \alpha \leq 270^o \Rightarrow \frac{180^o}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{270^o}{2} \Rightarrow 90^o \leq \frac{\alpha}{2} \leq 135^o$

Cos − Sen +

$\Rightarrow$ Cos α/2 es negativo por estar $\frac{\alpha}{2}$ en el 2º cuadrante

3. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $2cos\,2\alpha + 3sen\,\alpha = 2$.

0,5

$\Rightarrow 2(\cos^2\alpha - sen^2\alpha) + 3\,sen\alpha = 2 \Rightarrow 2\cos^2\alpha - 2sen^2\alpha + 3\,sen\alpha = 2 \Rightarrow$

0,75

$2(1-sen^2\alpha) - 2sen^2\alpha + 3\,sen\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \cancel{2} - 2sen^2\alpha - 2sen^2\alpha + 3\,sen\alpha - \cancel{2} = 0$

1

$\Rightarrow -4\,sen^2\alpha + 3\,sen\alpha = 0 \Rightarrow sen\alpha(-4\,sen\alpha + 3) = 0$ → $sen\alpha = 0$ ①; → $-4\,sen\alpha + 3 = 0$, $sen\alpha = \frac{3}{4}$ ② 1,5

1,75

CASO 1

$sen\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = arc\,sen\,0 = 0^o$, $180^o - 0^o = 180^o$ $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0^o + K360^o \\ \alpha_2 = 180^o + K360^o \end{cases}$

2

CASO 2

$sen\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = arc\,sen\,\frac{3}{4} \simeq 49^o$, $180^o - 49^o \simeq 131^o$ $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 49^o + K360^o \\ \alpha_2 = 131^o + K360^o \end{cases}$

SOLUCIONES

$\alpha_1 = 0^o + K360^o$

$\alpha_2 = 49^o + K360^o$ $K \in \mathbb{Z}$

$\alpha_3 = 131^o + K360^o$

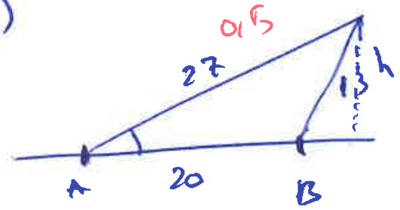
$\alpha_4 = 180^o + K360^o$

4. Dos barcos salen de dos puertos distintos A y B situados en la línea de costa. Se encuentran en un mismo punto en el mar a una distancia de 27 km del puerto A y a 13 km del puerto B. Sabiendo que ambos puertos distan 20 km.

a) Determinar con qué ángulo sale el barco A con respecto a la línea de costa

b) Determinar a qué distancia se encuentran de la línea de costa.

(1,5) a)

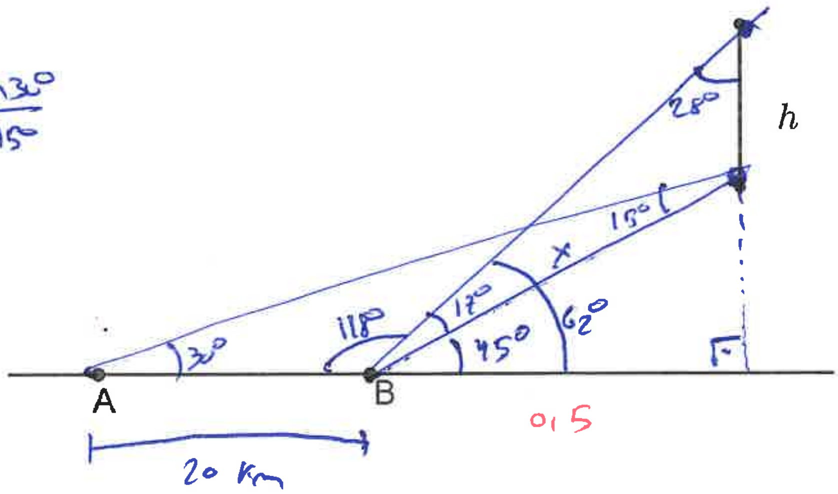


T. COSENO $13^2 = 27^2 + 20^2 - 2\cdot 27\cdot 20\cdot \cos\hat{A} \Rightarrow$

$\cos\hat{A} = \dfrac{27^2+20^2-13^2}{2\cdot 27\cdot 20} \Rightarrow \hat{A} \simeq 27{,}27^\circ$

(0,5) b) $\operatorname{Sen} 27{,}27^\circ = \dfrac{h}{27} \Rightarrow h = 27 \operatorname{Sen} 27{,}27^\circ \simeq 12{,}37$ Km

5. Un dirigible está sobrevolando un parque. Desde un punto A en el suelo se observa la base del dirigible con un ángulo de elevación de 30°. Tras avanzar 20 m hacia el dirigible, hasta un punto B, el ángulo de elevación a la base pasa a ser de 45°, y el ángulo de elevación a la parte superior es 62°. Se pide calcular la altura del dirigible h (distancia vertical entre su base y su parte superior) de manera exacta y aproximarlo con tres cifras significativas.



① CÁLCULO DE X 1,25

$\dfrac{x}{\operatorname{Sen} 30^\circ} = \dfrac{20}{\operatorname{Sen} 15^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{20 \operatorname{Sen} 30^\circ}{\operatorname{Sen} 15^\circ}$

② CÁLCULO DE h 2

$\dfrac{h}{\operatorname{Sen} 17^\circ} = \dfrac{x}{\operatorname{Sen} 28^\circ} \Rightarrow h = \dfrac{x \operatorname{Sen} 17^\circ}{\operatorname{Sen} 28^\circ}$

$\Rightarrow h = \dfrac{\frac{20 \operatorname{Sen} 30^\circ}{\operatorname{Sen} 15^\circ}\cdot \operatorname{Sen} 17^\circ}{\operatorname{Sen} 28^\circ}$

$\Rightarrow h = \dfrac{20 \operatorname{Sen} 30^\circ \operatorname{Sen} 17^\circ}{\operatorname{Sen} 15^\circ \operatorname{Sen} 28^\circ} \simeq 24{,}1$ m

IES ILLA DE TAMBO CORRECCIÓN 1º BACH B **Examen matemáticas 1º bachillerato**

Nombre y apellidos: **Fecha: ___/__/____**

Instrucciones:

- El examen se entregará en cuanto el profesor lo pida. En caso contrario el examen contará como no entregado y será calificado con un 0.
- No se puede salir de clase aún habiendo terminado el examen. El alumno esperará sentado hasta que el profesor abandone la clase.
- Queda prohibido el uso de típex y lápiz.
- Se permite el uso de calculadoras sin capacidad gráfica.
- Deberá de justificarse la resolución de cada uno de los ejercicios . En caso contrario no se valorará el apartado.
- Una vez resuelto el ejercicio hay que redactar correctamente la solución. En caso contrario no se valorará completamente el apartado.
- Hay que entregar todos los folios, también los que están en "sucio".

Ejercicios	1	2 a)	2 b)	3	4	5	TOTAL	NOTA
Puntos	1,5	1,25	1,25	2	2	2	10	10
Nota								

1. Responde **unicamente a una** de las dos siguientes preguntas teóricas:

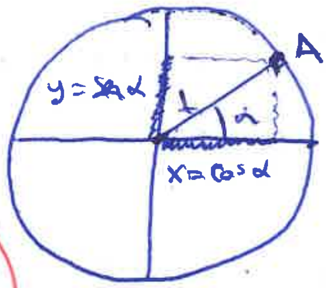
   a) Explica razonadamente con un dibujo como se definen las razones trigonométricas directas **para cualquier ángulo** y razona el signo de cada una de ellas en los distintos cuadrantes.

   b) Demuestra la fórmula

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

a) Consideramos la circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas

0,75



$A = (x, y) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

si A es el punto de corte de la semirecta que parte del origen con un ángulo α y la circunferencia, entonces las coordenadas de A son

$x = \cos\alpha$ ya que $\cos\alpha = \frac{x}{1}$

$y = \operatorname{sen}\alpha$, ya que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{1}$

Debido a esto el signo de $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ depende del cuadrante en el que estemos

1º CUADRANTE

Cos + Sen +

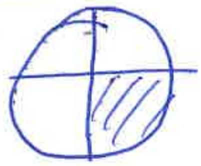
2º CUADRANTE

Cos − Sen +

3º CUADRANTE

Cos − Sen −

4º CUADRANTE



Cos + Sen −

0,75

2. Sabiendo que $cos\,\alpha = -\frac{4}{7}$ y que α está en el 3º cuadrante, se pide calcular de manera exacta y sin recurrir a la calculadora las siguientes razones trigonométricas. En caso de ser necesario, justificar el signo que tiene la razón trigonométrica. Simplificar lo máximo posible el resultado.

a) $sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{33}}{7}\right)\cdot\left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{8\sqrt{33}}{49}$ 0,75 1 1,75

CÁLCULO DE $sen\,\alpha$ 0,75

$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{4}{7}\right)^2 + sen^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{16}{49} + sen^2\alpha = 1 \Rightarrow sen^2\alpha = 1 - \frac{16}{49}$

$\Rightarrow sen^2\alpha = \frac{33}{49} \Rightarrow sen\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{33}{49}} = -\frac{\sqrt{33}}{7}$

Como α está en el 3º cuadrante $\Rightarrow sen\,\alpha \leq 0$

b) $sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}} = +\sqrt{\frac{1-(-4/7)}{2}} = +\sqrt{\frac{1+4/7}{2}} = +\sqrt{\frac{\frac{11}{7}}{2}} = +\sqrt{\frac{11}{14}}$ 0,25 1,25

Signo de $sen\,\alpha/2$ 0,75

$180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ \Rightarrow \frac{180^\circ}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{270^\circ}{2} \Rightarrow 90^\circ \leq \frac{\alpha}{2} \leq 135^\circ$ 2º cuadrante

$sen\,\alpha/2$ es positivo

3. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $cos\,2\alpha + cos\,\alpha + 1 = 0$.

0,5 $cos^2\alpha - sen^2\alpha + cos\,\alpha + 1 = 0 \Rightarrow cos^2\alpha - (1 - cos^2\alpha) + cos\,\alpha + 1 = 0 \Rightarrow$ 0,75

$cos^2\alpha - 1 + cos^2\alpha + cos\,\alpha + 1 = 0 \Rightarrow 2\,cos^2\alpha + cos\,\alpha = 0 \Rightarrow$ 1

$cos\,\alpha\,(2\,cos\,\alpha + 1) = 0 \Rightarrow$ $cos\,\alpha = 0$ ①; $2\,cos\,\alpha + 1 = 0 \Rightarrow cos\,\alpha = -\frac{1}{2}$ ② 1,5

CASO 1 $cos\,\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = arc\,cos\,0 = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 90^\circ + k\,360^\circ \\ \alpha_2 = 270^\circ + k\,360^\circ \end{cases}$ 1,75

$360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$

CASO 2 $cos\,\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = arc\,cos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 120^\circ + k\,360^\circ \\ \alpha_2 = 240^\circ + k\,360^\circ \end{cases}$ 2

$360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$

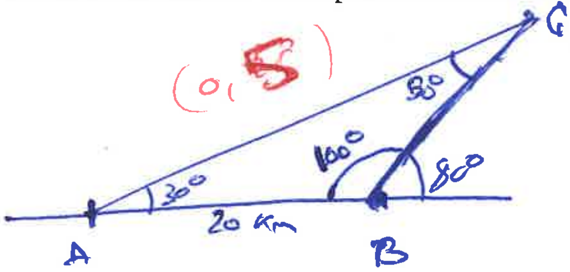
SOLUCIONES

$$\begin{cases} \alpha_1 = 90^\circ + k\,360^\circ \\ \alpha_2 = 120^\circ + k\,360^\circ \\ \alpha_3 = 240^\circ + k\,360^\circ \\ \alpha_4 = 270^\circ + k\,360^\circ \end{cases}$$

4. Dos barcos salen de dos puertos A y B de la línea de costa que distan entre ellos 20 km. El primero sale formando un ángulo de 30^0 con respecto a la línea de costa, y el segundo un ángulo de 80^0. Pasado cierto tiempo se encuentran en un punto C en el medio del mar.
a) Determinar a que distancia se encuentran del puerto B.
b) Determinar a que distancia se encuentran de la línea de costa.
NOTA: La línea de costa puede considerarse una recta.

1,5

a)



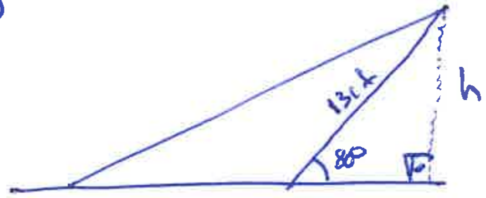
T. SENO

$$\frac{x}{\text{sen } 30^0} = \frac{20}{\text{sen } 50^0} \Rightarrow x = \frac{20 \text{ sen } 30^0}{\text{sen } 50^0} \simeq 13,1 \text{ Km}$$

SOLUCIÓN: Se encuentran a 13,1 Km del puerto B.

0,5

b)



$$\text{sen } 80^0 = \frac{h}{13,1} \Rightarrow h = 13,1 \text{ sen } 80^0$$

$$\Rightarrow h \simeq 12,9 \text{ Km}$$

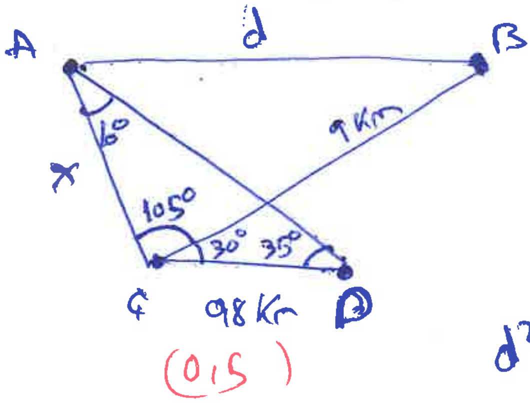
SOLUCIÓN: Se encuentran a 12,9 Km

5. Se quiere determinar la distancia entre dos puntos A y B. Para ello se toman dos puntos de referencia C y D que distan entre ellos 800 m.

Se conocen los ángulos

$$\angle ACB = 105° \quad \angle BCD = 30° \quad \angle ADC = 35°$$

Se sabe además que el punto C dista 9 km de B. Determina la distancia entre A y B.



① Cálculo de x 1,25

$$\frac{x}{\text{sen } 35^0} = \frac{0,8}{\text{sen } 10^0} \Rightarrow x = \frac{0,8 \text{ sen } 35^0}{\text{sen } 10^0} \simeq 2,64 \text{ Km}$$

② Cálculo de d 2

$$d^2 = 2,64^2 + 9^2 - 2 \cdot 2,64 \cdot 9 \cdot \cos 105^0$$

$$d = \sqrt{2,64^2 + 9^2 - 2 \cdot 2,64 \cdot 9 \cdot \cos 105^0}$$

$$d \simeq 10,01 \text{ Km}$$

SOLUCIÓN: Distan 10,01 Km.

① b) Si se toma $\beta = \frac{\alpha}{2}$, la fórmula a demostrar es:

$$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2\beta)}{2}} \quad 0,5$$

Se sabe que:

$$\begin{cases} \cos^2\beta + \cancel{\operatorname{sen}^2\beta} = 1 & \text{(Fórmula fundamental)} \\ \cos^2\beta - \cancel{\operatorname{sen}^2\beta} = \cos(2\beta) & \text{(Coseno del ángulo doble)} \end{cases} \quad 1$$

$$2\cos^2\beta = 1+\cos(2\beta) \quad 1,5$$

$$\cos^2\beta = \frac{1+\cos(2\beta)}{2} \Rightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2\beta)}{2}} \quad 2$$