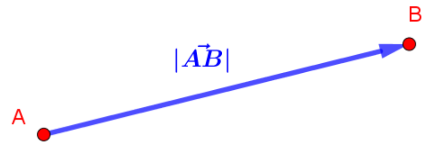
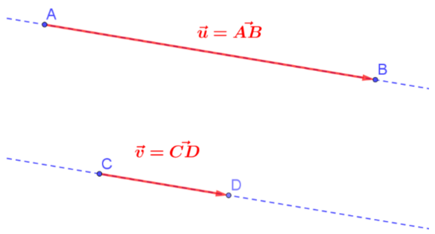
LECCIÓN 1. Conceptos básicos de vectores

Se distinguen dos tipos de vectores, vectores fijos y vectores libres:

VECTOR FIJO:
Dados dos puntos A y B del plano o del espacio, se llama vector de origen A e extremo B al segmento orientado que une ambos puntos, y se denota por $\overrightarrow{AB}$.

- El **módulo** de un vector es la longitud de ese vector y se denota por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

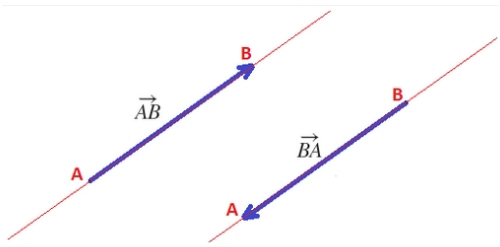




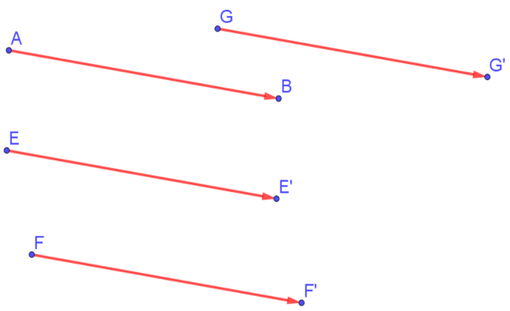
- La **dirección**: decimos que dos vectores fijos tienen la misma dirección si son paralelos, es decir, si las rectas que definen cada uno de ellos son paralelas.

- El **sentido**[1] de un vector indica cuál de los dos puntos que lo definen es su extremo y cuál su origen. Para dos puntos A y B se pueden considerar dos :

  $\overrightarrow{AB}$: origen A y extremo B
  $\overrightarrow{BA}$: origen B y extremo A



Dos vectores fijos se dicen **equipolentes** si tienen mismo **módulo**, **dirección** y **sentido**.

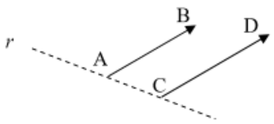


VECTOR LIBRE: un vector libre es un segmento orientado, pero sin extremo ni origen determinado. **Dos** (o más) **vectores equipolentes** determinan un mismo **vector libre**.

En la imagen todos los vectores representan al mismo vector libre, pero distintos vectores fijos.

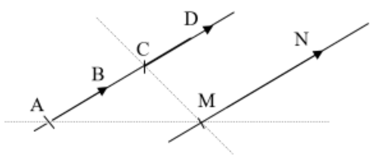
1 Siendo más estrictos, decimos que dos con la misma dirección vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen el mismo sentido si ocurre una de estas dos cosas:

a) Si los vectores se encuentran contenidos en rectas paralelas y los puntos B y D se encuentran en el mismo semiplano determinado por la recta AC.



B y D pertenecen al mismo semiplano determinado por la recta *r*.

b) Si los vectores se encuentran contenidos en la misma recta, entonces tendrán el mismo sentido si hay un 3º vector contenido en una recta paralela con el mismo sentido que ambos vectores.

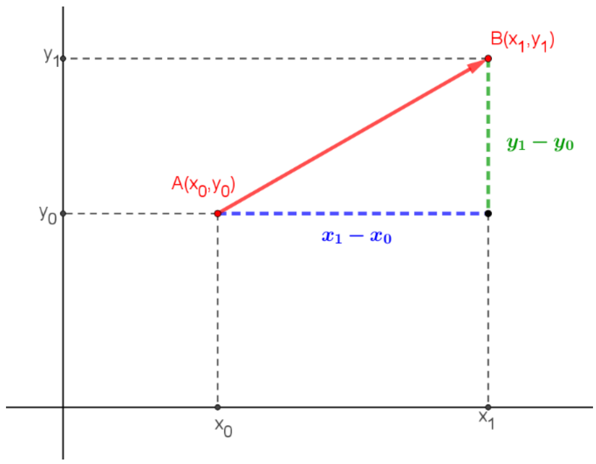


En lenguaje más sencillo, un vector libre es un vector que se puede mover sin rotar y sin estirar y colocar en cualquier punto del plano como origen. De ahora en adelante trabajaremos con vectores libres.

<u>COORDENADAS DE UN VECTOR EN EL PLANO:</u>

Dado un sistema de referencia en el plano, las coordenadas del vector de origen $A = (x_0, y_0)$ y extremo $B = (x_1, y_1)$ son:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$



NOTA: Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ coinciden con los catetos del triángulo rectángulo determinado por los punto A y B.

Resultado: Dos vectores son equipolentes si y solo si tienen las mismas coordenadas:

Debido a esto tiene sentido hablar de <u>coordenadas de un vector libre.</u>

EJEMPLO 1: *Calcular las coordenadas de vector de origen A=(1,-1) y extremo B=(-1,-2). ¿Es equipolente con el vector de origen C=(3,4) y extremo D=(1,3)? Representarlos en el plano.*

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,-2) - (1,-1) = (-1-1, -2-(-1)) = (-2,-1)$$

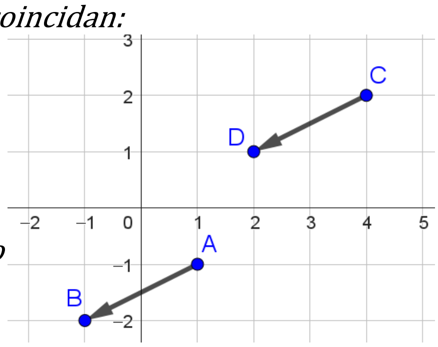
Para ver si son equipolentes tenemos que ver que sus coordenadas coincidan:

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (1,3) - (3,4) = (1-3, 3-4) = (-2,-1)$$

Como sus coordenadas coinciden son vectores equipolentes.

Esto quiere decir que determinan el mismo vector libre y por lo tanto podemos escribir

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$



Cuando un vector esta referenciado al origen de coordenadas, sus coordenadas coincidirán con las del punto.

$$\overrightarrow{OA} = A - O = A$$

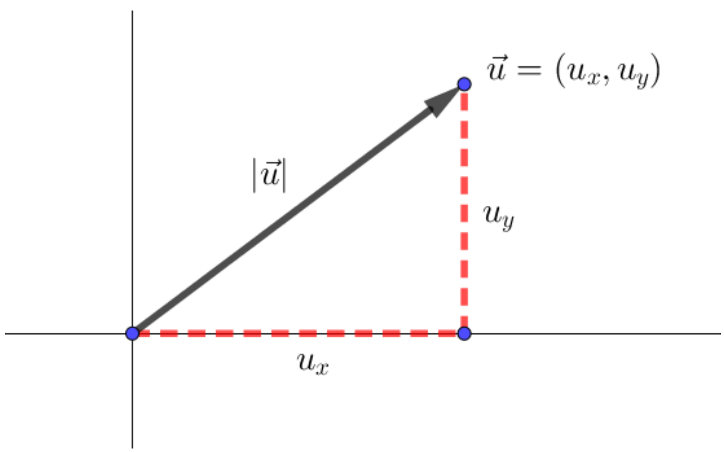
Al vector $\overrightarrow{OA}$ se le llama vector de posición del punto A.

Se llama **vector nulo** al vector con mismo extremo y mismo origen y que por lo tanto tiene ambas coordenadas nulas:

$$\overrightarrow{0} = (0,0)$$

<u>MÓDULO:</u> Llamamos **módulo del vector** $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y)$ a la longitud del vector. La fórmula para calcular el módulo de un vector es:

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

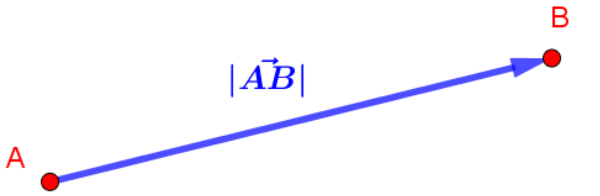


Esto es consecuencia directa del teorema de Pitágoras

Un vector de modulo 1 se dice **unitario.**

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS: dados dos puntos A y B su distancia será igual al módulo del vector que los une:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$



Si las coordenadas de los puntos son $A = (a_x, a_y)$ y $B = (b_x, b_y)$ entonces:

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = |B - A| = |(b_x - a_x,\, b_y - a_y)| = \sqrt{\ (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$$

Por lo tanto tenemos la fórmula:

$$d(A,B) = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$$

***EJEMPLO 2:** Calcula la distancia entre los puntos A=(1,3) y B=(7,5). a) Usando la definición b) Directamente con la fórmula.*

---

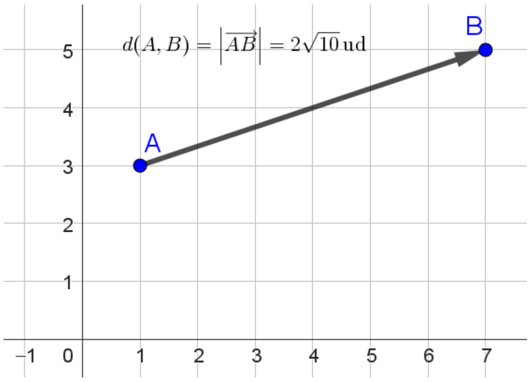
a)

Primero determinamos las coordenadas del vector:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (7,5) - (1,3) = (6,2)$$

Luego calculamos la distancia:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\,ud \approx 6,32\,ud$$

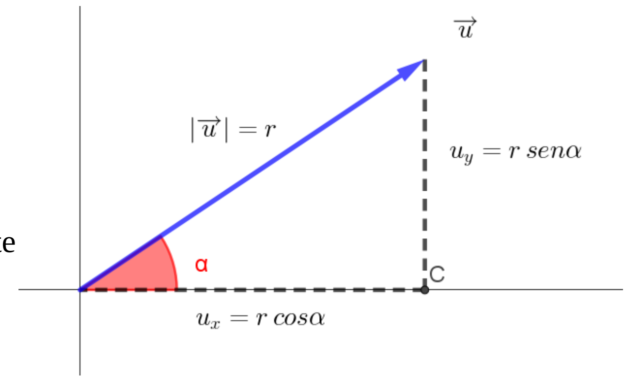


b)

$$d(A,B) = \sqrt{(7-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\,ud \approx 6,32\,ud$$

VECTOR DEFINIDO POR UN ÁNGULO Y SU LONGITUD: el vector $\vec{u}$ de longitud r que forma un ángulo α con el eje X viene dado por:

$$\vec{u} = (r\,cos\alpha\,,\ r\,sen\alpha)$$



Al ángulo α se le llama ángulo polar del vector $\vec{u}$

La razón de esto es sencilla, si $\vec{u} = (u_x, u_y)$, entonces es evidente que

$$cos\,\alpha = \frac{u_x}{r} \qquad sen\,\alpha = \frac{u_y}{r}$$

de donde se deduce que

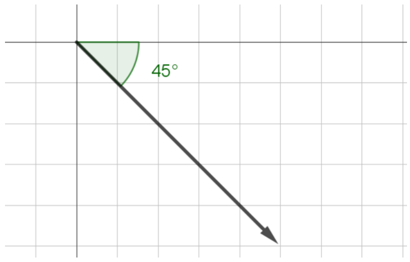
$$u_x = r\,cos\,\alpha \qquad u_y = r\,sen\,\alpha$$

EJEMPLO 3: *Calcula las coordenadas del vector de longitud 7 que forman un ángulo de -45^o con el eje X.*

En este caso $r=7$ y $\alpha=-45°$. Por lo tanto:

$$\overrightarrow{u}=(r\ \cos\alpha\ ,\ r\ \operatorname{sen}\alpha)=(7\cos(-45°),7\operatorname{sen}(-45°))$$

$$=(\frac{7\sqrt{2}}{2},-\frac{7\sqrt{2}}{2})\approx(4'95,-4'95)$$



EJERCICIOS

1. **Calcular m para que el vector $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},m\right)$ sea a) unitario b) tenga modúlo 7 c) tenga módulo ⅓.**

2. **Hallar k para que los puntos $A=(2,k)$ y $B=(7,1)$ disten 7 unidades.**

3. Hallar k para que los puntos $A(k,1)$ y $B(2,3)$ disten 3 unidades. (SOL:$k=2\pm\sqrt{5}$)

4. Halla las coordenadas del vector $\vec{w}$ de longitud 5 y que forma con el eje OX un ángulo de 30^0

5. **¿Qué ángulo forma el vector $\overrightarrow{u}=(-2,-3)$ con el eje X (ángulo polar) ?**

6. Determina cuanto tiene que valer k para que el punto $A=(k,5)$ esté el doble de lejos del punto $B=(1,1)$ que de $C=(2,3)$ (SOL: $k=3$ o $k=5/3$)

7. **En un plano de un edificio tenemos marcadas las coordenadas donde se colocarán los pilares $A=(5,3)$ y $B=(2,6)$, donde las coordenadas están medidas en metros. Determinar donde debe colocarse el pilar C sabiendo que:**
   - **La primera coordenada de C vale 3 y la segunda es desconocida.**
   - **La distancia de A a C es un metro mayor que la distancia de B a C.**

   Representa la situación gráficamente.
   (SOL: (3 , 4'71))

8. En una carta náutica figuran los faros $F_1=(4,-1)$ y $F_2=(-2,3)$. Se quiere fondear una boya C cuya posición cumple $C=(k,\ 2k+1)$. Determina las posibles ubicaciones de C sabiendo que la suma de las distancias desde C a los faros es de 10 unidades. (SOL: (1'76, 4'51) y (-1'3 , -1,61))

9. Al diseñar un edificio, el arquitecto a decidido colocar la entrada en un punto cuyas coordenadas en el plano son A=(3,2) (coordenadas en metros).
   Por exigencias del promotor debe rotar la posición del punto unos 30^0 en sentido antihorario con respecto al origen de coordenadas.
   a) ¿Dónde se situará el nuevo punto? Dibuja la situación. (SOL : (1'10 , 2'23))
   b) Ahora a mayores debe de alejarlo 1 metro del origen de coordenadas sin cambiar el ángulop polar. Dibuja la situación. (SOL: (1'4, 4'13)

10. En un pabellón, un técnico coloca un foco en el punto $F=(3,2)$ del plano (metros). Por cambios en la orientación del escenario, la plataforma gira $60°$ **en sentido horario** respecto del origen (es decir, un ángulo negativo)
    a) ¿En qué coordenadas queda el foco tras el giro? **Dibuja** la situación. (SOL: (3'23 , -1,60))
    b) Para reducir el deslumbramiento, después del giro se decide **acercar** el foco **2 metros** al origen **manteniendo la misma dirección** (mismo ángulo polar). ¿Cuáles serán sus nuevas coordenadas? (SOL: (1'44, -0'71)