

LECCIÓN 6. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Un triángulo viene determinado por 6 elementos: 3 lados y 3 ángulos. Resolver un triángulo consiste en determinar cada uno de esos 6 elementos.

Para poder resolver un triángulo es necesario conocer tres de esos elementos entre los que debe de estar incluido siempre un lado por lo menos. A la hora de resolver un triángulo nos darán esos 3 elementos como datos y tendremos que obtener los otros 3.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Para resolver triángulos rectángulos usaremos las siguientes herramientas:

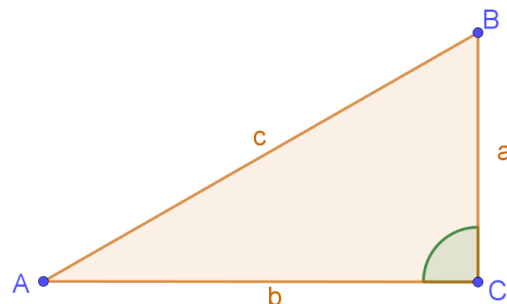
1. La suma de los ángulos de un triángulo es 180° :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

- 1) Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$

- 2) Razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = \cos \widehat{B} = \frac{a}{c} \quad \cos \widehat{A} = \operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b}{c} \quad \tan \widehat{A} = \frac{a}{b}$$

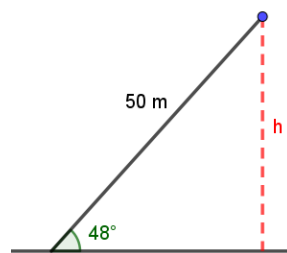


Evidentemente, al resolver un triángulo rectángulo, uno de los datos siempre será el ángulo recto.

EJEMPLO 1: Un globo está sujeto al suelo mediante un cordel de 50 m de largo, que forma con el suelo un ángulo de 48° por efecto del viento. Suponiendo que nuestro cordel está completamente recto, calcular la altura del globo.

A partir del dibujo es evidente que:

$$\operatorname{sen} 48^\circ = \frac{h}{50} \Rightarrow h = 50 \operatorname{sen} 48^\circ \approx 37,16 \text{ m}$$



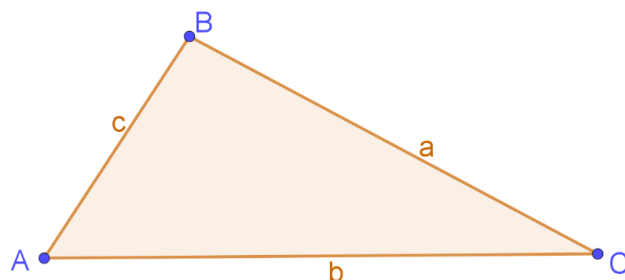
RESOLUCIÓN GENERAL DE TRIÁNGULOS

Para resolver triángulos de cualquier tipo se necesitan dos resultados: los teoremas del seno y del coseno.

TEOREMA DEL SENO: En un triángulo cualquiera los lados del triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

Es decir:

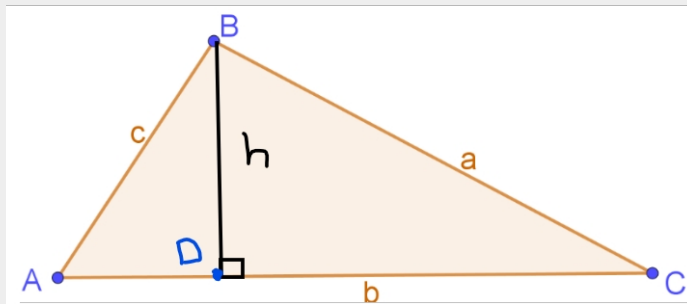
$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}$$



Demostración:

Hay que demostrar que los siguientes tres cocientes: $\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}}$ $\frac{b}{\widehat{\text{sen } B}}$ $\frac{c}{\widehat{\text{sen } C}}$

son iguales entre ellos. Para ello se traza la altura h del triángulo sobre el lado b .



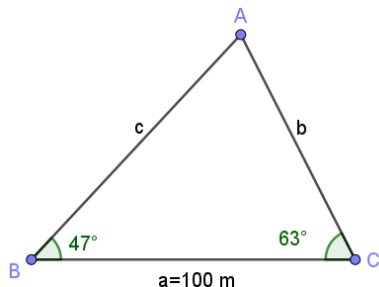
Como los triángulos ABD y BDC son ambos rectángulos en el vértice D , se deduce que:

$$\begin{cases} \widehat{\text{sen } A} = \frac{h}{c} \\ \widehat{\text{sen } C} = \frac{h}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = c \widehat{\text{sen } A} \\ h = a \widehat{\text{sen } C} \end{cases} \Rightarrow c \widehat{\text{sen } A} = a \widehat{\text{sen } C} \Rightarrow \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen } A}}$$

Se deduce entonces que los cocientes $\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}}$ y $\frac{c}{\widehat{\text{sen } C}}$ son iguales. Para comprobar que $\frac{b}{\widehat{\text{sen } B}}$ también es igual basta repetir el proceso trazando una de las otras dos alturas restantes del triángulo. □

Comentario: podremos usar el teorema del seno siempre que conozcamos un ángulo y su lado opuesto.

EJEMPLO 2: Resuelve el triángulo dado por: $a = 100 \text{ m}$, $\widehat{B} = 47^\circ$ y $\widehat{C} = 63^\circ$



Como los tres ángulos deben sumar 180° , se deduce que:

$$\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ - 47^\circ - 63^\circ = 70^\circ$$

Aplicando el teorema del seno se deduce que:

$$\frac{100}{\widehat{\text{sen } 70^\circ}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } 47^\circ}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } 63^\circ}}$$

De donde se despejan:

$$b = \frac{100 \widehat{\text{sen } 47^\circ}}{\widehat{\text{sen } 70^\circ}} \approx 77,83 \text{ m}$$

$$c = \frac{100 \widehat{\text{sen } 63^\circ}}{\widehat{\text{sen } 70^\circ}} \approx 94,82 \text{ m}$$

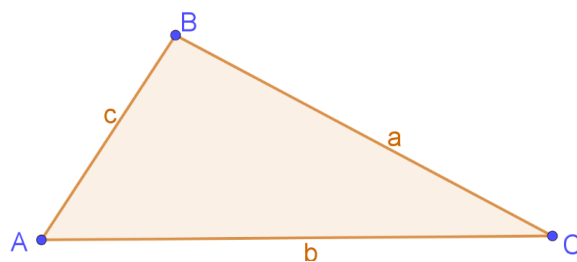
SOLUCIÓN: $\widehat{A} = 70^\circ$, $b \approx 77,83 \text{ m}$, $c \approx 94,82 \text{ m}$

TEOREMA DEL COSENO: En un triángulo cualquiera se verifica:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$$



Demostración:

Se traza la altura sobre el lado b y obtenemos dos triángulos rectángulos. Es evidente que:

$$\cos \hat{A} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cos \hat{A}$$

Si se aplica el teorema de Pitágoras en cada uno de los triángulos rectángulos resultantes obtenemos:

$$\begin{cases} c^2 = h^2 + x^2 \\ a^2 = h^2 + (b-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 = c^2 - x^2 \\ h^2 = a^2 - (b-x)^2 \end{cases} \Rightarrow c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2$$

Desarrollando la identidad notable que aparece en la igualdad:

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2 \Rightarrow c^2 - x^2 = a^2 - (b^2 - 2bx + x^2) \Rightarrow c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2bx - x^2$$

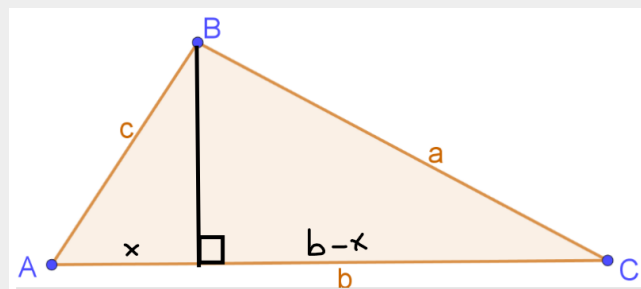
Simplificando el término $-x^2$ se deduce:

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2bx \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

Usando ahora que $x = c \cos \hat{A}$, se deduce la igualdad:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

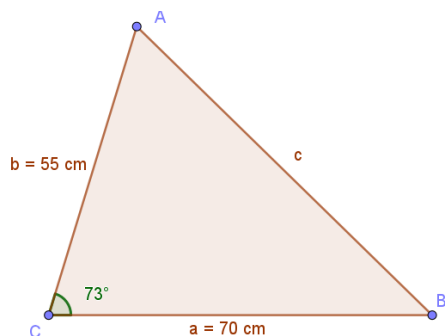
Para demostrar las otras dos igualdades hay que realizar el mismo procedimiento pero usando las otras dos alturas.



Comentario: usaremos el teorema del coseno principalmente en las siguientes situaciones:

- Si conocemos un ángulo y los dos lados adyacentes. En este caso podremos calcular el lado opuesto al ángulo. (Ver ejemplo 3)
- Si conocemos los tres lados. En este caso podremos calcular cualquier ángulo. (Ver ejemplo 3)

EJEMPLO 3: Resuelve el triángulo dado por: $a = 70 \text{ cm}$, $b = 55 \text{ cm}$ y $\hat{C} = 73^\circ$.



Aplicando el teorema del coseno se obtiene:

$$c^2 = 70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot \cos 73^\circ$$

$$c = \sqrt{70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot \cos 73^\circ} \approx 75,32 \text{ cm}$$

Usamos de nuevo el teorema del coseno para calcular el ángulo $\hat{A}$

$$70^2 = 55^2 + 75,32^2 - 2 \cdot 55 \cdot 75,32 \cdot \cos \hat{A}$$

Despejamos $\cos \hat{A}$:

$$2 \cdot 55 \cdot 75,32 \cdot \cos \hat{A} = 55^2 + 75,32^2 - 70^2 \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{55^2 + 75,32^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75,32}$$

Usamos el arcocoseno para calcular $\hat{A}$

$$\hat{A} = \arccos \left(\frac{55^2 + 75,32^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75,32} \right) \approx 62,71^\circ \approx 63^\circ$$

El ángulo restante se obtiene fácilmente:

$$\hat{B} = 180^\circ - A - C = 180^\circ - 63^\circ - 73^\circ = 44^\circ$$

SOLUCIÓN: $c \approx 75,32 \text{ cm}$, $\hat{A} \approx 63^\circ$, $\hat{B} \approx 44^\circ$

ESQUEMA DE RESOLUCIÓN: A la hora de resolver un triángulo no rectángulo se usan las siguientes propiedades en el orden indicado:

- 1) La suma de los ángulos de un triángulo es 180° : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$
- 2) Teorema del seno : se puede usar siempre que se conozca un lado y su ángulo opuesto. Si es posible no usarlo para determinar ángulos.
- 3) Teorema del coseno:

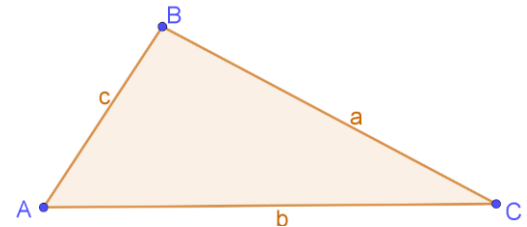
NOTAS:

- 1) En ocasiones cuando resolvamos un triángulo obtendremos soluciones no válidas, es decir, valores para los lados y ángulos con los que es imposible construir un triángulo. Para verificar la validez del triángulo podemos usar dos propiedades fundamentales de los triángulos:

a. **Los ángulos obtenidos son todos positivos y suman 180° .**

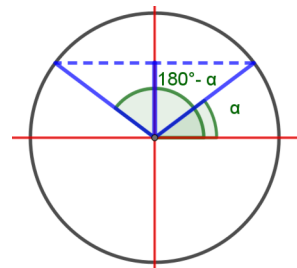
b. Dados 3 lados a , b y c , se puede construir un triángulo con ellos si la **suma de dos lados cualesquiera es mayor que el tercer lado.**

$$c < a + b \quad a < b + c \quad b < a + c$$



- 2) En caso de usar el teorema del seno para calcular un ángulo, este nos da **dos soluciones posibles** un ángulo agudo α_1 y su suplementario α_2 que estará en el segundo cuadrante

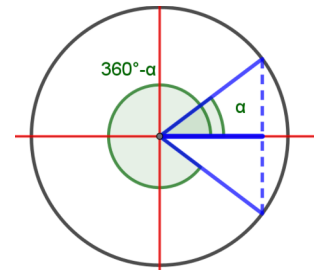
$$\text{sen } \alpha = x \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \arcsen x \\ \alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 \end{cases}$$



Por lo tanto si usamos el teorema del seno para obtener nuestro ángulo **debemos suponer dos ángulos posibles** α_1 y α_2 . Esto da lugar a dos triángulos posibles que pueden ser válidos o no.

No ocurre lo mismo al calcular un ángulo con el teorema del coseno, pues el 2º ángulo calculado sería mayor que 180° , lo cual es imposible en un triángulo

$$\cos \alpha = x \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \arccos x \\ \alpha_2 = 360^\circ - \alpha_1 \text{ (NO VÁLIDA)} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \arccos x$$



Debido a esto, a la hora de calcular un ángulo es **preferible usar el teorema del coseno**. Esto no es siempre posible y en esos casos habrá que contemplar los dos casos que se obtienen en el teorema del seno. Especificando más, estaremos obligados a usar el teorema del seno cuando se conoce un ángulo, un lado adyacente y el lado opuesto al ángulo dado (Ver ejemplo 4 apartados c), d) y e))

EJEMPLO 4: Resolver los siguientes triángulos:

- a) $a = 4,5 \text{ m}$; $\widehat{B} = 37^\circ$, $\widehat{C} = 61^\circ$. d) $a = 7,5 \text{ m}$; $b = 6,2 \text{ m}$, $\widehat{B} = 50^\circ$.
 b) $a = 8,7 \text{ m}$; $b = 5,4 \text{ m}$, $\widehat{C} = 63^\circ$. e) $a = 7,5 \text{ m}$; $b = 5 \text{ m}$, $\widehat{B} = 50^\circ$.
 c) $a = 7,5 \text{ m}$; $b = 8 \text{ m}$, $\widehat{B} = 50^\circ$. f) $a = 9,3 \text{ m}$; $b = 6,72 \text{ m}$, $c = 7,67 \text{ m}$

a) $a = 4,5 \text{ m}$; $\widehat{B} = 37^\circ$, $\widehat{C} = 61^\circ$

Calculamos el ángulo restante:

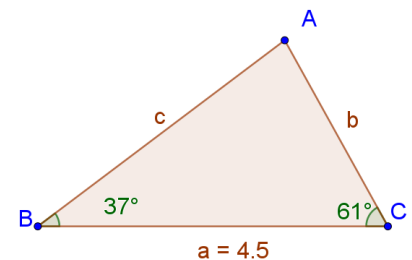
$$\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ - 37^\circ - 61^\circ = 82^\circ$$

Usamos el teorema del seno para calcular los dos lados restantes:

$$\frac{4,5}{\sin 82^\circ} = \frac{b}{\sin 37^\circ} \Rightarrow b = \frac{4,5 \sin 37^\circ}{\sin 82^\circ} \approx 2,73 \text{ m}$$

$$\frac{4,5}{\sin 82^\circ} = \frac{c}{\sin 61^\circ} \Rightarrow c = \frac{4,5 \sin 61^\circ}{\sin 82^\circ} \approx 3,97 \text{ m}$$

SOLUCIÓN: $b = 2,73 \text{ m}$, $c = 3,97 \text{ m}$, $\widehat{A} = 82^\circ$

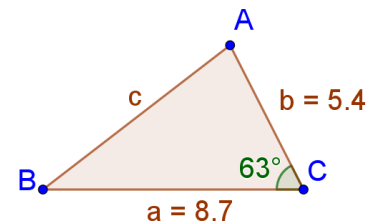


b) $a = 8,7 \text{ m}$; $b = 5,4 \text{ m}$, $\widehat{C} = 63^\circ$

Usamos el teorema del coseno para determinar c :

$$c^2 = 8,7^2 + 5,4^2 - 2 \cdot 8,7 \cdot 5,4 \cos 63^\circ$$

$$c = \sqrt{8,7^2 + 5,4^2 - 2 \cdot 8,7 \cdot 5,4 \cos 63^\circ} \approx 7,89 \text{ m}$$



Ahora tenemos dos opciones. Podemos usar el teorema del coseno o el del seno para calcular uno de los dos ángulos restantes. Como se ha visto, al calcular un ángulo con el teorema del seno aparecen dos posibilidades, un ángulo agudo (α) y su suplementario ($180^\circ - \alpha$) y habría que descartar uno. Por lo tanto es mejor usar el teorema del coseno:

$$8,7^2 = 5,4^2 + 7,89^2 - 2 \cdot 5,4 \cdot 7,89 \cos \widehat{A}$$

Para calcular $\widehat{A}$ despejamos $\cos \widehat{A}$ y usamos el arco coseno:

$$2 \cdot 5,4 \cdot 7,89 \cos \widehat{A} = 5,4^2 + 7,89^2 - 8,7^2 \Rightarrow \cos \widehat{A} = \frac{5,4^2 + 7,89^2 - 8,7^2}{2 \cdot 5,4 \cdot 7,89} \Rightarrow$$

$$\widehat{A} = \arccos \left(\frac{5,4^2 + 7,89^2 - 8,7^2}{2 \cdot 5,4 \cdot 7,89} \right) \approx 79^\circ$$

Por último calculamos el ángulo restante:

$$\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 180^\circ - 79^\circ - 63^\circ = 38^\circ$$

SOLUCIÓN: $c = 7,89 \text{ m}$, $\widehat{A} = 79^\circ$, $\widehat{B} = 38^\circ$.

c) $a = 7,5 \text{ m}$; $b = 8 \text{ m}$, $\widehat{B} = 50^\circ$

Se puede usar el teorema del seno ya que se conoce el lado b y el ángulo $\widehat{B}$.

$$\frac{7,5}{\sin \widehat{A}} = \frac{8}{\sin 50^\circ} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

Lo único que se puede calcular es el ángulo $\widehat{A}$. No es posible aquí calcular ese ángulo por el teorema del coseno, ya que para eso nos hacen falta los tres lados y solo tenemos dos.

Despejamos $\widehat{A}$ y obtenemos:

$$\frac{7,5}{\sin \widehat{A}} = \frac{8}{\sin 50^\circ} \Rightarrow \sin \widehat{A} = \frac{7,5 \sin 50^\circ}{8} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A}_1 = \arcsen\left(\frac{7,5 \sin 50^\circ}{8}\right) \approx 46^\circ \\ \widehat{A}_2 = 180^\circ - \widehat{A}_1 \approx 134^\circ \end{cases}$$

Tenemos entonces dos opciones para el ángulo $\widehat{A}$:

CASO I: $\widehat{A} \approx 46^\circ$

Determinamos el ángulo restante:

$$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 46^\circ - 50^\circ \approx 84^\circ$$

El lado restante se calcula mediante el teorema del seno:

$$\frac{8}{\sin 50^\circ} = \frac{c}{\sin 84^\circ} \Rightarrow c = \frac{8 \sin 84^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 10,39 \text{ m}$$

CASO II: $\widehat{A} \approx 134^\circ$

Es evidente que este caso es imposible pues

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 184^\circ > 180^\circ$$

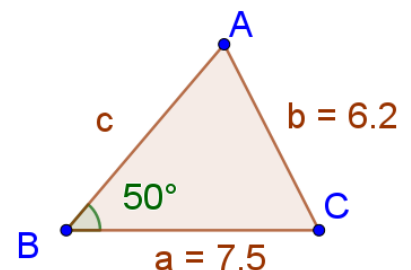
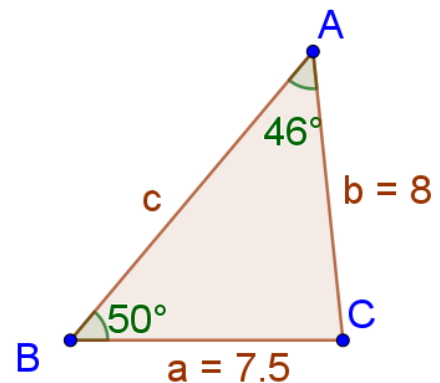
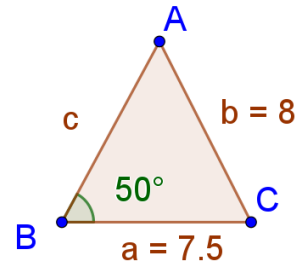
lo cual es imposible en un triángulo.

Por lo tanto en este caso solo hay una solución.

SOLUCIÓN: $c = 10,39 \text{ m}$, $\widehat{A} = 46^\circ$, $\widehat{C} = 84^\circ$.

d) $a = 7,5 \text{ m}$; $b = 6,2 \text{ m}$, $\widehat{B} = 50^\circ$.

Se usa el teorema del seno para determinar el ángulo $\widehat{A}$:



$$\frac{7,5}{\sin \hat{A}} = \frac{6,2}{\sin 50^\circ} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{7,5 \sin 50^\circ}{6,2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \arcsin\left(\frac{7,5 \sin 50^\circ}{6,2}\right) \approx 68^\circ \\ \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 \approx 112^\circ \end{cases}$$

Tenemos dos opciones para el ángulo $\hat{A}$:

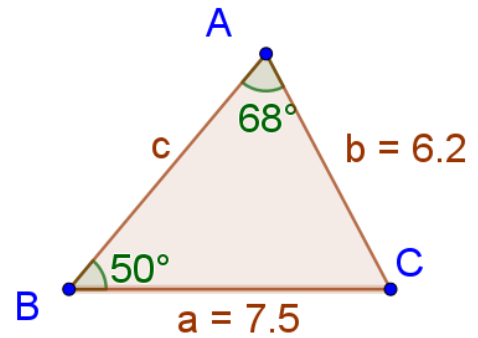
CASO I: $\hat{A} \approx 68^\circ$

Determinamos el ángulo restante:

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 68^\circ - 50^\circ \approx 62^\circ$$

El lado restante se calcula mediante el teorema del seno:

$$\frac{6,2}{\sin 50^\circ} = \frac{c}{\sin 62^\circ} \Rightarrow c = \frac{6,2 \sin 62^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 7,15 \text{ m}$$



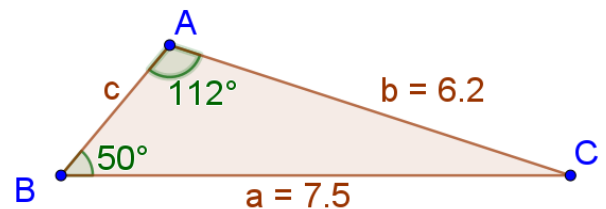
CASO II: $\hat{A} \approx 112^\circ$

Determinamos el ángulo restante:

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 112^\circ - 50^\circ \approx 18^\circ$$

El lado restante se calcula mediante el teorema del seno:

$$\frac{6,2}{\sin 50^\circ} = \frac{c}{\sin 18^\circ} \Rightarrow c = \frac{6,2 \sin 18^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 2,5 \text{ m}$$



En este ejemplo tenemos dos triángulos solución posibles:

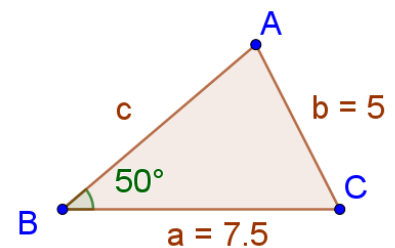
SOLUCIÓN 1: $c = 7,15 \text{ m}$, $\hat{A} = 68^\circ$, $\hat{C} = 62^\circ$.

SOLUCIÓN 2: $c = 2,5 \text{ m}$, $\hat{A} = 112^\circ$, $\hat{C} = 18^\circ$.

e) $a = 7,5 \text{ m}$; $b = 5 \text{ m}$, $\hat{B} = 50^\circ$

Se usa el teorema del seno para determinar el ángulo $\hat{A}$:

$$\frac{7,5}{\sin \hat{A}} = \frac{5}{\sin 50^\circ} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{7,5 \sin 50^\circ}{5} \approx 1,14 > 1$$

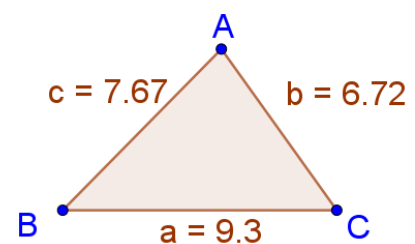


Lo cual es imposible pues $-1 \leq \sin \hat{A} \leq 1$ para cualquier ángulo $\hat{A}$. Por lo tanto en este caso no hay ningún triángulo solución.

f) $a = 9,3 \text{ m}$; $b = 6,72 \text{ m}$, $c = 7,67 \text{ m}$

Como conocemos los tres lados podemos calcular cualquier ángulo usando el teorema del coseno. En primer lugar calculamos el ángulo $\hat{A}$

$$9,3^2 = 6,72^2 + 7,67^2 - 2 \cdot 6,72 \cdot 7,67 \cdot \cos \hat{A}$$



Despejamos $\cos \hat{A}$:

$$2 \cdot 6,72 \cdot 7,67 \cdot \cos \hat{A} = 6,72^2 + 7,67^2 - 9,3^2 \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{6,72^2 + 7,67^2 - 9,3^2}{2 \cdot 6,72 \cdot 7,67}$$

Usamos el arcocoseno para calcular $\hat{A}$

$$\hat{A} = \arccos \left(\frac{6,72^2 + 7,67^2 - 9,3^2}{2 \cdot 6,72 \cdot 7,67} \right) \approx 80^\circ$$

Despejamos el ángulo $\hat{B}$ de manera análoga y obtenemos:

$$\hat{B} = \arccos \left(\frac{9,3^2 + 7,67^2 - 6,72^2}{2 \cdot 9,3 \cdot 7,67} \right) \approx 45^\circ$$

Por último determinamos $\hat{C}$:

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 80^\circ - 45^\circ \approx 55^\circ$$

SOLUCIÓN: $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 55^\circ$.

EJERCICIOS:

1. Resuelve los siguientes triángulos:

- a) $a=6\text{m}$, $B=45^\circ$, $C = 105^\circ$. (Soluc: $A = 30^\circ$, $b \approx 8,49\text{m}$, $c \approx 11,59\text{m}$)
- b) $a=10\text{dam}$, $b=7\text{dam}$, $C=30^\circ$. (Soluc: $c \approx 5,27\text{dam}$, $B \approx 41^\circ 38'$, $A \approx 108^\circ 22'$)
- c) $b=35,42\text{dm}$, $A=49^\circ, 38', ''$, $B = 70^\circ, 21', ''$. (Soluc: $C \approx 60^\circ, 01', ''$, $a \approx 28,66\text{dm}$, $c \approx 32,58\text{dm}$)
- d) $a=13\text{m}$, $b=14\text{m}$, $c=15\text{m}$. (Soluc: $A \approx 53^\circ, 07', 48''$, $B \approx 59^\circ, 29', 23''$, $C \approx 67^\circ, 22', 48''$)
- e) $a=42$, $b=32$, $B=40^\circ, 32', ''$. (Soluc: $A_1 \approx 58^\circ 32'$, $C_1 \approx 80^\circ 56'$, $c_1 \approx 48,62$)
(Soluc: $A_2 \approx 121^\circ 28'$, $C_2 \approx 18^\circ 00'$, $c_2 \approx 15,22$)
- f) $a=15$, $b=22$, $c=17$. (Soluc: $A \approx 42^\circ, 54', ''$, $B \approx 86^\circ, 38', ''$, $C \approx 50^\circ, 28', ''$)
- g) $a=10\text{mm}$, $b=7\text{mm}$, $C=60^\circ$. (Soluc: $c \approx 8,89\text{mm}$, $A \approx 76^\circ 59', 46''$, $B \approx 43^\circ 00', 14''$)
- h) $a=10$, $b=9$, $c=7$. (Soluc: $A \approx 76^\circ 14'$, $B \approx 60^\circ, 56', ''$, $C \approx 42^\circ, 50', ''$)
- i) $a=60\text{cm}$, $b=40\text{cm}$, $A=42^\circ, ', ''$. (Soluc: $B \approx 26^\circ, 30', ''$, $c \approx 83,43\text{cm}$, $C \approx 111^\circ, 30', ''$)
- j) $a=40\text{cm}$, $b=60\text{cm}$, $A=72^\circ$. (Soluc: No hay triángulo)
- k) $a=50$, $b=60$, $A=42^\circ$. (Soluc: $B_1 \approx 53^\circ 25'$, $C_1 \approx 84^\circ 35'$, $c_1 \approx 74,39$;
(Soluc: $B_2 \approx 126^\circ 35'$, $C_2 \approx 11^\circ 25'$, $c_2 \approx 14,79$)
- l) $A=30^\circ$, $B = 45^\circ$, $b = \sqrt{2}\text{m}$. (Soluc: $C = 105^\circ$, $a = 1\text{m}$, $c \approx 1,93\text{m}$)

- m) $b=3, \text{hm}, c=2, \text{hm}, A=60^\circ$. (Soluc: $a = \sqrt{7}, \text{hm}, B \approx 79^\circ 00', C \approx 40^\circ 54'$)
- n) $A=30^\circ, b = \sqrt{3}, c = 1$. (Soluc: $a = 1, B = 120^\circ, C = 30^\circ$)
- o) $a=4, b=5, B=30^\circ$. (Soluc: $A \approx 23^\circ, 34', 41'', C \approx 26^\circ, 25', 19'', c \approx \mathbf{4,449793}$)
- p) $a=1792, b=4231, c=3164$. (Soluc: $A \approx 22^\circ, 41', 37'', \mathbf{B \approx 114^\circ, 22', 14''}, C \approx 42^\circ, 56', 09''$)
- q) $a=12, \text{hm}, b=57, \text{hm}, A=150^\circ$. (Soluc: No hay triángulo ($\sin B > 1$))
- r) $a=72, b=57, C=75^\circ, 47', ''$. (Soluc: $A \approx 60^\circ, 36', 22'', B \approx 43^\circ, 36', 38'', c \approx 80,11$)
- s) $c=3,78, A=105^\circ, B = 38^\circ, 47', ''$. (Soluc: $C \approx 36^\circ, 13', '' , a \approx 6,18, b \approx 4,01$)
- t) $a=40, b=60, A=12^\circ$. (Soluc: Caso I: $B \approx 18^\circ, 10', 19'', C \approx 149^\circ, 49', 41'', c \approx 96,69;$)
(Soluc: Caso II: $B \approx 161^\circ, 49', 41'', C \approx 06^\circ, 10', 19'', c \approx 20,68$)
- u) $a=60, b=40, A=82^\circ$. (Soluc: $B \approx 41^\circ, 18', 49'', C \approx 56^\circ, 41', 11'', c \approx 50,63$)
- v) $a=8, \text{m}, B=30^\circ, C = 105^\circ$. (Soluc: $A = 45^\circ, b \approx 5,66, \text{m}, c \approx 10,93, \text{m}$)
- w) $A=60^\circ, B = 75^\circ, c = \sqrt{2}, \text{m}$. (Soluc: $a = \sqrt{3}, \text{m}, b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \text{m}, C = 45^\circ$)
- x) $a=4, \text{km}, B=45^\circ, C = 60^\circ$. (Soluc: $A = 75^\circ, b \approx 2,928, \text{km}, c \approx 3,586, \text{km}$)
- y) $a=4, \text{mm}, b=3, \text{mm}, c=6, \text{mm}$. (Soluc: $A \approx 36^\circ, 20', 10'', B \approx 26^\circ, 23', 04'', C \approx 117^\circ, 16', 47''$)
- z) $a=1, \text{cm}, c=2, \text{cm}, B=60^\circ$. (Soluc: $b = \sqrt{3}, \text{cm}, A = 30^\circ, C = 90^\circ$)
- aa) $a=5, \text{dam}, b=3, \text{dam}, c=4, \text{dam}$. (Soluc: $A=90^\circ, B \approx 36^\circ, 52', 12'', C \approx 53^\circ, 07', 48''$)
- ab) $b=10, \text{dm}, c=9, \text{dm}, C=45^\circ$. (Soluc: $B \approx 51^\circ, 46', 59'', A \approx 83^\circ, 13', 01'', a \approx 12,64, \text{dm}$)
(Soluc: $B \approx 128^\circ, 13', 01'', A \approx 06^\circ, 46', 59'', a \approx 1,51, \text{dm}$)

