

LECCIÓN 5. IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Son igualdades en las que la **variable está incluida en el argumento de una función trigonométrica** y que se **verifica siempre**, para cualquier valor de la variable.

El ejemplo más importante es la fórmula fundamental de la trigonometría: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Para **demostrar** una identidad trigonométrica tenemos que **realizar manipulaciones algebraicas** a partir de las **propiedades trigonométricas** estudiadas hasta llegar a una **identidad** que sepamos que es **cierta**

EJEMPLO 1: Demostrar que: $\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

Como se ve en el ejemplo 1, es bastante habitual usar la fórmula fundamental de la trigonometría

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

ya sea directamente o despejando una de las dos razones trigonométricas:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

Vídeos de ayuda



ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica es una ecuación en la que la variable o incógnita está incluida en el argumento de una o varias razones trigonométricas.

Para resolver ecuaciones trigonométricas debemos saber calcular un ángulo conociendo una de sus razones trigonométricas. Para ello se usan las **razones trigonométricas inversas**:

$$\operatorname{sen} \alpha = x \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{arcsen} x$$

$$\operatorname{cos} \alpha = x \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{arccos} x$$

$$\operatorname{tan} \alpha = x \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{arctan} x$$

EJEMPLO CON CALCULADORA: Sabiendo que $\tan \alpha = 3$, calcular el ángulo α

$$\tan \alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{arctan} 3 = \approx 71^\circ 33' 54''$$

PRUEBA A CALCULAR: $\operatorname{sen} \alpha = 0,37$, $\alpha = 21^\circ 42' 58''$

Las funciones trigonométricas inversas **nos dan únicamente uno de los ángulos posibles** con dicho seno, coseno o tangente. En concreto

- $\alpha = \operatorname{arcsen} x$ da siempre un ángulo $\alpha \in [-90^\circ, 90^\circ]$
- $\alpha = \operatorname{arccos} x$ da siempre un ángulo $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$
- $\alpha = \operatorname{arctan} x$ da siempre un ángulo $\alpha \in [-90^\circ, 90^\circ]$

EJEMPLO 2: Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas básicas:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

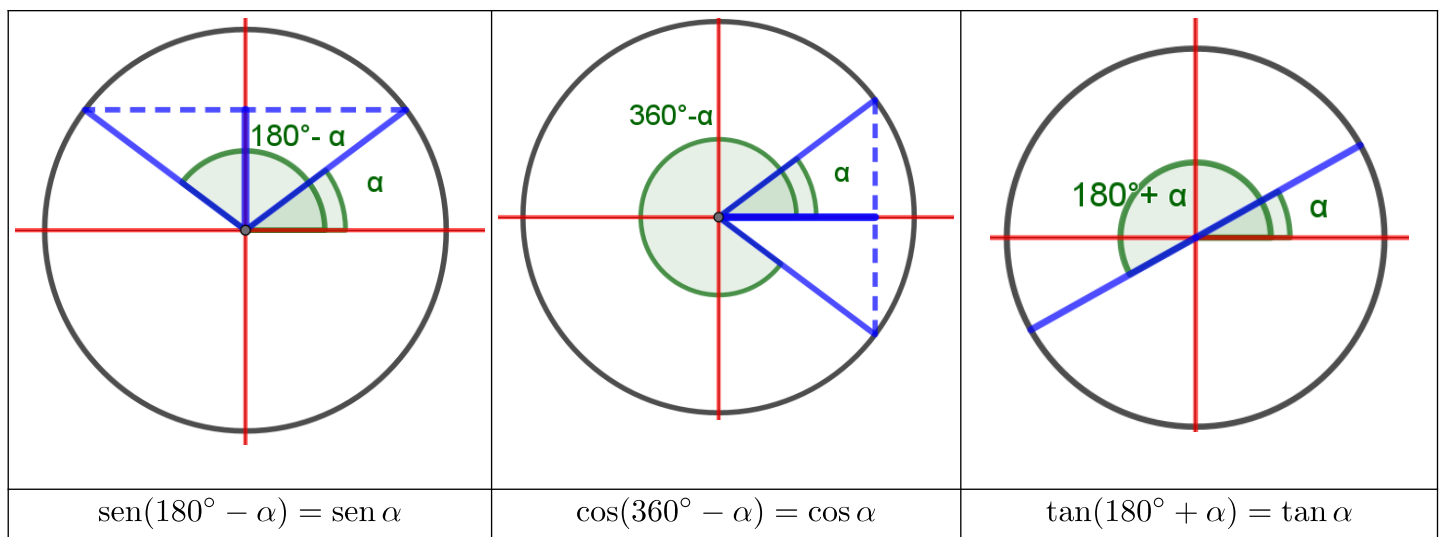
b) $\cos \alpha = -0,7$

c) $\tan \alpha = 5$

d) $\sin(2\alpha + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Para resolver ecuaciones trigonométricas hay que tener en cuenta las siguientes relaciones en grados:

$\cos \alpha = x \Rightarrow \alpha = \arccos x \Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha + k 360^\circ \\ \alpha_2 = 360^\circ - \alpha + k 360^\circ \end{cases}$	$k \in \mathbb{Z}$
$\sin \alpha = x \Rightarrow \alpha = \arcsen x \Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha + k 360^\circ \\ \alpha_2 = 180^\circ - \alpha + k 360^\circ \end{cases}$	$k \in \mathbb{Z}$
$\tan \alpha = x \Rightarrow \alpha = \arctan x \Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha + k 360^\circ \\ \alpha_2 = 180^\circ + \alpha + k 360^\circ \end{cases}$	$k \in \mathbb{Z}$



o en radianes:

$\cos \alpha = x \Rightarrow \alpha = \arccos x \Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha + k 2\pi \\ \alpha_2 = 2\pi - \alpha + k 2\pi \end{cases}$	$k \in \mathbb{Z}$
$\sin \alpha = x \Rightarrow \alpha = \arcsen x \Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha + k 2\pi \\ \alpha_2 = \pi - \alpha + k 2\pi \end{cases}$	$k \in \mathbb{Z}$
$\tan \alpha = x \Rightarrow \alpha = \arctan x \Rightarrow$	$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha + k 2\pi \\ \alpha_2 = \pi + \alpha + k 2\pi \end{cases}$	$k \in \mathbb{Z}$

Para resolver ecuaciones trigonométricas más complejas hay que realizar **manipulaciones algebraicas** a partir de las **propiedades trigonométricas** estudiadas hasta llegar a una ecuación trigonométrica sencilla que sepamos resolver.

EJEMPLO 3: Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\sin(2x) + \sqrt{2} \cos(x) = 0$

b) $\cos(2x) - \sin(x) = 0$

c) $\sin(4x) + \sin(2x) = 0$

EJERCICIOS

1. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas

- a) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
c) $\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha = \sin \alpha$ d) $\cos \alpha \cos(\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) = \cos \beta$
e) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$ f) $\cos(x + 60^\circ) - \cos(x + 120^\circ) = \cos x$
g) $\tan(x + 45^\circ) - \tan(x - 45^\circ) = \frac{2 + 2 \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}$ h) $\frac{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} = \tan 3\alpha$
i) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = 2 \cotan \alpha$ j) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = 2 \tan^2 \alpha$
k) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$ l) $\frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{\sin(a + b) + \sin(a - b)} = \cotan a$
m) $\left(\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}\right) \cos 2\alpha = 1 + \sin 2\alpha$ n) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$
o) $\frac{2 \sin \alpha}{\tan 2\alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha$ p) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas sencillas:

- a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
(Sol: $x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$)
b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
(Sol: $x = 135^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x = 225^\circ + k \cdot 360^\circ$)
c) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$
(Sol: $x = 150^\circ + k \cdot 180^\circ$)
d) $\sin x = \frac{1}{3}$
(Sol: $x = 19^\circ 28' 16'' + k \cdot 360^\circ$; $x = 160^\circ 31' 44'' + k \cdot 360^\circ$)
e) $\cos x = -\frac{4}{5}$
(Sol: $x = 143^\circ 7' 48'' + k \cdot 360^\circ$; $x = 216^\circ 52' 12'' + k \cdot 360^\circ$)
f) $\sin x = 0$
(Sol: $x = k \cdot 180^\circ$)
g) $\cos x = -1$
(Sol: $x = (2k + 1) \cdot 180^\circ$)
h) $\operatorname{cosec} x = -2$
(Sol: $x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x = 330^\circ + k \cdot 360^\circ$)
i) $\sec x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$
(Sol: $x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$)
j) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$
(Sol: $x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$)
k) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}$
(Sol: $\nexists$ soluc)
l) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
(Sol: se verifica $\forall x \in \mathbb{R}$)
m) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
(Sol: $x = 10^\circ + k \cdot 120^\circ$; $x = 110^\circ + k \cdot 120^\circ$)
n) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
(Sol: $x = 2k\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$)

3. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

- a) $\cos(30^\circ + \alpha) = \sin \alpha$ d) $\cos 2x = 1 + 4 \sin x$
b) $\sin 2\alpha = \tan \alpha$ e) $\sin(2x + 60^\circ) + \sin(x + 30^\circ) = 0$
c) $\cos 3\alpha + \cos \alpha = 0$ f) $\cos 8x + \cos 6x = 2 \cos(210^\circ) \cos x$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

- a) $\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0$ d) $4 \cos 2\alpha + 3 \cos \alpha = 1$
b) $\sin(45^\circ - \alpha) + \sqrt{2} \sin \alpha = 0$ e) $\tan 2\alpha + 2 \cos \alpha = 0$
c) $2 \cos x = 3 \tan x$ f) $4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \cos x = 3$

