

LECCIÓN 4. FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.

En esta sección vamos a ver algunas de las fórmulas más importantes dentro del mundo de la trigonometría:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO SUMA

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Demostración: Las dos primeras no las vamos a demostrar, pero la tercera se puede obtener fácilmente a partir de las otras dos

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \square$$

EJEMPLO 1: Sin calculadora, determinar el valor exacto de $\sin(105^\circ)$.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DIFERENCIA

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

Las razones trigonométricas del ángulo diferencia se deducen de las del ángulo suma teniendo en cuenta:

- i) $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$
- ii) La relación entre las razones trigonométricas de α y de $-\alpha$ vistas en la lección anterior.

Demostración: Teniendo en cuenta que $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, se deduce que:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha (-\sin \beta) \\ &\stackrel{*}{=} \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

En el paso * se ha usado la siguiente relación vista en las lecciones anteriores:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

Las demás igualdades se demuestran de manera similar. □

EJEMPLO 2: Sin calculadora, determinar el valor exacto de $\cos(15^\circ)$.

Las fórmulas del ángulo suma y el ángulo diferencia se pueden escribir conjuntamente como:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Demostración: Se obtienen a partir de las razones trigonométricas del ángulo suma usando $2\alpha = \alpha + \alpha$. Como todas las demostraciones son similares solo se enseña una de ellas:

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha$$

□

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

En las dos primeras el signo depende del cuadrante en el que se localiza $\frac{\alpha}{2}$.

Demostración: Vamos a demostrar la segunda de las igualdades. Para esta demostración se define el ángulo β como $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Entonces la igualdad a demostrar es :

$$\cos \beta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\beta}{2}}$$

Consideramos la fórmula fundamental de la trigonometría y el coseno del ángulo doble

$$\begin{cases} \cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta = 1 \\ \cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta = \cos 2\beta \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene que

$$2 \cos^2 \beta = 1 + \cos 2\beta \Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\beta}{2} \Rightarrow \cos \beta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\beta}{2}}$$

Y se obtiene la segunda fórmula.

La primera fórmula se obtiene de la misma manera pero en vez de sumar las dos ecuaciones, restándolas.

La última igualdad se obtiene dividiendo la primera fórmula entre la segunda.

□

EJEMPLO 3: Sin calculadora, determinar el valor exacto de $\operatorname{sen} 22,5^\circ$ y $\tan 22,5^\circ$.

TRANSFORMACIÓN DE SUMAS/RESTAS EN PRODUCTOS: (No hace falta sabérselas.)

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTOS EN SUMAS: (No hace falta sabérselas).

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)}{2}$$

EJEMPLO 4: Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{3}$ y que $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, se pide calcular de manera exacta y sin calculadora:

a) $\cos(\alpha + 30^\circ)$ b) $\operatorname{sen}(\alpha - 45^\circ)$ c) $\tan 2\alpha$ d) $\cos \frac{\alpha}{2}$ e) $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$

EJERCICIOS

1. Sabiendo que α está en el tercer cuadrante y que $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, se pide calcular sin usar la calculadora:

a. $\cos(\alpha + 45^\circ)$

b. $\operatorname{sen}(2\alpha)$

c. $\cos(2\alpha)$

d. $\operatorname{sen}(\alpha - 30^\circ)$

e. $\tan(45^\circ + \alpha)$

f. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

2. Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{4}$ y que $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ se pide calcular sin usar la calculadora:

a. $\operatorname{sen}(2\alpha)$

b. $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

c. $\operatorname{sen}(\alpha + 30^\circ)$

d. $\cos(60^\circ - \alpha)$

e. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

f. $\tan(45^\circ + \alpha)$

3. Sabiendo que $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ y que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ se pide calcular sin hallar el valor de α :

a) $\operatorname{sen}(2\alpha)$

(Soluc.: $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

b) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

(Soluc.: $-\frac{1}{2}$)

c) $\operatorname{sen}(\alpha - 30^\circ)$

(Soluc.: $-\frac{1}{2}$)

d) $\operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ)$

(Soluc.: $-\sqrt{3}$)

e) Razonar mediante la circunferencia goniométrica (no vale con calculadora) de qué α se trata. Comprobar.

(Soluc.: 240°)

