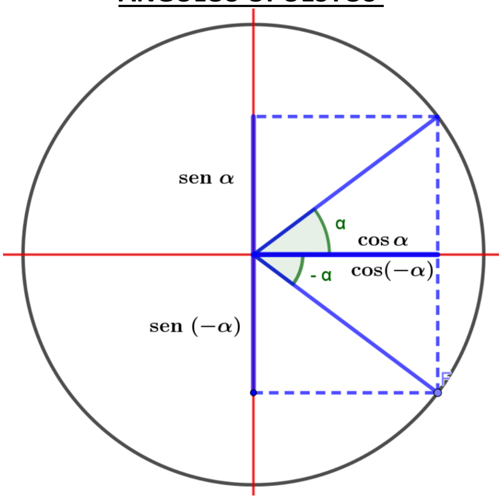
LECCIÓN 3. RELACIONES ENTRE ÁNGULOS

Usando la circunferencia de radio 1, podemos deducir las siguientes razones entre ángulos:

ÁNGULOS OPUESTOS



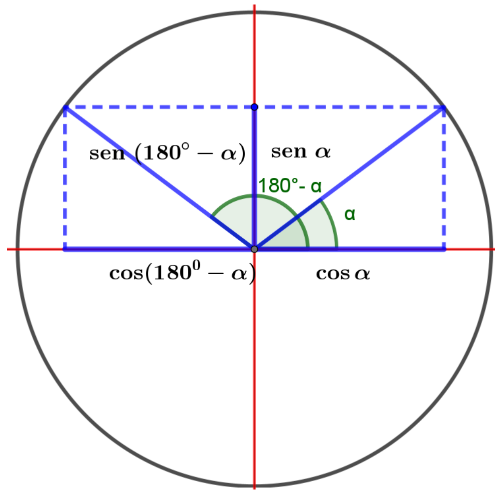
Del dibujo se deduce:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

de donde se deduce:

$$\tan(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS (SUMAN 180º)



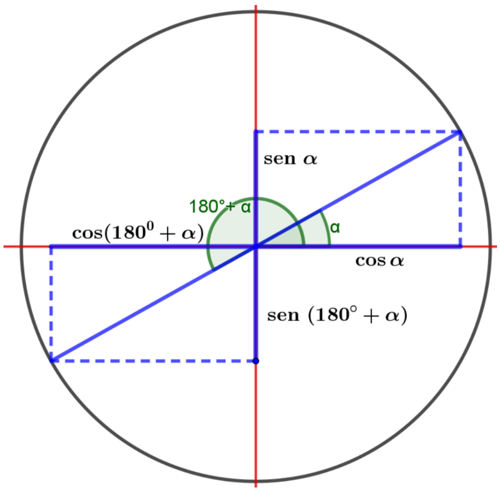
Del dibujo se deduce:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$

de donde se deduce:

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$$

ÁNGULOS QUE DIFIEREN 180º



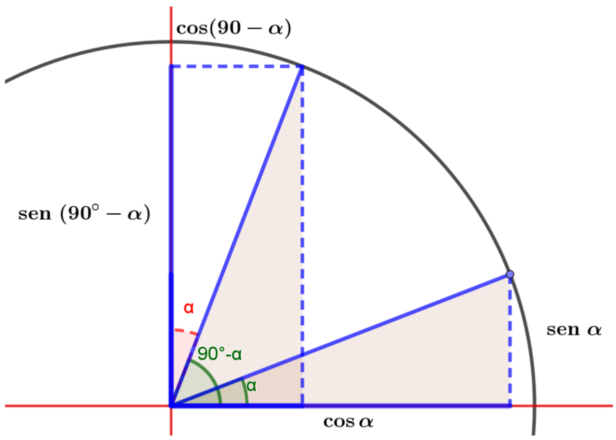
Del dibujo se deduce:

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

de donde se deduce:

$$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha$$

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS (SUMA 90º)



Del dibujo se deduce:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

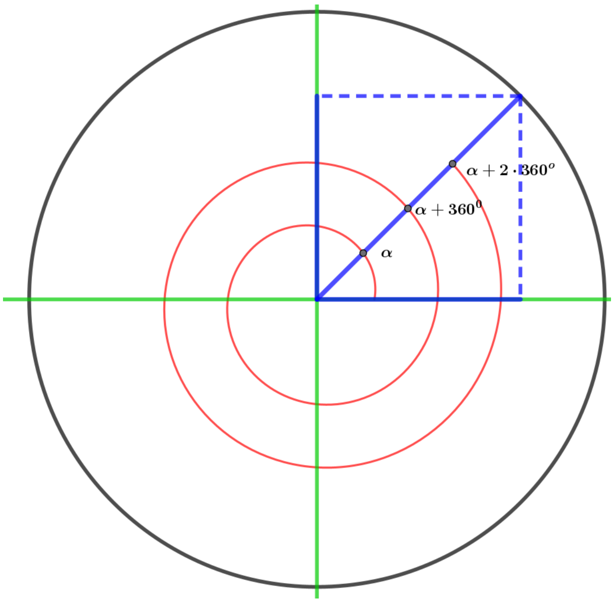
de donde se deduce:

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotan}\alpha$$

ÁNGULOS QUE DIFIEREN 360º

Si a un ángulo α le damos un número entero de vueltas, entonces el ángulo vuelve al mismo lugar y por lo tanto sus razones trigonométricas serán iguales:

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\tan(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \tan\alpha \qquad k \in \mathbb{Z}$$



EJEMPLO:

Cuando $k = 2$, el ángulo $\alpha + 2 \cdot 360^o$ se superpone con el ángulo α después de dar dos vueltas enteras a la circunferencia.

Debido a esto, las razones trigonométricas de ambos ángulos coincidirán. Esto ocurre para cualquier valor de k entero. Por ejemplo, con el seno quedaría:

$$\ldots = \operatorname{sen}(\alpha - 2 \cdot 360^o) = \operatorname{sen}(\alpha - 360^o) = \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + 360^o) = \operatorname{sen}(\alpha + 2 \cdot 360^o) = \ldots$$

APLICACIÓN: REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE.

Toda razón trigonométrica puede ser calculada como una razón trigonométrica del 1º cuadrante.

En primer lugar, expresamos el ángulo como un número entero de vueltas más un ángulo positivo menor que 360° . Luego aplicamos las relaciones vistas en este apartado para ver a que razón del primer cuadrante es equivalente. Podemos seguir el siguiente esquema:

***EJEMPLO 1:** En cada apartado calcula las razones trigonométricas directas del ángulo correspondiente a partir de un ángulo del primer cuadrante.*

a) 1230° *b)* -2295° *c)* $\frac{62\pi}{3}$ *d)* $\frac{159\pi}{4}$

EJERCICIOS

1. A partir de la circunferencia goniométrica deduce la relación que hay entre las razones trigonométricas de los ángulos α y $\alpha + 270^o$

2. **Calcular las siguientes razones trigonométricas expresándolas previamente en función de un ángulo del primer cuadrante:**

a) $\cos 2670^o$ b) $\sin 1680^o$ c) $\cos 3195^o$ d) $sen - 1740^o$

3. Ídem con:

a) sen 1485º **b)** cos 1560º **c)** sen 1000º **a)** sen 190º *(Soluc: sen 45º; –cos 60º; –sen 80º; sen 70º)*

4. Ídem con:

a) sen 1300º **b)** cos (–690º) **c)** tg 170º **d)** sen (–1755º) **e)** sen (–120º) **f)** ctg (–150º)
g) sen 2700º **h)** sec (–25º) **i)** cos (–30º) **j)** cosec 4420º

(Soluc: a) –sen40º; b)cos30º; c) –tg10º; d) sen45º; e) –sen60º; f) ctg30º; g) 0; h) sec25º; i) cos30º; j) cosec80º)