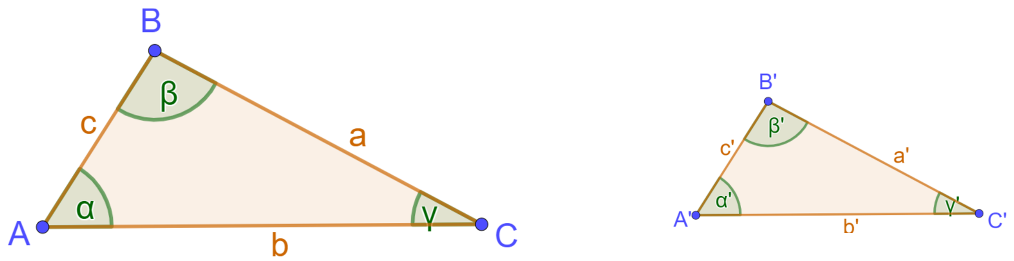
LECCIÓN 2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

Semejanza de triángulos

La trigonometría se basa en el concepto de semejanza. Dos figuras son semejantes si tienen igual forma pero distinto tamaño. En dos figuras semejantes, los segmentos correspondientes son proporcionales entre ellos y los ángulos determinados por dichos segmentos son iguales en ambas figuras.



En el caso de **dos triángulos semejantes** se tiene que:

1) Lados proporcionales: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ 2) Ángulos iguales: $\alpha = \alpha'\,, \quad \beta = \beta'\,, \quad \gamma = \gamma'$

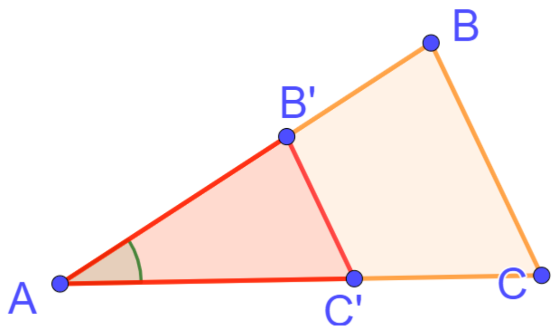
En triángulos tenemos 3 criterios para determinar si dos triángulos son semejantes.

Criterio 1: *dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos internos de igual medida.*
Criterio 2: los triángulos son semejantes si dos lados son proporcionales y el ángulo entre ellos es el mismo.
Criterio 3: los tres lados son proporcionales:

También es bastante usado el **criterio de semajanza de Thales**:

Recordad que dos triángulos están en **posición de Thales** si tienen un ángulo común y los lados opuestos a este ángulo son paralelos

El **criterio de semejanza de Thales** dice que dos triángulos en posición de Thales son siempre semejantes.



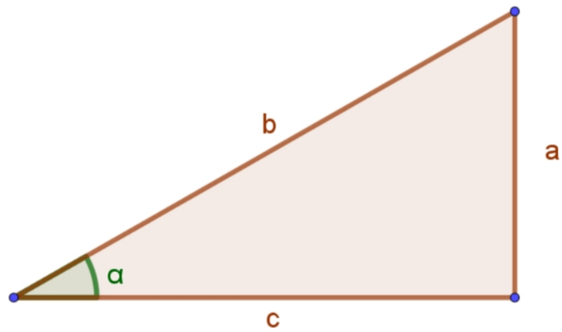
Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Dado un **triángulo rectángulo** y α uno de los ángulos adyacentes a su hipotenusa. Se definen sus **razones trigonométricas directas** como:

$$cos\,\alpha = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

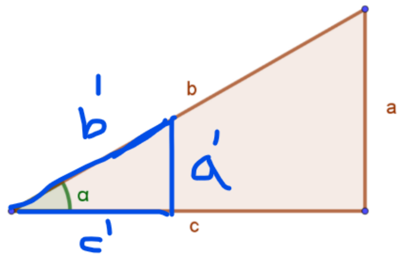
$$sen\,\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

$$tan\,\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{a}{c} = \frac{a/b}{c/b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$



Las razones trigonométricas directas **no dependen del triángulo escogido**, solamente del ángulo. Esto es una consecuencia directa de la semejanza de triángulos.

Para comprobarlo solo hace falta coger otro triángulo rectángulo con un ángulo α. Ahora podemos rotarlo y trasladarlo de manera que quede superpuesto con el triángulo anterior en posición de Tales. Por lo tanto son semejantes y



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

De lo que se deduce que:

$$cos\,\alpha = \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \qquad sen\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad tan\,\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$$

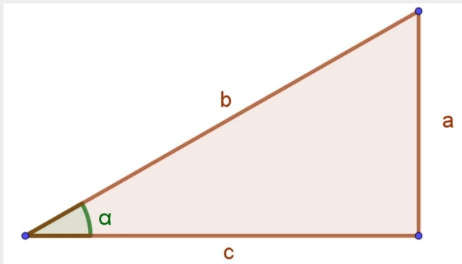
A partir de las razones trigonométricas directas se definen las **razones trigonométricas recíprocas:**

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \operatorname{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

TEOREMA .
a) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ *(Fórmula fundamental de la trigonometría)* *b)* $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

Demostración:
a) Se aplica el Teorema de Pitágoras en el triángulo de la imagen y se divide la igualdad entre la hipotenusa b.

$$a^2 + c^2 = b^2 \Longrightarrow \frac{a^2 + c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} \Longrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1 \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$



b) Se demuestra escribiendo la tangente como un cociente:

$$1 + \tan^2\alpha = 1 + \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

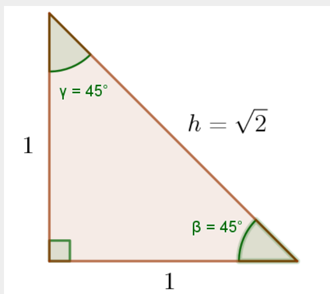
$$= \frac{1}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \sec^2\alpha$$

$\square$

<u>Razones trigonométricas importantes</u> (Hay que saberlas)

ÁNGULO	RADIANES	$0\,rad$	$\frac{\pi}{6}\,rad$	$\frac{\pi}{4}\,rad$	$\frac{\pi}{3}\,rad$	$\frac{\pi}{2}\,rad$
	GRADOS	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
RAZONES	SENO	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
	COSENO	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

Demostración: Las razones trigonométricas de los ángulos $0°$ y $90°$ son evidentes si se observa la circunferencia goniométrica.



Razones del ángulo $45°$ **:**
Se considera un triángulo rectángulo de catetos de longitud 1. Evidentemente los otros dos ángulos son iguales por ser isósceles y por lo tanto miden $45°$ cada uno

Por el Teorema de Pitágoras la hipotenusa mide $h = \sqrt{2}$ ya que:

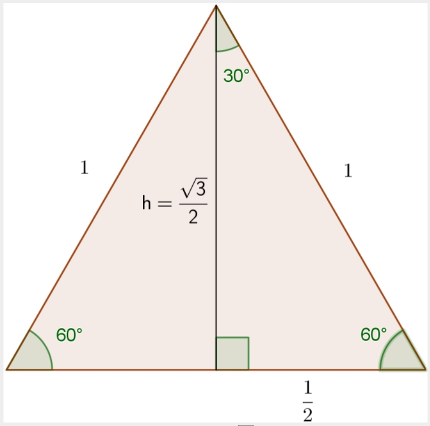
$$h^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow h^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2}$$

Si tomamos uno de los dos ángulos de $45°$, se deduce que:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{\text{C. Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45° = \frac{\text{C. Contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Razones de los ángulos $30°$ y $60°$:

Se considera un triángulo equilátero de lado 1. Como todos los ángulos son iguales deben medir $60°$ cada uno de ellos. Se traza una altura del triángulo.



Usando el teorema de pitágoras se deduce la longitud de la altura es $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ya que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2 = 1^2 \Longrightarrow \frac{1}{4} + h^2 = 1 \Longrightarrow h^2 = 1 - \frac{1}{4} \Longrightarrow h^2 = \frac{3}{4} \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se deduce entonces que:

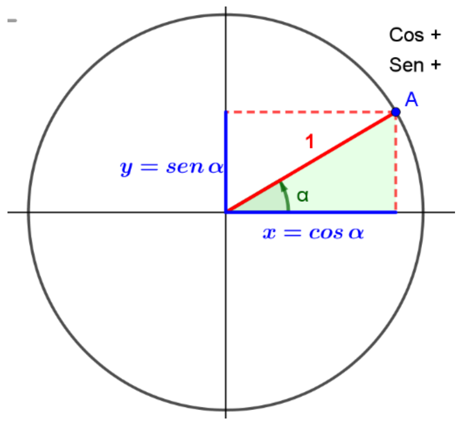
$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\text{C. Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\text{C. Contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{\text{C. Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\text{C. Contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \square$$

Razones trigonométricas para cualquier ángulo.

Llamamos **circunferencia goniométrica** a la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio unidad. Nos sirve para extender las razones trigonométricas definidas anteriormente para ángulos agudos ($0<\alpha<90^o$ a ángulos en $[0^o, 360^o]$.

ÁNGULOS EN EL 1º CUADRANTE



Se considera el triángulo sombreado. Sus razones trigonométricas son

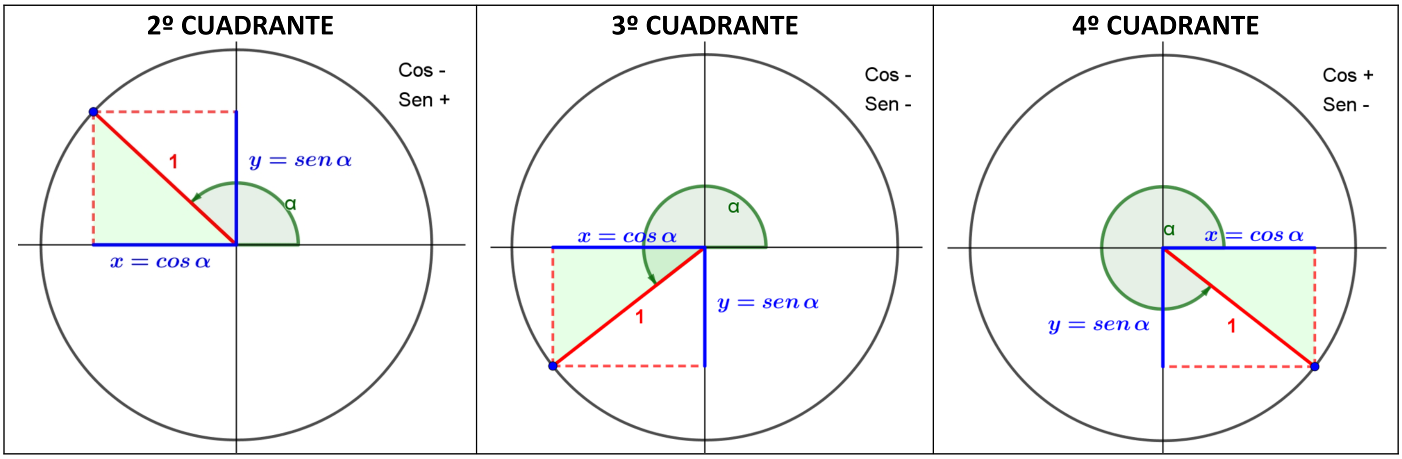
$$\cos\alpha = \frac{Cateto\,contiguo}{Hipotenusa} = \frac{x}{1} = x$$

$$sen\,\alpha = \frac{Cateto\,opuesto}{Hipotenusa} = \frac{y}{1} = y$$

Por lo tanto, el seno y el coseno son las coordenadas del punto A.

Como estamos en el primer cuadrante claramente ambas razones trigonométricas son positivas.

Usando esta construcción podemos generalizar las razones trigonométricas para cualquier ángulo en los restantes cuadrantes.



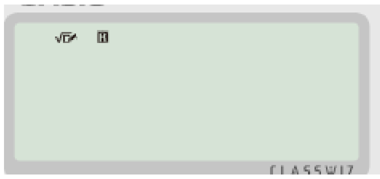
A partir de estas construcciones quedan definidas las razones trigonométricas para todos los ángulos $\alpha \in R$

Evidentemente, a partir de las construcciones anteriores se tiene que:

$$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

EJEMPLO 1: *Sabiendo que* $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{2}{3}$ *y que* $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ *se pide calcular las restantes razones trigonométricas de manera exacta usando relaciones trigonométricas.*

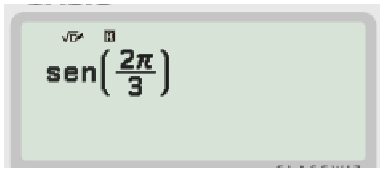
Uso de la calculadora (CASIO fx-570/991 SP CW)



En primer lugar hay que tener claro que en la parte superior de la pantalla se nos indicará que unidad angular tenemos fijada: Grado sexagesiaml (D), Radián (R) o Grado cent (G).

Para cambiar la unidad angular hay que seguir la siguiente secuencia:

CONFIG → Config cálculo → Unidad angular



Para calcular las razones trigonométricas directas se usan las teclas correspondientes sen (seno), cos (coseno) y tan(tangente) y se introduce el ángulo en la unidad en la que este configurada la calculadora.

EJEMPLO 2: *Para practicar el uso de la calculadora calcula:*

a) $\operatorname{sen} 75^o = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0,9659$ *b)* $\tan\left(\dfrac{5\pi}{7}\text{rad}\right) \approx -1,2349$

Notación

- Al usar funciones trigonométricas se omiten normalmente los paréntesis, aunque ambas expresiones son válidas.

$$\operatorname{sen}(70^\circ) = \operatorname{sen} 70^\circ$$

- Cuando se omite la unidad del ángulo, se entiende que se está trabajando en radianes, que es la unidad de medida natural:

$$\operatorname{sen} 45 = \operatorname{sen}(45\, rad)$$

- Hay que distinguir las potencias del argumento de las potencias de toda la expresión:

$$\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2 \qquad \operatorname{sen} x^2 = \operatorname{sen}\left(x^2\right)$$

EJERCICIOS

1. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{-3}{5}$ y que $180^o < \alpha < 270^o$, calcular las restantes razones trigonométricas de manera exacta. Comprobar el resultado hallando α con la calculadora. (SOL: $sen\,\alpha = \frac{-4}{5}; \tan\alpha = 4/3$)
2. **Sabiendo que $\tan\alpha = \frac{-3}{4}$ y que α está en el cuarto cuadrante, calcular las restantes razones trigonométricas.**
3. Ídem con $\sin\alpha = -0{,}3$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. (SOL: $\cos\alpha \approx -0{,}95; \tan\alpha \approx 0{,}31$)
4. Calcular las restantes razones trigonométricas sabiendo que:

a) cos α=4/5	270º<α<360º	**e)** sen α=1/4	$\alpha \in$ 1.er cuad.	**i)** tg α=3/4	0º<α<90º
b) tg α=3/4	180º<α<270º	**f)** cos α=–1/3	$\alpha \in$ 2º cuad.	**j)** sec α=-$\sqrt{2}$	$\alpha \in$ 3.er cuad.
c) sen α=3/5	90º<α<180º	**g)** cosec α=–2	180º<α<270º	**k)** cosec α=$\sqrt{5}$	$\alpha \in$ 2º cuad.
d) ctg α=–2	90º<α<180º	**h)** sec α=1	0º<α<90º		

(Soluc: a) sen α=-3/5, tg α=-3/4; b) sen α=-3/5, cos α=-4/5; c) cos α=-4/5, tg α=-3/4; d) sen α=$\sqrt{5}$/5, cos α=–2$\sqrt{5}$/5; g) sen α=-1/2, cos α=–$\sqrt{3}$/2; j) sen α=-$\sqrt{2}$/2, tg α=1; k) sen α=$\sqrt{5}$/5, cos α=–2$\sqrt{5}$/5)