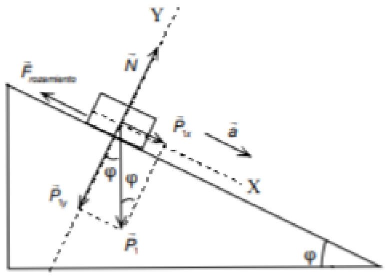
11. Calcula la aceleración con la que se desliza un objeto situado sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 60º con la horizontal cuando el coeficiente de rozamiento es μ = 0,2. Calcula el módulo dirección y sentido de la fuerza mínima que se debe aplicar sobre el objeto para que no se deslice.



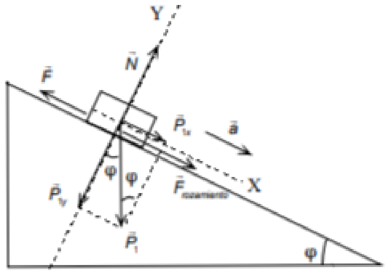
Se elige un sistema de referencia con su origen en el objeto, el eje X paralelo a la superficie de deslizamiento y el eje Y perpendicular a la misma.

a) Sobre el objeto actúa su peso, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento y se aplican las leyes de la dinámica.

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P}_y = 0; N - P_y = 0; N = P_y = m \cdot g \cdot \cos\varphi \\ \Sigma\vec{F}_x = m \cdot \vec{a}; \vec{P}_x + \vec{F}_{rozamiento} = m \cdot \vec{a}; P_x - F_{rozamiento} = m \cdot a; P \cdot sen\varphi - \mu \cdot N = m \cdot a \end{array}\right\}$$

Operando: $m \cdot g \cdot sen\ \varphi - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\varphi = m \cdot a \Rightarrow a = g \cdot (sen\ \varphi - \mu \cdot \cos\varphi)$

Sustituyendo: $a = 9{,}8\ m/s^2 \cdot (sen\ 60º - 0{,}2 \cdot \cos 60º) = 7{,}5\ m/s^2$



b) Ahora la fuerza de rozamiento tiene sentido hacia abajo, contrario al del movimiento.

Para que el objeto no se deslice hay que aplicar una fuerza paralela al plano inclinado y de sentido hacia arriba.

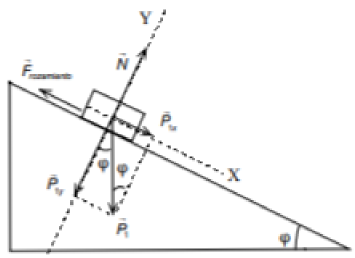
Como el objeto asciende con velocidad constante está en equilibrio.

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P}_y = 0;\ N = P_y = m \cdot g \cos\varphi \\ \Sigma\vec{F}_x = 0; \vec{F} + \vec{P}_x + \vec{F}_r = 0 \Rightarrow F = P_x + F_{rozamieto} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow F = m \cdot g \cdot sen\,\varphi + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\varphi = m \cdot g \cdot (sen\,\varphi + \mu \cdot \cos\varphi)$$

Sustituyendo: $F = m \cdot 9{,}8\ m/s^2\ (sen\ 60º + 0{,}2 \cdot \cos 60º) = 9{,}5 \cdot m\ N$

12. Cuál debe ser la inclinación de una superficie con la horizontal para que un objeto se deslice cuando el coeficiente de rozamiento es μ = 0,4.

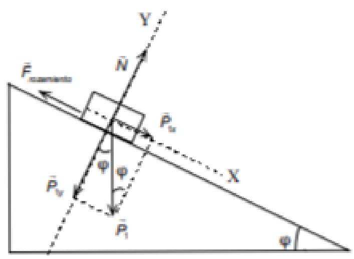


Se elige un sistema de referencia con su origen en el objeto, el eje X paralelo a la superficie de deslizamiento y el eje Y perpendicular a la misma. Sobre el objeto actúa su peso, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento. Cuando el objeto comienza a deslizarse está en equilibrio.

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P}_y = 0; N - P_y = 0; N = P_y = m \cdot g \cdot \cos\varphi \\ \Sigma\vec{F}_x = 0;\ \vec{P}_x + \vec{F}_{rozamiento} = 0;\ P_x - F_{rozamiento} = 0; P \cdot sen\varphi = \mu \cdot N \end{array}\right\}$$

Operando: $m \cdot g \cdot sen\ \varphi = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\varphi$; $tg\ \varphi = \mu = 0{,}4$ $\Rightarrow \varphi = 21º\ 48'\ 5{,}1''$

13. Un objeto comienza a deslizarse cuando la inclinación de un plano inclinado es de 20º. Calcula el coeficiente de rozamiento.



Se elige un sistema de referencia con su origen en el objeto, el eje X paralelo a la superficie de deslizamiento y el eje Y perpendicular a la misma. Sobre el objeto actúa su peso, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento.

Cuando el objeto comienza a deslizarse está en equilibrio.

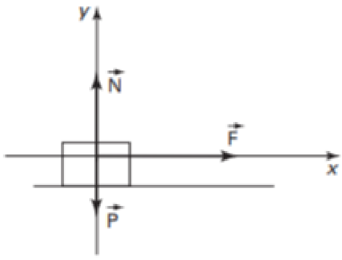
$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\vec{F}_y = 0; \vec{N} + \vec{P}_y = 0; N - P_y = 0; N = P_y = m \cdot g \cdot \cos\varphi \\ \Sigma\vec{F}_x = 0;\ \vec{P}_x + \vec{F}_{rozamiento} = 0;\ P_x - F_{rozamiento} = 0; P \cdot sen\varphi = \mu \cdot N \end{array}\right\}$$

Operando: $m \cdot g \cdot sen\ \varphi = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\varphi$; $\mu = tg\ \varphi = tg\ 20º = 0{,}36$

14. Bajo la acción de una fuerza de 8 N, un taco de madera cuya masa es de 1,4 kg se mueve en un plano horizontal con una aceleración de 4 m/s^2. Demuestra si hay rozamiento y, si lo hay, halla el coeficiente.

Supongamos que no existe rozamiento. Las fuerzas que actúan sobre el objeto son:

- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: $\mathbf{P} = (0, -m \cdot g)$.
- La normal, **N**, reacción del suelo sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza **F**, ejercida sobre el objeto: $\mathbf{F} = (F, 0)$.



Aplicamos el segundo principio a cada uno de los ejes.

Sobre el eje *y* no hay movimiento, por tanto, al aplicar el segundo principio en este eje queda:

$$N - m \cdot g = 0 \quad \rightarrow \quad N = m \cdot g$$

Sobre el eje *x* existe aceleración, por tanto:

$$F = m \cdot a \quad \rightarrow \quad a = \frac{F}{m} = \frac{8}{1{,}4} = 5{,}7 \text{ m/s}^2$$

Como la aceleración del movimiento es menor, tiene que existir rozamiento, de forma que la ecuación sobre el eje *x*, sería:

$$F - F_r = m \cdot a \quad \rightarrow \quad F - \mu \cdot N = m \cdot a \quad \rightarrow \quad F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a$$

Despejando el coeficiente de rozamiento obtenemos:

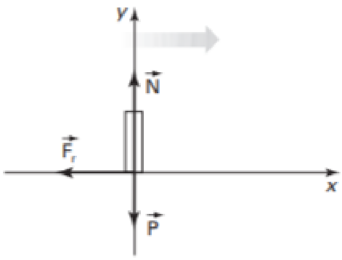
$$\mu = \frac{F - m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{8 - 1{,}4 \cdot 4}{1{,}4 \cdot 9{,}81} = 0{,}17$$

15. Un patinador se desliza sobre una pista de hielo horizontal, manteniendo una velocidad de 3,5 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre los patines y el hielo es 0,03 y el patinador deja de impulsarse, ¿qué distancia recorrerá hasta pararse?

Cuando el patinador deja de impulsarse, la única fuerza que actúa sobre él en la dirección del movimiento es la de rozamiento.

Las fuerzas aplicadas son:

- El peso del cuerpo: $\mathbf{P} = (0, -m \cdot g)$.
- La normal: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.



Aplicando el segundo principio de la dinámica, $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, sobre cada uno de los ejes obtenemos:

En el eje *x*:

$$-\mu \cdot N = m \cdot a$$

En el eje *y*:

$$N - m \cdot g = 0$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$a = -\mu \cdot g \quad \rightarrow \quad a = -0{,}29 \text{ m/s}^2$$

El patinador lleva aceleración constante en la dirección del movimiento y sentido contrario a este.

Si la velocidad $v_0 = 3{,}5$ m/s y se para, $v = 0$ m/s, el espacio recorrido será:

$$-v_0^2 = 2\, a \cdot s \quad \rightarrow \quad s = \frac{-v_0^2}{2\, a}$$

Sustituyendo los datos obtenemos:

$$s = 21 \text{ m}$$

16. Un cuerpo de 5 kg de masa se desliza por un plano horizontal. Al pasar por un punto, su velocidad es de 7 m/s y se para 8 m más allá, por efecto del rozamiento. Calcula:

a) La aceleración del movimiento.

b) La fuerza de rozamiento.

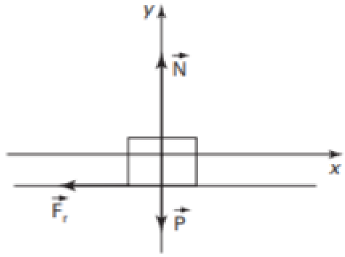
c) El coeficiente de rozamiento.

a) Conocidas las velocidades y el espacio recorrido, la aceleración será:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a \cdot s \;\rightarrow\; a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\,s} = \frac{0 - 7^2}{2 \cdot 8} = -3{,}1 \text{ m/s}^2$$

b) Las fuerzas que actúan sobre el objeto son:

- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: **P** = $(0, -m \cdot g)$.
- La normal, **N**, reacción del suelo sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: **N** = $(0, N)$.
- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F_r}$, en la dirección del movimiento y en sentido contrario: $\mathbf{F_r} = (-F_r, 0)$.



Aplicamos el segundo principio a cada uno de los ejes.

Sobre el eje *y* no hay movimiento; por tanto, al aplicar el segundo principio en este eje queda:

$$N - m \cdot g = 0 \;\rightarrow\; N = m \cdot g$$

Sobre el eje *x* existe aceleración, por tanto:

$$-F_r = m \cdot a = 5 \cdot (-3{,}1) = -15{,}5 \text{ N} \;\rightarrow\; F_r = 15{,}5 \text{ N}$$

c) El coeficiente de rozamiento se obtiene de la definición del valor de la fuerza de rozamiento:

$$F_r = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \;\rightarrow\; \mu = \frac{F_r}{m \cdot g} = \frac{15{,}5}{5 \cdot 9{,}81} = 0{,}32$$

17. Un cuerpo de 10 kg se mueve en un plano horizontal por la acción de una fuerza paralela al plano de 75 N. Si el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0{,}3$, calcula:

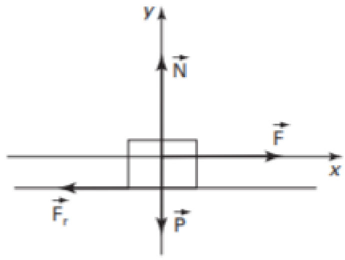
a) La aceleración del movimiento.

b) La velocidad a los 5 m de recorrido.

c) El tiempo que transcurre en esos 5 m.

a) Las fuerzas que actúan sobre el objeto son:

- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: **P** = $(0, -m \cdot g)$.
- La normal, **N**, reacción del suelo sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: **N** = $(0, N)$.
- La fuerza **F**, ejercida sobre el objeto: **F** = $(F, 0)$.
- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F_r}$, en la dirección del movimiento y sentido contrario: $\mathbf{F_r} = (-\mu \cdot N, 0)$.



Aplicamos el segundo principio a cada uno de los ejes.

Sobre el eje *y* no hay movimiento; por tanto, al aplicar el segundo principio en este eje queda:

$$N - m \cdot g = 0$$

Sobre el eje *x* existe aceleración, por tanto: $F - \mu \cdot N = m \cdot a$

Despejando la normal de la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda obtenemos:

$$F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a$$

Despejando la aceleración obtenemos:

$$a = \frac{F - \mu \cdot m \cdot g}{m} = \frac{75 - 0{,}3 \cdot 10 \cdot 9{,}81}{10} = 4{,}6 \text{ m/s}^2$$

b) Conocidas la aceleración y el espacio, la velocidad será: $v = \sqrt{2\,a \cdot s} = \sqrt{2 \cdot 4{,}6 \cdot 5} = 6{,}8$ m/s

c) El tiempo se puede obtener a partir de la ecuación de la velocidad:

$$v = a \cdot t \;\rightarrow\; t = \frac{v}{a} = \frac{6{,}8}{4{,}6} = 1{,}5 \text{ s}$$

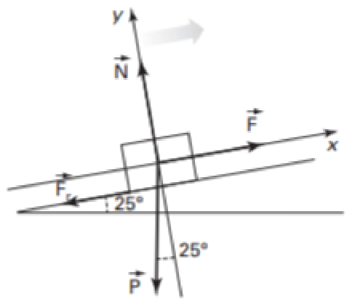
18. Un cuerpo de 25 kg sube por un plano inclinado 25°, cuyo coeficiente de rozamiento es $\mu = 0{,}25$, debido a que sobre él se aplica una fuerza de 300 N en la dirección del desplazamiento.

a) ¿Con qué aceleración asciende el cuerpo?

b) ¿Qué fuerza habría que aplicar en la dirección del desplazamiento para que el cuerpo suba con velocidad constante?

a) La dirección del movimiento y su sentido será el eje positivo de las x, el eje perpendicular a este será por tanto el de las y, con sentido positivo hacia arriba.

Las fuerzas aplicadas son:



- El peso: $\mathbf{P} = (-m \cdot g \cdot \sin 25°, -m \cdot g \cdot \cos 25°)$.
- La normal: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.
- La fuerza aplicada: $\mathbf{F} = (F, 0)$.

Aplicando que $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, a cada uno de los ejes obtenemos:

En el eje x: $F - m \cdot g \cdot \sin 25° - \mu \cdot N = m \cdot a$

En el eje y: $N - m \cdot g \cdot \cos 25° = 0$

Despejando la normal de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera queda:

$$F - m \cdot g \cdot \sin 25° - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 25° = m \cdot a$$

Despejando la aceleración: $$a = \frac{F - m \cdot g \cdot (\sin 25° + \mu \cdot \cos 25°)}{m}$$

Sustituyendo los datos obtenemos: $a = 5{,}6\ \text{m/s}^2$

b) Para que el cuerpo suba con velocidad constante la aceleración en el eje x, debe ser cero, por tanto, las ecuaciones serían:

En el eje x: $F - m \cdot g \cdot \sin 25° - \mu \cdot N = 0$

En el eje y: $N - m \cdot g \cdot \cos 25° = 0$

Despejando la normal de la segunda y sustituyendo en la primera queda:

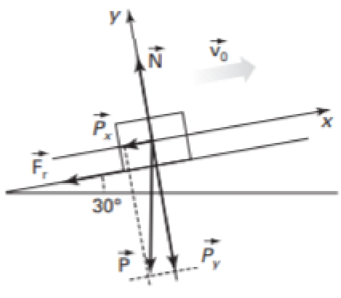
$$F - m \cdot g \cdot \sin 25° - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 25° = 0$$

Despejando la fuerza: $F = m \cdot g \cdot (\sin 25° + \mu \cdot \cos 25°)$

Sustituyendo los datos obtenemos: $F = 159\ \text{N}$

19. Un cuerpo de 5 kg es lanzado a la velocidad de 11 m/s por un plano inclinado 30° con la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0{,}25$, calcula la aceleración y el espacio que recorre hasta detenerse. Indica si las soluciones son las mismas con otra masa.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:



- El peso **P**, en la dirección del radio terrestre y hacia el centro de la Tierra: $\mathbf{P} = (-m \cdot g \cdot \sin 30°, -m \cdot g \cdot \cos 30°)$.
- La normal, **N**, reacción del plano sobre el cuerpo, perpendicular a la superficie de apoyo y hacia arriba: $\mathbf{N} = (0, N)$.
- La fuerza de rozamiento, $\mathbf{F}_r$, en la dirección del movimiento y sentido contrario: $\mathbf{F}_r = (-\mu \cdot N, 0)$.

Aplicando el segundo principio a los dos ejes tenemos:

En el eje y no hay movimiento, en consecuencia: $N - m \cdot g \cdot \cos 30° = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot \cos 30°$

En el eje x: $-m \cdot g \cdot \sin 30° - \mu \cdot N = m \cdot a$

Sustituyendo el valor de la normal en esta ecuación:

$$-m \cdot g \cdot \sin 30° - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30° = m \cdot a \rightarrow a = -g \cdot \sin 30° - \mu \cdot g \cdot \cos 30°$$

Podemos sacar factor común a la aceleración de la gravedad y obtenemos:

$$a = -g \cdot (\sin 30° + \mu \cdot \cos 30°) = -9{,}81 \cdot (\sin 30° + 0{,}25 \cdot \cos 30°) = -7\ \text{m/s}^2$$

Conocidas las velocidades y la aceleración, el espacio será:

$$v^2 = v_0^2 + 2\, a \cdot s \rightarrow s = \frac{v^2 - v_0^2}{2\, a} = \frac{0 - 11^2}{2 \cdot (-7)} = 8{,}6\ \text{m}$$

Los resultados son independientes del valor de la masa.