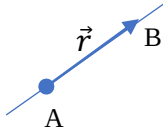


Tema 0. CÁLCULO VECTORIAL. MECÁNICA CLÁSICA

1. CÁLCULO VECTORIAL

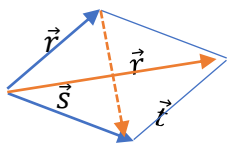
1.1 INTRODUCCIÓN

- **Magnitud:** propiedad de un cuerpo que es posible cuantificar.
- **Magnitud escalar:** definida por un número y su unidad.
- **Magnitud vectorial:** definida por un vector
→ **Vector:** ente matemático definido como segmento de recta orientado.



- **Módulo:** proporcional a la longitud del segmento $\overline{AB}$
- **Dirección:** recta en la que se encuentra.
- **Sentido:** indicado por la punta de la flecha en B
- **Punto de aplicación:** punto A

1.2 SUMA Y RESTA DE VECTORES



- **Suma:** vector diagonal saliente del paralelogramo que forman los vectores que se suman.

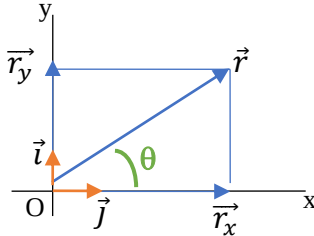
- **Resta:** la otra diagonal del mismo paralelogramo.

$$\vec{t} = \vec{r} - \vec{s} = \vec{r} + (-\vec{s})$$

$\vec{t} = \text{resultante}$; $\vec{r}, \vec{s} = \text{componentes del vector } \vec{t}$

1.3 DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR. COMPONENTES CARTESIANAS

- La descomposición vectorial es el proceso inverso a la suma: conocido un vector, se trata de encontrar otros que, sumados, den el primero.
- Si consideramos el sistema de referencia en coordenadas cartesianas, cualquier vector $\vec{r}$ se puede escribir como:



En 2D (plano XY): $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$

En 3D: $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z$

1.4 VECTOR UNITARIO

Vector de módulo la unidad que define una orientación y un sentido positivo: $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Así: $\vec{r} = |\vec{r}| \cdot \vec{u}_r$

donde $|\vec{r}| = r$ es el módulo del vector $\vec{r}$

Las componentes cartesianas:

$$\begin{cases} \vec{r}_x = r_x \cdot \vec{u}_x = r_x \cdot \vec{i} = x \cdot \vec{i} \\ \vec{r}_y = r_y \cdot \vec{u}_y = r_y \cdot \vec{j} = y \cdot \vec{j} \\ \vec{r}_z = r_z \cdot \vec{u}_z = r_z \cdot \vec{k} = z \cdot \vec{k} \end{cases}$$

donde x, y, z son las proyecciones del vector $\vec{r}$ sobre los tres ejes de coordenadas cartesianas, e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ los vectores unitarios de dichos ejes. Así:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \quad \text{o} \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

Módulo de un vector: $\vec{r} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$ o $\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

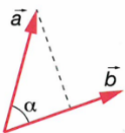
Suma: $\vec{t} = \vec{r} + \vec{s} = (r_x + s_x)\vec{i} + (r_y + s_y)\vec{j} + (r_z + s_z)\vec{k}$

En 2D (plano XY) podemos comprobar que:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos \theta \\ y &= r \cdot \sin \theta \end{aligned} \right\} \vec{r} = r \cdot (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$

1.5 PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL

Producto escalar: $\vec{r} \cdot \vec{s} = |\vec{r}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$



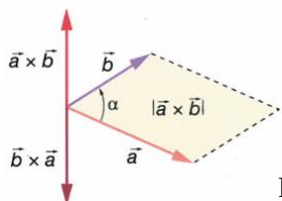
Propiedades: • $\vec{r} \cdot \vec{s} = \vec{s} \cdot \vec{r}$

• $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$ ($\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$)

• $\vec{r} \cdot \vec{s} = 0$ si $|\vec{r}| = 0, |\vec{s}| = 0$ ó $\alpha = 90^\circ$ ($\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$)

En coordenadas cartesianas: $\vec{r} \cdot \vec{s} = r_x \cdot s_x + r_y \cdot s_y + r_z \cdot s_z$

Producto vectorial: $\vec{r} \times \vec{s} = \vec{t}$ tal que: $|\vec{t}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{s}| \cdot \sin \alpha$



• *dirección:* perpendicular al plano que contiene a $\vec{r}$ y a $\vec{s}$

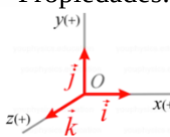
• *sentido:* avance del sacacorchos al girar del primero ($\vec{r}$) al segundo ($\vec{s}$) por el camino más corto (o “regla de la mano izquierda”)

Propiedades: • $\vec{r} \times \vec{s} = -\vec{s} \times \vec{r}$

• $|\vec{r} \times \vec{s}| = 0$ si $|\vec{r}| = 0, |\vec{s}| = 0$ ó $\alpha = 0^\circ$ ($\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$)

• $|\vec{r} \times \vec{s}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{s}|$ si $\alpha = 90^\circ$ ($\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$)

• $|\vec{r} \times \vec{s}| = -|\vec{r}| \cdot |\vec{s}|$ si $\alpha = -90^\circ$



En coordenadas cartesianas: $\vec{r} \times \vec{s} = (r_y s_z - r_z s_y)\vec{i} - (r_x s_z - r_z s_x)\vec{j} + (r_x s_y - r_y s_x)\vec{k}$

O mediante el determinante: $\vec{r} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix}$

1.6 MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN PUNTO

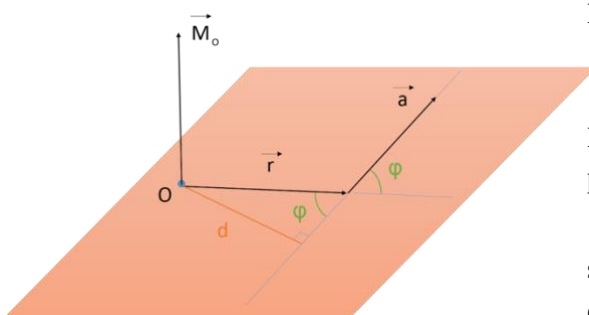
Momento del vector $\vec{v}$ respecto al punto O:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{v}$$

El vector $\vec{v}$ es un vector deslizante. Su momento no depende del punto de aplicación sobre la recta soporte.

$$|\vec{M}_O| = r \cdot v \cdot \sin \alpha = d \cdot v$$

siendo d la distancia mínima desde O hasta el punto de aplicación de $\vec{v}$.



$\vec{M}_O$ tiene dirección perpendicular al plano que contiene a O y a $\vec{v}$ y sentido del avance del sacacorchos de $\vec{r}$ a $\vec{v}$ por el camino más corto.

2. CINEMÁTICA

2.1 FUNCIONES VECTORIALES. DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN

Funciones vectoriales: las magnitudes vectoriales, al igual que las escalares, pueden ser funciones dependientes de un escalar. En Física este escalar suele ser el *tiempo* (t):

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$$

Así, al darle diferentes valores a t , se obtienen diferentes vectores. Si las funciones $v_x(t)$, $v_y(t)$ y $v_z(t)$ son continuas, el vector $\vec{v}$ describirá una curva continua en el espacio.

Derivación e integración de funciones vectoriales:

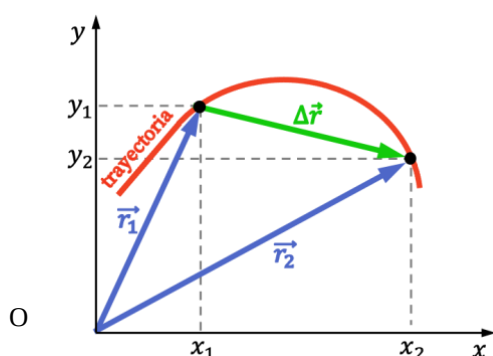
- Derivación: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_x}{dt} \vec{i} + \frac{d\vec{v}_y}{dt} \vec{j} + \frac{d\vec{v}_z}{dt} \vec{k}$
- Integración: $\int_0^t \vec{v}(t) dt = \int_0^t v_x(t) dt \cdot \vec{i} + \int_0^t v_y(t) dt \cdot \vec{j} + \int_0^t v_z(t) dt \cdot \vec{k}$

2.2 CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

Cinemática: estudia el movimiento de los cuerpos independientemente de las causas que lo producen.

Punto material: objeto con masa, pero sin dimensiones, que no puede rotar.

Movimiento: cambio de posición de un punto material con respecto a un sistema de referencia (S.R.) que consideramos fijo.



Trayectoria: camino seguido por el móvil en su desplazamiento.

$$s = s(t)$$

Vector de posición: vector que tiene por origen el del sistema de referencia y como extremo la posición del móvil.

El movimiento de una partícula estaría completamente definido mediante el vector de posición o *ecuación vectorial del movimiento*:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Vector desplazamiento: vector que tiene por origen la posición inicial del móvil y por extremo la posición final.

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Si el móvil se desplaza en línea recta, sin cambiar el sentido del movimiento, el módulo del vector desplazamiento coincidirá con la distancia recorrida:

$$|\vec{\Delta r}| = \Delta s \Rightarrow \text{trayectoria rectilínea}$$

$$|\vec{\Delta r}| \neq \Delta s \Rightarrow \text{trayectoria curvilínea}$$

2.3 VELOCIDAD

La velocidad expresa el cambio de posición de un cuerpo con respecto al tiempo.

Velocidad media de un móvil en un intervalo de tiempo $(t, t+\Delta t)$:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}'(t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Velocidad instantánea (o **velocidad**) de un móvil en el instante t : es la velocidad en cada punto de la trayectoria del móvil. Es un vector *tangente* a la trayectoria en el punto considerado.

$$\vec{v} = \vec{v}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Si conocemos la trayectoria del móvil, se define:

Celeridad (o **rapidez**) **media**: módulo de la velocidad media.

$$v_m = |\vec{v}_m| = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Celeridad (o **rapidez**) **instantánea**: módulo de la velocidad instantánea.

$$v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

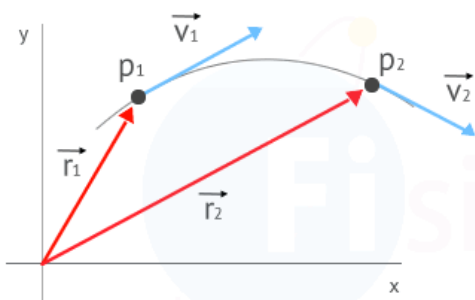
- Componentes cartesianas de la velocidad:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$$

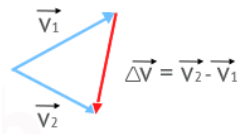
- Módulo de la velocidad: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

2.4 ACCELERACIÓN

La aceleración expresa el cambio de velocidad (en módulo o en dirección) con respecto al tiempo.



Aceleración media:



$$a_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea (o **aceleración**) del móvil en el instante t : representa la rapidez en el cambio de la velocidad con respecto al tiempo.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

- Componentes cartesianas de la aceleración:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \vec{k} = a_x(t) \vec{i} + a_y(t) \vec{j} + a_z(t) \vec{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}; a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}; a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

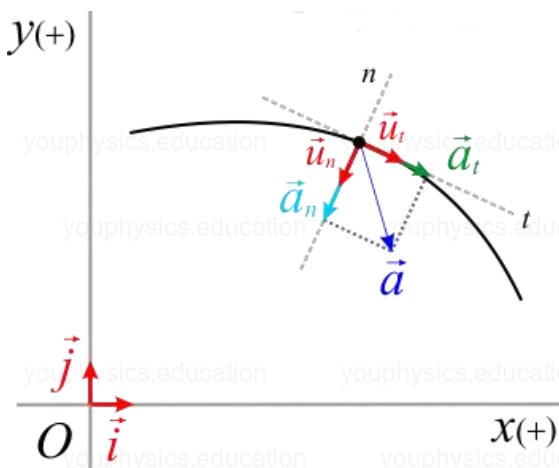
- Módulo de la aceleración: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Componentes intrínsecas de la aceleración:

NOTA: Las coordenadas intrínsecas es un sistema de ejes ligado al punto móvil. Está formado por la tangente y la normal a la *trayectoria* en cada punto. Es intrínseco al propio movimiento de la partícula.

- *Componente tangencial*: definida por el vector unitario $\vec{u}_t$
- *Componente normal*: definida por el vector unitario $\vec{u}_n$

De esta manera, las componentes intrínsecas de la aceleración son la *aceleración normal* y la *aceleración tangencial*.



$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \cdot \vec{u}_t + a_n \cdot \vec{u}_n$$

$$\text{Como } \vec{v} = v \cdot \vec{u}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + v \frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

$$\vec{a}_t \vec{a}_n$$

$$v \frac{d\vec{u}_t}{dt} = v \frac{d\vec{u}_t}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v^2 \frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{u}_n$$

donde R es el radio de curvatura.

OBSERVACIÓN: si el movimiento es rectilíneo, el término $\frac{d\vec{u}_t}{dt}$ es nulo. Si el movimiento es curvilíneo, la dirección de $\vec{u}_t$ cambia continuamente.

Aceleración tangencial: $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t$

- Tiene la dirección de $\vec{u}_t$, es decir, es tangente a la trayectoria en cada punto.
- Coincide con el vector velocidad en dirección. Mismo sentido si el movimiento es acelerado y sentido opuesto si es decelerado.
- Si $a_t = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ movimiento uniforme
- Si $a_t = cte \Rightarrow$ movimiento uniformemente acelerado (o decelerado)

Aceleración normal (o centrípeta): $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{u}_n$

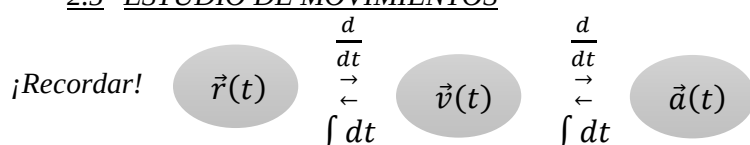
- Tiene la dirección de $\vec{u}_n$, es decir, es perpendicular a la trayectoria en cada punto.
- Está debida a los cambios en la dirección del móvil.
- Su sentido es cara al centro de la curva.
- Si $a_n = 0 \Rightarrow R = \infty \Rightarrow$ movimiento rectilíneo
- Si $a_n = cte \Rightarrow R = cte \Rightarrow$ movimiento circular

RESUMEN:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \cdot \vec{u}_t + a_n \cdot \vec{u}_n = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{R} \vec{u}_n$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

2.5 ESTUDIO DE MOVIMIENTOS



Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU): $a = 0 \Rightarrow v = cte$

- Velocidad: $\vec{v} = \vec{v}_0 = cte$
- Posición: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot (t - t_0) \rightarrow$ en general $t_0 = 0$

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA):

- Velocidad: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$
- Posición: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2$
- Relación entre $\vec{v}$ y $\vec{r}$: $v^2 - v_0^2 = 2 \cdot \vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$

Composición de Movimientos (Mov. Parabólico)

Es necesario descomponer el movimiento en un eje horizontal y un eje vertical

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje x: MRU} \rightarrow a_x = 0 \\ \text{Eje y: MRUA} \rightarrow a_y = -10 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\} \vec{a} = -10\vec{j}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \begin{cases} x = x_0 + v_x \cdot t \\ y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2 \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + a_y \cdot t \end{cases}$$

Movimiento Circular Uniforme (MCU): $a_t = 0$; $a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$ (vectorialmente: $\vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{r}$, ya que $\vec{a}_n$ tiene misma dirección, pero sentido opuesto a $\vec{r}$).

- Velocidad angular: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = cte$
- Ángulo: $\theta = \theta_0 + \omega \cdot t$
- Relación entre magnitudes lineales y angulares: $\Delta s = \Delta \theta \cdot r$; $v = \omega \cdot r$; $a_t = \alpha \cdot r$

3. DINÁMICA

3.1 LEYES DE NEWTON

Interacción: acción recíproca que ejercen entre sí dos o más partículas.

Fuerza: medida cuantitativa de la intensidad de una interacción.

Mecánica clásica: teoría del movimiento basada en las ideas de masa y fuerza y las leyes que relacionan estos conceptos con las magnitudes cinemáticas posición, velocidad y aceleración. Estas leyes son las **Leyes de Newton (1687)**:

1ª Ley. Ley de la inercia: “Un cuerpo permanece en el estado inicial de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme mientras no actúe una fuerza resultante no nula sobre él”.

La materia no es capaz de modificar por sí misma el estado de reposo o de MRU. La tendencia a permanecer en una de estas situaciones se llama *inercia*.

2ª Ley. Principio fundamental de la dinámica: “Cuando una fuerza resultante no nula actúa sobre un cuerpo de masa m , esta produce una aceleración a directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa del cuerpo”.

$$\vec{F}_{neta} = \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

La aceleración tendrá la misma dirección y sentido que la fuerza neta aplicada.

Masa inerte: $m = \frac{F}{a}$, representa la oposición que un cuerpo ofrece al adquirir una aceleración cuando se le aplica una fuerza.

3ª Ley. Principio de acción y reacción: “Las fuerzas actúan siempre por parejas. Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre otro B (acción), este responde sobre el primero con otra fuerza de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario (reacción)”.

- Características de las parejas de fuerzas acción-reacción:
 - a) Son simultáneas.
 - b) Tienen puntos de aplicación diferentes (¡diferentes cuerpos!), ya que no se anulan nunca.
 - c) Los efectos dinámicos son diferentes, ya que se producen en cada uno de los cuerpos, dependiendo de sus características.

3.2 TIPOS DE FUERZAS MÁS COMUNES.

Peso: medida de la fuerza gravitatoria que actúa sobre un cuerpo. $P = m \cdot g$

Normal: fuerza que ejerce una superficie sobre un cuerpo que está apoyado sobre ella.

Tensión: fuerza que ejerce una cuerda (cable o estructura similar) sobre un cuerpo que está unido a ella.

Fuerza de rozamiento: fuerza que se opone al movimiento de un cuerpo sobre la superficie con la que está en contacto. $F_R = \mu \cdot N$

Fuerza elástica: fuerza que ejerce un material elástico cuando es deformado. Tiene la misma magnitud y dirección que la fuerza que ha deformado el cuerpo elástico pero su sentido es contrario.

$F_{elástica} = K \cdot \Delta x$, donde K es la constante elástica del material (depende de sus características) y Δx la elongación cuando es deformado.

$F_{recuperadora} = - K \cdot \Delta x$ (Ley de Hooke)

3.3 SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIALES Y NO INERCIALES. FUERZAS DE INERCIA

Sistema de referencia inercial: es un S.R. fijo o con movimiento rectilíneo uniforme $\Leftrightarrow$ Si un cuerpo se mueve con una velocidad constante respecto a un S.R. y sobre él no actúa ninguna fuerza, diremos que el S.R. es *inercial* (1ª Ley de Newton).

- Los S.R. ligados a la Tierra los consideramos inerciales debido al pequeño valor de la aceleración en sus movimientos de rotación y traslación.
- Las leyes de Newton solo se verifican en los S.R. inerciales. La aceleración de un objeto es la misma cuando se mide respecto de cualquier S.R. inercial (*Principio de relatividad de Galileo*).
- En los S.R. no inerciales (S.R. con aceleración) las leyes de Newton no se verifican. Para poder aplicar las leyes de Newton se recurre a unas fuerzas ficticias llamadas **fuerzas de inercia** o *pseudofuerzas*, que no corresponden con interacciones.

3.4 MOMENTO LINEAL Y MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA. CONSERVACIÓN

Momento lineal o cantidad de movimiento, $\vec{p}$: es una medida de la dificultad para llevar una partícula al reposo. Cuesta más frenar un camión que una bicicleta, ya que hay que tener en cuenta la masa.

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, es un vector de igual dirección y sentido que la velocidad, pero de diferente módulo.
Sus unidades S.I. son kg·m/s

Teorema de conservación del momento lineal: “Si una partícula no interactúa con ninguna fuerza (fuerza neta nula), su momento lineal permanece constante, es decir, se conserva”.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} ; \text{ si } \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte$$

Sistema de partículas aislado: es aquel en el que las partículas interaccionan entre sí, pero no con partículas exteriores al sistema, por lo tanto, se cumple que: $\sum \vec{F}_{ext} = 0$

“En un sistema de partículas aislado el momento lineal no varía con el tiempo, es decir, se conserva”.

$$\vec{p}_T = \sum \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \vec{p}'_3 = cte, \text{ donde } \vec{p}_i \text{ es el momento lineal de cada partícula del sistema en un momento determinado.}$$

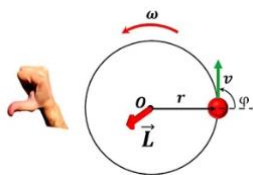
Choques, caso más simple: sistema formado por dos partículas de masas m_1 y m_2 (moviéndose con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$) que colisionan.

$$\vec{p}_{antes\ del\ choque} = \vec{p}'_{justo\ después\ del\ choque}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m'_1 \cdot \vec{v}'_1 + m'_2 \cdot \vec{v}'_2$$

- Choque elástico: $m_1 = m'_1$, $m_2 = m'_2$
- Choque inelástico: las masas pueden variar después de la colisión. $m_1 \neq m'_1$, $m_2 \neq m'_2$

Momento angular, $\vec{L}$: en los movimientos circulares o de rotación el momento angular juega el mismo papel que el momento lineal en los movimientos rectilíneos.



$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

El momento angular de una partícula de masa m respecto al punto O es el momento del vector momento lineal.

Teorema de conservación del momento angular: “si los momentos de las fuerzas que actúan sobre una partícula con respecto a un punto son cero o se anulan entre sí, el momento angular de la partícula con respecto a ese punto permanecerá constante”.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}_T = \vec{M}_O$$

$$\text{si } \vec{M}_O = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$$

Esto se da en dos situaciones:

- 1) Si la fuerza neta resultante que actúa sobre la partícula es cero.
- 2) Si la fuerza tiene una dirección que pase constantemente por el punto O (fuerzas centrales).

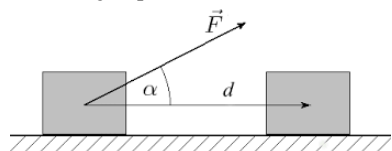
4. TRABAJO Y ENERGÍA

Esfuerzo vs Trabajo: hacemos *esfuerzo* al aplicar una fuerza y realizamos *trabajo* si la fuerza aplicada produce una transformación, que implica un desplazamiento.

Los cuerpos, además de tener masa, tienen **energía**, energía que pueden transferir a otros sistemas físicos. Las transformaciones pueden ser en forma de trabajo o en forma de calor y nos permiten explicar el universo de una manera diferente: teniendo en cuenta las transformaciones de energía que se producen entre ellas.

4.1 TRABAJO

El trabajo que realiza una fuerza resultante $\vec{F}$ sobre un cuerpo a lo largo de un desplazamiento rectilíneo $\Delta\vec{r}$ es:

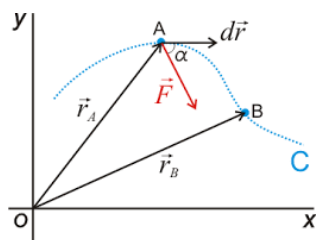


$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta$$

$F \cdot \cos\theta$ se denomina **fuerza efectiva** y es la proyección de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

El trabajo es una magnitud escalar y en el S.I. se mide en *Joule* (J).

Si en lugar de realizar un desplazamiento macroscópico $\Delta \vec{r}$ realizamos un desplazamiento infinitesimal, $d\vec{r}$, en un intervalo finito, el trabajo será:



$$W = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} F \cdot \cos\theta \cdot dr = \int_{r_A}^{r_B} F_{ef} \cdot dr$$

4.2 POTENCIA

Potencia: es el trabajo realizado por unidad de tiempo. Mide, por tanto, la rapidez con la que se realiza un trabajo.

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

Su unidad en el S.I. es el *vatio* (w): 1 w = 1 J/s.

En el sistema inglés y técnico: 1 *caballo de vapor* (c.v.): 1 c.v. = 735 w

Otras unidades: *kilovatio-hora* (kw·h) 1 kw·h = 3 600 000 J = $3,6 \cdot 10^6$ J

4.3 ENERGÍA

Energía: es la capacidad que tiene un objeto para producir transformaciones. Se presentan diferentes tipos de energía en función de los diferentes cambios o transformaciones de la materia.

Energía mecánica: está asociada a los cambios en el estado mecánico de los cuerpos (*posición* → energía potencial y *velocidad* → energía cinética). La energía mecánica está relacionada con la capacidad para realizar trabajo físico.

Energía cinética: es la capacidad que tiene un cuerpo para realizar trabajo en función de su estado de movimiento. Corresponde con el trabajo que fue necesario realizar para comunicarle esa velocidad o para reducir su velocidad o detenerlo.

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Es una magnitud escalar, siempre positiva y no depende del sentido de $\vec{v}$.

Teorema de las fuerzas vivas o de la energía cinética: el trabajo que realiza un cuerpo o el que se realiza sobre él es igual a la variación que experimenta su energía cinética.

$$W_{A \rightarrow B} = E_{C_B} - E_{C_A} = \Delta E_C$$

- Si realizamos trabajo sobre el cuerpo: $W > 0 \Rightarrow \Delta E_C > 0 \Rightarrow$ el cuerpo aumenta su E_C
- Si el cuerpo realiza trabajo: $W < 0 \Rightarrow \Delta E_C < 0 \Rightarrow$ el cuerpo disminuye su E_C .

Energía potencial: energía asociada a los cambios de posición de los objetos.

Fuerzas conservativas: se caracterizan por devolver todo el trabajo que se hace sobre ellas al aplicar una fuerza exterior igual y de sentido opuesto que desplaza el objeto que realiza trabajo.

El trabajo realizado para “vencer” las fuerzas conservativas no es perdido, sino que pasa a una forma de energía (potencial) esperando a ser devuelto. Ejemplo: fuerza gravitatoria, fuerza elástica, fuerza eléctrica.

- El trabajo realizado por una fuerza conservativa cuando se desplaza entre dos puntos es independiente del camino seguido. Solo depende de las posiciones inicial y fina.
- El trabajo realizado por una fuerza conservativa en un desplazamiento cerrado es nulo.

Energía potencial gravitatoria: energía asociada a la altura de un objeto respecto de una posición inicial.

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

El trabajo que tiene que realizar una fuerza externa para llevar ese objeto de una posición inicial A a otra B es:

$$W_{ext} = m \cdot g \cdot (h - h_0) = \Delta E_{P_{A \rightarrow B}}$$

El trabajo que realizamos sobre el cuerpo aumenta su energía potencial.

Energía potencial elástica: energía asociada a la deformación de un resorte que se alarga o acorta una distancia x :

$$E_{P_{elástica}} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

- El trabajo realizado contra la fuerza conservativa es: $W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{P_{A \rightarrow B}}$
- El trabajo realizado por la fuerza conservativa es: $W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_{P_{A \rightarrow B}}$

Principio de conservación de la energía mecánica: la energía mecánica de un cuerpo es la suma de su energía cinética y su energía potencial. $E_M = E_C + E_P$

Principio de conservación: “la energía mecánica de un sistema que se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas permanece constante.

El trabajo realizado por las fuerzas conservativas es: $W_{A \rightarrow B} = \Delta E_{C_{A \rightarrow B}} = E_{C_B} - E_{C_A}$

Como la fuerza es conservativa: $W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_{P_{A \rightarrow B}} = E_{P_A} - E_{P_B}$

Por tanto:

$$E_{C_B} - E_{C_A} = E_{P_A} - E_{P_B} \Rightarrow E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B} \Rightarrow E_{M_A} = E_{M_B}$$

Fuerzas no conservativas: si existen fuerzas no conservativas como la fuerza de rozamiento:

$$W_{roz} = W_C + W_{NC}$$

- Por el teorema de las fuerzas vivas: $W_{roz} = \Delta E_C$
- El trabajo realizado por las fuerzas conservativas: $W_C = -\Delta E_{P_{A \rightarrow B}}$

Entonces: $W_{NC} = E_{M_B} - E_{M_A} = \Delta E_{M_{A \rightarrow B}}$