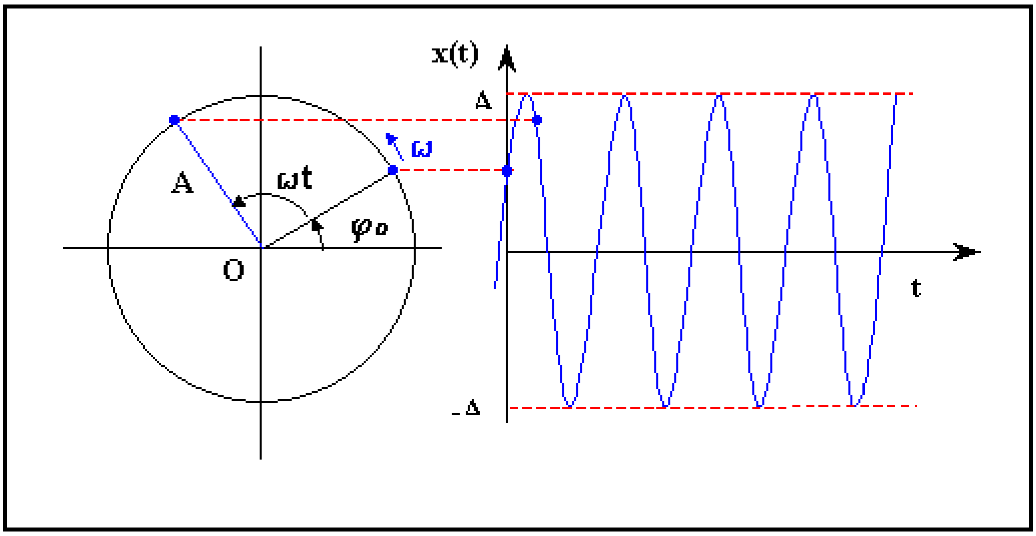
El movimiento armónico simple



El movimiento armónico simple se da cuando la aceleración de un cuerpo depende de su posición, como en el caso de una masa colgada de un muelle. Para este movimiento se cumple que la posición del cuerpo en el eje *y* es la misma que si estuviese realizando un movimiento circular uniforme. Consecuentemente, se pueden emplear las ecuaciones del MCU para estudiar el MAS.

La posición en el eje *y*, por tanto, se puede hallar por trigonometría:

$$y = r \cdot \sin \phi$$

Donde ϕ es el ángulo y r el radio del MCU. Este radio será igual a la amplitud del MAS, o la elongación máxima que alcanza el cuerpo. Aplicando las fórmulas del MCU:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_0)$$

ϕ_0 es la fase inicial, y dependerá de la posición en la que se encuentre el cuerpo al iniciar el movimiento. ω es la frecuencia angular, el análogo a la velocidad angular, y se relaciona con la frecuencia y el período de acuerdo a las ecuaciones del MCU.

La velocidad se puede hallar derivando la posición respecto al tiempo:

$$\mathrm{v} = \frac{dy}{dt} = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)$$

La aceleración se puede hallar volviendo a derivar la velocidad respecto al tiempo:

$$a = \frac{d\text{v}}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Sin embargo:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_0)$$

$$a = -\omega^2 \cdot y$$

De acuerdo a la ley de Hooke, la fuerza que ejerce un muelle está relacionada con su posición y con una constante, la constante elástica:

$$F = -k \cdot y$$

De acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$F = m \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k \cdot y}{m}$$

$$-\frac{k \cdot y}{m} = -\omega^2 \cdot y$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

Así se demuestra que la frecuencia angular de un muelle, y por tanto su período y frecuencia, solo dependen de la masa y su constante de elasticidad, pero no la amplitud.

Ejercicio resuelto 1

Los muelles se pueden emplear en los relojes para marcar el tiempo. ¿Qué masa habrá que colgar de un muelle de constante 50 N/m para que de una oscilación completa cada segundo?

Datos: T=1 s; k=50 N/m

A partir del período calculamos su frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Empleamos la ecuación que relaciona la constante con la frecuencia angular:

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

Despejamos, sustituimos y calculamos:

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot m$$

$$m = \frac{k \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$m = \frac{50\frac{N}{m} \cdot (1\ s)^2}{4\pi^2} = 1{,}27\ kg$$

Ejercicio resuelto 2:

De un muelle de constante 250 N/m se cuelga una masa de 0,5 kg. Calcula la frecuencia del movimiento armónico resultante. ¿Dónde se hallará el cuerpo al cabo de 5 segundos? ¿Qué velocidad tendrá?

Datos: k=250 N/m; m=0,5 kg.

Para calcular la frecuencia volvemos a emplear la fórmula que relaciona la frecuencia angular con la constante:

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2 = (2\pi \cdot \nu)^2$$

$$\frac{k}{m} = 4\pi^2 \cdot \nu^2$$

$$\nu^2 = \frac{k}{4\pi^2 \cdot m}$$

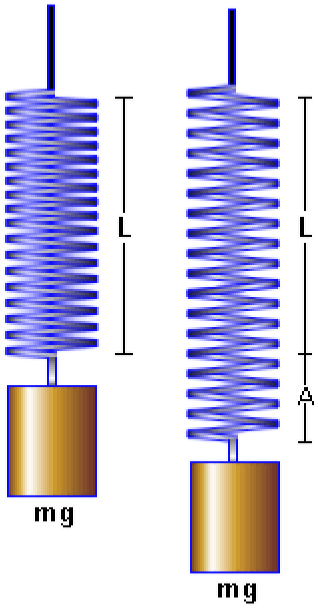
$$\nu = \sqrt{\frac{k}{4\pi^2 \cdot m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\nu = 3{,}56\ Hz$$

Para responder a los otros apartados es necesario establecer las ecuaciones del MAS:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_0)$$

$$\text{v} = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)$$



Necesitamos calcular A, ω y ϕ_0.

La amplitud será la máxima distancia respecto al punto de equilibrio, y será igual a la elongación del muelle provocada al añadir la nueva masa. En ese punto, la fuerza elástica será igual al peso de la masa:

$$F_g = F_e$$

$$m \cdot g = k \cdot A$$

$$A = \frac{m \cdot g}{k}$$

$$A = 0{,}0196\, m$$

La frecuencia angular se puede calcular fácilmente a partir de la constante y la masa:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = 22{,}36\ {}^{rad}/_{s}$$

Cuando t=0, la posición del cuerpo es igual a la amplitud, lo que nos permite calcular su fase inicial, ϕ_0:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_0)$$

$$A = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \phi_0)$$

$$1 = \sin \phi_0$$

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2}\, rad$$

Por tanto, las ecuaciones del MAS quedarían como:

$$y = 0{,}0196\, m \cdot \sin\left(22{,}36\ {}^{rad}/_{s} \cdot t + \frac{\pi}{2}\, rad\right)$$

$$\text{v} = 22{,}36\ {}^{rad}/_{s} \cdot 0{,}0196\, m \cdot \cos\left(22{,}36\ {}^{rad}/_{s} \cdot t + \frac{\pi}{2}\, rad\right)$$

Sustituyendo para t=5 s se obtienen los siguientes resultados:

$$y = 0{,}00529\, m$$

$$\text{v} = 0{,}422\, m/s$$

Ejercicio 1:

De un muelle se cuelga una masa de 300 gramos y se deja oscilar libremente. Si el cuerpo tarda 1,5 segundos en volver a su posición inicial, ¿cuál será la constante del muelle? ¿cuál será la velocidad máxima que alcanzará el cuerpo? ¿a qué tiempo la alcanzará?

Ejercicio 2:

El sonido es debido las vibraciones del aire, y el tono del sonido dependerá de su frecuencia. Por ejemplo, la nota *la* corresponde con una frecuencia de 440 Hz. Si queremos conseguir esa frecuencia con un muelle y una masa de 1,25 kg, ¿cuál deberá ser la constante del muelle? Si empezamos a contar cuando la masa se encuentra en *y=0*, ¿Cuál será la posición del cuerpo al cabo de 0,25 s? ¿Y su velocidad?