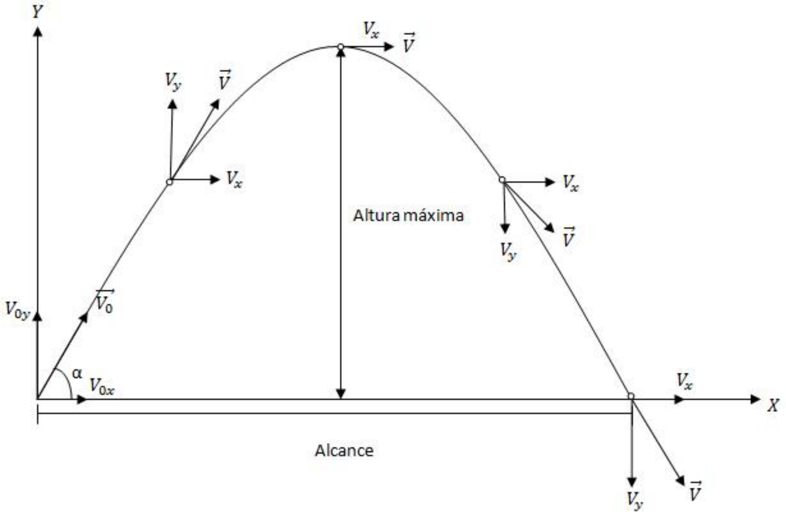
El tiro parabólico



En el tiro parabólico tenemos simultáneamente un movimiento rectilíneo uniforme (en el eje x) y un movimiento de caída libre (en el eje y).

Para estudiar el movimiento debemos descomponer el vector velocidad $\overrightarrow{v_0}$ en sus componentes v_x y v_{0y} empleando la trigonometría:

$$v_x = v_0 \cdot cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot sen\theta$$

Las respectivas ecuaciones del movimiento serían entonces:

Eje x:

$$x = x_0 + v_x \cdot t = x_0 + v_0 cos\theta \cdot t$$

Eje y:

$$v_y = v_{0y} + a \cdot t = v_0 sen\theta - g \cdot t$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = y_0 + v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Dependiendo del problema, emplearemos las ecuaciones anteriores para plantear un sistema y resolver los datos que nos pidan. Es importante recordar que, por cada incógnita, es necesario una ecuación distinta. Igualmente hay que tener en cuenta que en el punto más alto $v_y=0$, mientras que en el punto de impacto $y=0$.

Ejercicio resuelto 1

Calcula el alcance de un proyectil disparado desde un cañón con una velocidad de 840 m/s y un ángulo de 25°

Datos: θ=25°; v_0=840 m/s

Dado que nos pide el alcance, tendremos que calcular el valor de x en el punto de impacto, donde y=0. Para ello emplearemos la segunda ecuación de la caída libre y la ecuación del MRU, resolviendo el sistema.

$$x = x_0 + v_0 cos\theta \cdot t$$

$$y = y_0 + v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 0$$

x_0; y; y_0 valen 0, por lo que calculamos t de la segunda ecuación:

$$0 = v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$\frac{1}{2} g \cdot t^2 = v_0 sen\theta \cdot t$$

$$\frac{1}{2} g \cdot t = v_0 sen\theta$$

$$t = \frac{2 v_0 sen\theta}{g}$$

Sustituimos el t en la primera ecuación, sustituimos y calculamos:

$$x = v_0 cos\theta \cdot \frac{2 v_0 sen\theta}{g} = \frac{2 v_0^2}{g} sen\theta \cdot cos\theta$$

$$x = 2 \cdot \frac{\left(840 \frac{m}{s}\right)^2}{9{,}81 \ ^{m}/_{s^2}} sen(25°) \cdot \cos(25°) = 5{,}5 \cdot 10^4 \ m = 55 \ km$$

Ejercicio resuelto 2:

Calcula la velocidad necesaria para que un proyectil lanzado con un ángulo de 12° alcance los 34 km.

Datos: $x=34\ km=3{,}4\cdot10^4\ m$; $\theta=12°$

En este caso sabemos el alcance, por lo que volvemos a plantear las ecuaciones del ejercicio anterior:

$$x = x_0 + v_0 cos\theta \cdot t$$

$$y = y_0 + v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 0$$

x_0; y; y_0 valen 0:

$$0 = v_0 sen\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$v_0 sen\theta \cdot t = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$v_0 sen\theta = \frac{1}{2} g \cdot t$$

A partir de la primera ecuación despejamos el tiempo:

$$x = v_0 cos\theta \cdot t$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

Sustituimos el tiempo en la segunda ecuación, despejamos y calculamos:

$$v_0 sen\theta = \frac{1}{2} g \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

$$v_0^2 = g \cdot \frac{x}{2 sen\theta \cdot \cos\theta}$$

$$v_0 = \sqrt{g \cdot \frac{x}{2 sen\theta \cdot \cos\theta}} = 660\ {}^{m}/_{s}$$

Ejercicio 1

Un futbolista chuta un balón hacia la portería con una velocidad de 40m/s y un ángulo de 35º. Calcula:

a) Altura máxima
b) El alcance

Ejercicio 2

Lanzamos un proyectil desde el suelo con una velocidad de 80 m/s un ángulo de 50º Calcula la posición y la altura del proyectil:

a) A los 3 segundos
b) A los 8 segundos

Ejercicio 3

En unos juegos olímpicos un lanzador de jabalina consigue alcanzar una distancia de 80 m con un ángulo de inclinación de 30º. Calcula la velocidad inicial de lanzamiento.

Ejercicio 4

Intenta razonar matemáticamente para qué ángulo se conseguirá el alcance máximo en un tiro parabólico. Recuerda que:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$