

CÁLCULO INTEGRAL

O concepto de integral está intimamente ligado ao de área, maila a súa aplicación esténdese a numerosas disciplinas, sendo utilizada, en especial, como ferramenta para calcular conceptos esenciais da Física: volume dun corpo, traballo realizado por unha forza, caudal dun fluído, inercia dun corpo etc.

O cálculo de áreas e volumes, que deu lugar ao que hoxe en día se chama Cálculo Integral, mantívose practicamente estancado desde o século -III (Arquímedes) ata o século XVII, durante o que Newton e Leibnitz descubriron o cálculo diferencial e relacionaron entre si os conceptos de derivada e integral.

Posteriormente, durante o século XIX e principios do XX, Cauchy, Riemann e Lebesgue profundaron no estudo da integral, introducindo máis rigor e perfeccionando, paso a paso, o seu concepto.

A integración é o proceso recíproco da derivación. Daquela, resulta imprescindible saber derivar con soltura para poder afrontar o seu estudo.

Así e todo, o proceso de integrar unha función non sempre é posible, e cando si o é, non sempre obedece a unha mecánica determinada.

O Cálculo Integral estrutúrase en dúas unidades:

11. **Integral Indefinida**, de contido eminentemente práctico, na que, en primeiro lugar, defínense os conceptos de primitiva e integral indefinida dunha función e estúdanse as súas propiedades. A continuación expóñense as fórmulas das integrais inmediatas, que se deducen trivialmente das fórmulas das derivadas das funcións elementais, finalizando a unidade co estudo dos métodos de integración, mediante os cales se calculan integrais de funcións máis complexas.

12. **Integral Definida**, cunha primeira parte de contido teórico, pero intuitivo, onde se define o concepto de integral definida a partir da noción de área e se estudan as propiedades que cumpre. De seguido, demóstranse tres resultados moi importantes (teorema do Valor Medio, teorema Fundamental e regra de Barrow) que establecen a relación existente entre o cálculo diferencial e o cálculo integral. Na segunda parte da unidade, de carácter práctico, afóntase unha das aplicacións máis directas do cálculo integral, como é o cálculo de áreas de rexións planas.

Os principais obxectivos que se perseguen con estas unidades son:

- Comprender o concepto de primitiva e integral indefinida dunha función, considerando que é a operación recíproca da diferenciación.
- Resolver integrais inmediatas e casos sinxelos dos métodos de descomposición, substitución, partes e descomposición en fraccións simples (raíces reais simples e múltiples).
- Entender a noción de integral definida como medida da área baixo unha curva.
- Comprender o teorema Fundamental do Cálculo Integral para poñer de manifesto a estreita relación da integral definida (área) coa integral indefinida (recíproca da derivada).
- Facer uso da regra de Barrow para o cálculo dunha integral definida.
- Aplicar o cálculo integral para achar áreas de rexións planas limitadas por rectas e curvas sinxelas que sexan doadamente representables.



BARROW
Inglaterra, 1630-1677



CAUCHY
Francia, 1789-1857



RIEMANN
Alemaña, 1826-1866

11. INTEGRAL INDEFINIDA

11.1. Primitivas dunha función: Integral indefinida

Diremos que F é unha **función primitiva** de f no intervalo I cando cumpre que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Exemplos: (a) $F(x) = \sin x$ é unha primitiva de $f(x) = \cos x$, pois $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $G_1(x) = x^2$ é unha primitiva de $g(x) = 2x$, pois $G_1'(x) = (x^2)' = 2x = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(c) $G_2(x) = x^2 + 1$ é tamén primitiva de $g(x) = 2x$, pois $G_2'(x) = (x^2 + 1)' = 2x = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Nos tres exemplos anteriores, $I = \mathbb{R}$; pero non sempre é así:

(d) $H_1(x) = \ln x$ é primitiva de $h(x) = \frac{1}{x}$ só en $I = (0, \infty)$, pois $H_1'(x) = \frac{1}{x} = g(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$.

E $H_2(x) = \ln(-x)$ é primitiva de $h(x) = \frac{1}{x}$ só en $(-\infty, 0)$, pois $H_2'(x) = \frac{-1}{-x} = g(x)$, $\forall x \in (-\infty, 0)$.

Á vista dos exemplos (b) e (c), parece evidente que se unha función é primitiva doutra, entón tamén o é sumándolle calquera constante.

A seguinte propiedade, á parte de demostrar que a conxectura anterior é certa, tamén proba que, calquera outra primitiva desa mesma función ten que ser así (resultado de sumarlle unha constante).

Propiedade: Sexa $F(x)$ unha primitiva de $f(x)$. Daquela cúmprese que:

$G(x)$ é unha primitiva de $f(x) \Leftrightarrow G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Demostración: $\Rightarrow$ Ao ser $F(x)$ e $G(x)$ primitivas de $f(x) \Rightarrow F'(x) = G'(x) \Rightarrow G'(x) - F'(x) = 0 \Rightarrow [G(x) - F(x)]' = 0 \xRightarrow[\text{Th. do V.M.}]{\text{Corol. do}}$ $G(x) - F(x) = C$, $C \in \mathbb{R} \Rightarrow G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

$\Leftarrow$ $G'(x) = [F(x) + C]' = F'(x) + 0 = f(x) \Rightarrow G(x)$ é primitiva de $f(x)$.

IP1. (a) Encontra tres primitivas da función $f(x) = \sin x$.

(b) Determina aquela primitiva da función $g(x) = e^x$ que pasa polo punto $(1,0)$.

Se unha función $f(x)$ admite unha primitiva $F(x)$, chámasele **integral indefinida** de $f(x)$ ao conxunto de todas as súas primitivas; represéntase por $\int f(x) \cdot dx$. É dicir: $\int f(x) \cdot dx = \{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}$.

O símbolo $\int$ denomínase **signo de integración**, $f(x)$ chámase **función integrando** e dx lese **diferencial de x** . $F(x) + C$ recibe o nome de **solución xeral**, sendo o costume referirse a C como **constante de integración**.

Notas: (1) Se che interesa saber máis sobre a diferencial, olla o Anexo I.

(2) Por comodidade, na práctica non se usan as chaves nin se recorda que a constante C percorre todos os números reais, escribindo simplemente a solución xeral: $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$.

(3) Ás veces, para abreviar, en lugar de $\int f(x) \cdot dx$ escribiremos simplemente $\int f$.

Exemplos: (a) $\int 2x \cdot dx = \boxed{x^2 + C}$ (b) $\int \cos x \cdot dx = \boxed{\sin x + C}$ (c) $\int e^x \cdot dx = \boxed{e^x + C}$

IP2. Calcula as integrais indefinidas: (a) $\int (2x + \sin x) \cdot dx$ (b) $\int (3x^2 + 5) \cdot dx$ (c) $\int \sec^2 x \cdot dx$

11.2. Integrais inmediatas

Como a integración é operación recíproca da derivación, ao dispor da táboa de derivadas elementais inmediatamente temos unha táboa de integrais inmediatas sen máis que ler ao revés as fórmulas da primeira.

Nalgúns casos, as presentacións das fórmulas non son exactamente as mesmas que as correspondentes da táboa de derivadas, senón outras equivalentes por seren mais axeitadas. Ademais, non hai tantas fórmulas como na táboa de derivadas elementais, pois só reverteremos aquelas que son fundamentais e non poden ser deducidas doutras (recorda que naquela táboa había información redundante).

De seguido encóntrase a devandita táboa que debes aprender e manexar con soltura. Se tes dúbidas en canto a validez dalgunha das fórmulas, podes derivar a función solución e comprobar que o resultado coincide coa función integrando.

TÁBOA DE INTEGRAIS INMEDIATAS	
Tipo	Fórmula
Potencial	$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
Neperiano	$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + C$
Exponencial	$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
Seno	$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$
Coseno	$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$
Tanxente	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \int \sec^2 x \cdot dx = \operatorname{tg} x + C$
Cotanxente	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \cdot dx = -\cot x + C$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C$
Arco tanxente	$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \arctan x + C$

Exemplos: (a) $\int dx = \int 1 \cdot dx = \int x^0 \cdot dx = \frac{x^1}{1} + C = \boxed{x + C}$ (b) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \boxed{-\arcsin x + C}$
 (c) $\int 5^x \cdot dx = \boxed{\frac{5^x}{\ln 5} + C}$ (d) $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} \cdot dx = \int \frac{1}{x^{1+\frac{1}{2}}} \cdot dx = \int x^{-\frac{3}{2}} \cdot dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \boxed{\frac{-2}{\sqrt{x}} + C}$

IP3. Calcula as integrais inmediatas: (a) $\int x \cdot dx$ (b) $\int \frac{1}{x^3} \cdot dx$ (c) $\int 2^x \cdot dx$

11.3. Métodos de integración

As integrais inmediatas, por si soas, non son de moita utilidade, pois só serven para resolver un número moi limitado de integrais. Para ampliar as nosas posibilidades, necesitamos os métodos de integración.

Así como as fórmulas das derivadas das funcións elementais deron lugar as fórmulas das integrais inmediatas, as regras de derivación (derivadas das operacións con funcións) dan lugar ós métodos de integración, aínda que a reciprocidade non é tan clara como naquelas.

Descomposición

Como o seu nome indica, consiste en descompoñer a integral en integrais máis sinxelas, baseándose nas propiedades de linearidade da integral. Estas son dúas: A primeira é consecuencia das regras da derivada dunha suma de funcións; e a segunda, da regra da derivada do produto dun escalar por unha función.

Propiedades (de linearidade da integral):

(a) $\int [f(x) \pm g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx \leftarrow$ A integral dunha suma ou resta é igual á suma ou resta das integrais

(b) $\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int f(x) \cdot dx \leftarrow$ Os factores constantes poden saír fóra das integrais

Exemplos: (a) $\int (1 - 6x + \cos x) \cdot dx = \int 1 \cdot dx - 6 \cdot \int x \cdot dx + \int \cos x \cdot dx = \boxed{x - 3x^2 + \sin x + C}$

(b) $\int \operatorname{tg}^2 x \cdot dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x - 1) \cdot dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot dx - \int 1 \cdot dx = \boxed{\operatorname{tg} x - x + C}$

Notas: (1) Sendo extremadamente rigorosos, no primeiro exemplo deberíamos escribir isto:

$$\int (1 - 6x + \cos x) \cdot dx = \int 1 \cdot dx - 6 \cdot \int x \cdot dx + \int \cos x \cdot dx = x + C_1 - 6 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + \sin x + C_3 = x - 3x^2 + \sin x + (C_1 - 6 \cdot C_2 + C_3)$$

Pero $C_1 - 6 \cdot C_2 + C_3$ é de novo unha constante á que chamamos C , polo que é costume colocala como un sumando xeral á parte. O mesmo sucede no segundo exemplo.

(2) Só se considera aplicado o método de descomposición cando é necesario transformar o integrando para conseguir descompoñelo, como sucede no segundo exemplo. No caso de que os sumandos aparezan directamente, como sucede no primeiro exemplo, só se repara en que foron aplicadas as propiedades de linearidade. De feito, moitos autores nin sequera consideran o método de descomposición como tal.

IP4. Resolve as seguintes integrais aplicando o método de descomposición:

(a) $\int (x^2 + 1)^2 \cdot dx$ (b) $\int \frac{x+5}{x} \cdot dx$ (c) $\int \cos^2 \frac{x}{2} \cdot dx$ (d) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

Cambio de variable (ou substitución)

É unha consecuencia da derivación de funcións compostas (regra da cadea) a cal, lendo ao revés, afirma o seguinte:

$$G'[F(x)] \cdot F'(x) = (G \circ F)'(x).$$

Aplicando integrais os dous membros, temos que:

$$\int G'[F(x)] \cdot F'(x) \cdot dx = \int (G \circ F)'(x) \cdot dx = (G \circ F)(x) + C = G[F(x)] + C$$

Ás veces, seremos capaces de visualizar a integral como “inmediata”, como ocorre nos seguintes exemplos:

Exemplos: (a) $\int \cos x^5 \cdot 5x^4 \cdot dx = \boxed{\sin x^5 + C}$

(b) $\int \frac{3}{1+9x^2} \cdot dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 \cdot dx = \boxed{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x + C}$

IP5. Resolve directamente as integrais: (a) $\int (5x^4 - 1)^{25} \cdot 20x^3 \cdot dx$ (b) $\int 3^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx$

Outras veces non é tan doado e faise necesario o método de cambio de variable. Basicamente, consiste en substituír a variable x por outra variable t de forma que resulte unha integral inmediata ou en todo caso, máis sinxela (o segredo está en elixir como t unha parte do integrando cuxa derivada apareza multiplicando).

Consta de tres pasos:

- (1) Realízase o cambio de variable elixindo $t = F(x)$. Daquela, $dt = F'(x) \cdot dx$ (olla o Anexo I).
- (2) Calcúlase a integral da nova función de variable t .
- (3) Desfáise o cambio, substituíndo a variable t por $F(x)$.

É dicir: $\int G'[F(x)] \cdot F'(x) \cdot dx \stackrel{(1)}{=} \int G'(t) \cdot dt \stackrel{(2)}{=} G(t) + C \stackrel{(3)}{=} G[F(x)] + C$

Exemplos: (1) $\int \frac{\ln^3 x}{x} \cdot dx = \int (\ln x)^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \stackrel{(1)}{=} \int \underset{\substack{t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x} \cdot dx}}{t^3} \cdot dt \stackrel{(2)}{=} \frac{t^4}{4} + C \stackrel{(3)}{=} \boxed{\frac{1}{4} \cdot \ln^4 x + C}$

Frecuentemente dispoñemos da case-derivada de t (a derivada salvo o produto por unha constante) e será preciso aplicar a propiedade (b) da linearidade para conseguir exactamente a derivada, facendo un axuste de constantes.

Exemplo: $\int \frac{3 \cdot e^{2x}}{1+e^{2x}} \cdot dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot dx \stackrel{\substack{t=1+e^{2x} \\ dt=2 \cdot e^{2x} \cdot dx}}{=} \frac{3}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{3}{2} \cdot \ln|t| + C = \boxed{\frac{3}{2} \cdot \ln(1 + e^{2x}) + C}$

En ocasións, non se identifica o cambio a realizar, tendo que facelo “a cegas”, probando distintas eleccións de t , ata que deamos coa adecuada. Non obstante, tamén é posible que o cambio nos veña suxerido no enunciado, como en **IP6** (d).

Exemplos: (a) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot dx \stackrel{\substack{t=e^x \\ dt=e^x \cdot dx}}{=} \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{1+t^2} \cdot dt = \arctan t + C = \boxed{\arctan e^x + C}$

(b) $\int \sqrt{1-x^2} \cdot dx \stackrel{\substack{x=\sin t \\ dx=\cos t \cdot dt}}{=} \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \cdot dt = \int \cos^2 t \cdot dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} \cdot dt =$

$\frac{1}{2} \cdot (\int dt + \int \cos 2t \cdot dt) = \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{2} \cdot \int 2 \cdot \cos 2t \cdot dt \right) = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{4} \cdot \sin 2t + C =$

$\frac{1}{2} \cdot \arcsin x + \frac{1}{4} \cdot \sin(2 \cdot \arcsin x) + C = \frac{1}{2} \cdot \arcsin x + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x) + C =$

$\boxed{\frac{1}{2} \cdot (\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}) + C}$

IP6. Aplicando o método de substitución, resolve as seguintes integrais:

(a) $\int 3x \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot dx$ (b) $\int \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$ (c) $\int \frac{x}{\sin^2 x^2} \cdot dx$ (d) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$ (*Fai o cambio $x = \frac{1}{t}$*)

Partes

É consecuencia directa da regra da derivada dun produto. Se aplicamos esta regra a dúas funcións $u(x)$ e $v(x)$, entón:

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Integrando os dous membros da anterior igualdade, temos que:

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) \cdot dx + \int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx$$

Usando que $df(x) = f'(x) \cdot dx$ e facendo unha transposición de termos, obtemos a fórmula de integración por partes:

$$\int u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot du(x)$$

É costume escribila de xeito máis abreviado sen poñer a variable x :

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Esta fórmula permite integrar unha función pola derivada doutra, pero só será útil cando a segunda integral sexa inmediata ou, en todo caso, máis sinxela que a primeira. Precisamente, o secreto está en elixir adecuadamente as partes u e dv de xeito que iso ocorra (no Anexo II téns unha táboa onde se relacionan os prototipos máis frecuentes de integrais que se resolven por partes, así como a elección das mesmas).

Exemplos: (a) $\int x \cdot \sin x \cdot dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot dx = \boxed{\sin x - x \cdot \cos x + C}$

$$\left\langle \begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin x \cdot dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int \sin x \cdot dx = -\cos x \end{array}$$

(b) $\int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C = \boxed{x \cdot (-1 + \ln x) + C}$

$$\left\langle \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ v = x \end{array}$$

IP7. Resolve polo método de partes: (a) $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx$ (b) $\int \arctan x \cdot dx$ (c) $\int e^x \cdot \cos x \cdot dx$

Descomposición en fracciones simples

Este método utilízase para resolver integrais de funcións racionais (cociente de dous polinomios), pero antes de comezar coa súa laboriosa aplicación, debes realizar dúas dilixencias previas:

1ª. Se a función racional é impropia (grao do numerador maior ou igual co do denominador) debes realizar a **división polinómica**, obtendo $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ e polo tanto, $\int \frac{p(x)}{q(x)} \cdot dx = \int c(x) \cdot dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} \cdot dx$.

Como ves, a integral orixinal quedaría reducida á integral do polinomio cociente $c(x)$, que é inmediata, sumada á integral da función racional $\frac{r(x)}{q(x)}$ que é propia, pois nunha división o grao do resto é menor co do divisor.

$$\begin{aligned} \text{Exemplo: } \int \frac{x^4+x^3-6x-3}{x^3-3x-2} \cdot dx &= \int (x+1) \cdot dx + \int \frac{3x^2-x-1}{x^3-3x-2} \cdot dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{3x^2-x-1}{x^3-3x-2} \cdot dx \end{aligned}$$

2ª. Comprobar se é posible resolver a nova integral (propia) aplicando algunha das tres **fórmulas inmediatas** que resoven certos casos de integrais racionais (**potencial**, **neperiano** ou **arco tanxente**), de forma directa ou realizando un cambio de variable, como vemos nos seguintes exemplos:

Exemplos: (a) $\int \frac{3x \cdot dx}{(9+4x^2)^4} = \frac{3}{8} \cdot \int \frac{8x}{(9+4x^2)^4} \cdot dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{(9+4x^2)^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{-1}{8 \cdot (9+4x^2)^3} + C$

(b) $\int \frac{3x \cdot dx}{9+4x^2} = \frac{3}{8} \cdot \int \frac{8x}{9+4x^2} \cdot dx = \left[\frac{3}{8} \cdot \ln(9+4x^2) + C \right]$

(c) $\int \frac{3 \cdot dx}{9+4x^2} = \frac{3}{9} \cdot \int \frac{1}{1+\frac{4x^2}{9}} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \int \frac{\frac{2}{3}}{1+(\frac{2x}{3})^2} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \arctan \frac{2x}{3} + C \right]$

En caso contrario non queda máis remedio que utilizar este método, que consiste en descompoñer adecuadamente a integral en sumas de integrais racionais máis sinxelas, que precisamente, serán de tipo potencial, neperiano ou arco tangente (este curso non aparecerá este último tipo). Vexamos como se procede:

(i) Descomponse o polinomio do denominador en produto de factores irreducibles

Como ben sabes, estes factores poden ser lineais (de primeiro grao) ou cuadráticos (de segundo grao) e o mesmo tempo poden ser simples (só aparecen unha vez) ou múltiples (máis dunha vez).

Exemplos: (a) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$ (dous factores lineais simples)
 (b) $3x^3 - 9x - 6 = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)^2$ (un factor lineal simple e outro dobre)
 (c) $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$ (un factor lineal simple e outro cuadrático simple)
 (d) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$ (un factor cuadrático dobre).

(ii) Descomponse a función racional en suma de fraccións simples

Por cada factor lineal simple $(x - \alpha)$ escríbese a fracción simple: $\frac{A}{x - \alpha}$

Por cada factor lineal múltiple $(x - \alpha)^n$ escríbese a suma de n fraccións simples: $\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$

Xa veremos no exemplo xeral que estamos a resolver, como se calculan os coeficientes dos numeradores.

Nota: Neste curso, resolveremos aqueles casos nos que aparezan unicamente factores lineais simples e múltiples (raíces reais), deixando para cursos universitarios aqueloutros nos que exista tamén algún factor cuadrático simple ou múltiple (raíces complexas).

(iii) Intégranse por separado cada unha das fraccións simples

A integral dunha fracción simple da forma $\frac{A}{x-\alpha}$ é sempre de tipo **neperiano**.

E a integral dunha fracción simple da forma $\frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$ é sempre de tipo **potencial**.

Exemplos: (a) $\int \frac{5}{(x-2)^2} \cdot dx = 5 \cdot \int (x-2)^{-2} \cdot dx = 5 \cdot \frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1} + C = \boxed{\frac{-5}{x-2} + C}$

(b) $\int \frac{3}{x-2} \cdot dx = 3 \cdot \int \frac{1}{x-2} \cdot dx = \boxed{3 \cdot \ln|x-2| + C}$

Exemplo: Continuemos coa integral anterior: $\int \frac{3x^2-x-1}{x^3-3x-2} \cdot dx$

(i) Con Ruffini, obtés un factor lineal simple e outro dobre: $x^3 - 3x - 2 = (x - 2) \cdot (x + 1)^2$

(ii) Descompós en fraccións simples: $\frac{3x^2-x-1}{x^3-3x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

Para achar os coeficientes A , B e C , sumas as fraccións simples:

$$\frac{3x^2-x-1}{x^3-3x-2} = \frac{A \cdot (x+1)^2}{(x-2) \cdot (x+1)^2} + \frac{B \cdot (x-2) \cdot (x+1)}{(x-2) \cdot (x+1)^2} + \frac{C \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x+1)^2} = \frac{A \cdot (x+1)^2 + B \cdot (x-2) \cdot (x+1) + C \cdot (x-2)}{x^3-3x-2}$$

Igualas os numeradores e obtés: $3x^2 - x - 1 = A \cdot (x + 1)^2 + B \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) + C \cdot (x - 2)$

Substituíndo valores “intelixentes”, determinas os coeficientes A , B e C :

$$x = 2 \rightarrow 3 \cdot 2^2 - 2 - 1 = A \cdot (2 + 1)^2 + B \cdot (2 - 2) \cdot (2 + 1) + C \cdot (2 - 2) \Rightarrow 9 = 9A \Rightarrow A = 1$$

$$x = -1 \rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 1 - 1 = A \cdot 0^2 + B \cdot (-3) \cdot 0 + C \cdot (-3) \Rightarrow 3 = -3C \Rightarrow C = -1$$

$$x = 0 \rightarrow 3 \cdot 0^2 - 0 - 1 = A \cdot 1^2 + B \cdot (-2) \cdot 1 + C(0 - 2) \Rightarrow -1 = A - 2B - 2C \Rightarrow -1 = A - 2B - 2C \Rightarrow B = 2$$

Daquela, a descomposición en fraccións simples queda así: $\frac{3x^2-x-1}{x^3-3x-2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}$

(iii) Integras as fraccións simples:

$$\int \frac{3x^2-x-1}{x^3-3x-2} \cdot dx = \int \frac{1}{x-2} \cdot dx + \int \frac{2}{x+1} \cdot dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2} \cdot dx = \ln|x-2| + 2 \cdot \ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$$

Finalmente, a integral orixinal quedaría así:

$$\int \frac{x^4+x^3-6x-3}{x^3-3x-2} \cdot dx = \boxed{\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-2| + 2 \cdot \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C}$$

PS. Resolve as seguintes integrais racionais:

(a) $\int \frac{3}{2x+1} \cdot dx$

(b) $\int \frac{5}{(x+1)^3} \cdot dx$

(c) $\int \frac{-7}{4x^2+1} \cdot dx$

(d) $\int \frac{dx}{9+x^2}$

(e) $\int \frac{3x^3+5x}{x^2+1} \cdot dx$

(f) $\int \frac{x^2-x}{2x^2-8x+8} \cdot dx$

(g) $\int \frac{x^2+18x-51}{6 \cdot (3+x)^2 \cdot (x-5)} \cdot dx$

(h) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3 \cdot e^x+2} \cdot dx$

11.4. Integrais trigonométricas

En xeral, para a resolución de integrais trigonométricas aplícanse os métodos anteriores (en especial, descomposición e substitución). No entanto, frecuentemente son necesarios cambios de variable de certa complexidade que aquí non imos tratar. As que si aparecen con relativa frecuencia e estamos en condicións de resolver son as do tipo:

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \cdot dx, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Para resolvelas necesitamos recordar tres importantes fórmulas trigonométricas aprendidas o curso pasado:

♦ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (fórmula fundamental)

♦ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ e $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ (fórmulas do ángulo metade)

Vexamos como proceder nestes casos:

- Se algún dos expoñentes é a unidade, a integral é case-inmediata (tipo potencial).

Exemplo: $\int \sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx = \boxed{\frac{1}{4} \cdot \sin^4 x + C}$

- Se algún dos expoñentes é cero e o outro é impar, aplícase a **fórmula fundamental** (despois de separar un factor para que o expoñente quede par) para descompoñela en integrais case-inmediatas do tipo anterior.

Exemplo: $\int \sin^3 x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \cdot dx = \int \sin x \cdot dx - \int \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx =$

$$-\cos x + \frac{1}{3} \cdot \cos^3 x + C$$

- Se algún dos expoñentes é cero e o outro é par, aplícase algunha das **fórmulas do ángulo metade** para descompoñela en integrais inmediatas ou case-inmediatas.

Exemplo: $\int \cos^2 x \cdot dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot (\int dx + \int \cos 2x \cdot dx) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x\right) + C$

- En calquera outro caso ($n, m \geq 2$) aplícase a **fórmula fundamental** para descompoñela en integrais dos tipos anteriores ou inmediatas.

Exemplo: $\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx = \int \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx - 2 \cdot \int \cos^4 x \cdot \sin x \cdot dx + \int \cos^6 x \cdot \sin x \cdot dx =$

$$\frac{-1}{3} \cdot \cos^3 x + \frac{2}{5} \cdot \cos^5 x - \frac{1}{7} \cdot \cos^7 x + C$$

Exemplo: $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int \cos^2 x \cdot dx - \int \cos^4 x \cdot dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot dx - \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot (2x + \sin 2x) - \left(\frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cdot \int \cos^2 2x \cdot dx\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(x - \int \frac{1+\cos 4x}{2} \cdot dx\right) =$

$$\frac{1}{4} \cdot \left[x - \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{4} \cdot \sin 4x\right)\right] + C = \frac{1}{32} \cdot (4x - \sin 4x) + C$$

P9. Acha: (a) $\int \sin x \cdot \cos^3 x \cdot dx$ (b) $\int \cos^3 2x \cdot dx$ (c) $\int \sin^4 x \cdot dx$ (d) $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$

11.5. Que método utilizar?

Para contestar a esta pregunta non hai mellor conselleiro que a experiencia de ter realizado un bo número de exercicios. Ademais, hai moitas integrais que se poden resolver por varios métodos e outras na que se fai necesario aplicar máis dun método. No entanto, nalgúns exercicios vén indicado o método que convén utilizar.

De non ser así, resulta interesante proceder do seguinte xeito:

1. Analizamos se é posible aplicar algunha das **fórmulas inmediatas**, tendo en conta que hai casos nos que é preciso efectuar algunha transformación previa (incluíndo descomposición e axuste de constantes).
2. Se é unha función racional propia que non se resolve con algunha das fórmulas inmediatas (neperiano, potencial ou arco tanxente), aplicamos o método de **descomposición en fraccións simples**. Se fose unha función racional impropia, recorda facer antes a división polinómica.
3. No suposto de non dar coa solución nos apartados anteriores, hai que aplicar o método de **partes** ou ben o de **cambio de variable**. Ante esta disxuntiva, ten presente que:
 - Utilízase o método de partes cando o integrando é un produto de dúas funcións ou ben unha función única que non ten primitiva inmediata (olla o Anexo II).
 - Faise un cambio de variable cando detectamos no integrando un anaco t , cuxa derivada aparece multiplicando.

Anexo I: DIFERENCIAL DUNHA FUNCIÓN

➤ Definición

Sexa $y = f(x)$ unha función derivable. Chámase diferencial de $y = f(x)$ correspondente a un incremento h da variable independente, ao produto $f'(x) \cdot h$.

Represéntase por dy ou ben por $df(x)$. É dicir: $df(x) = f'(x) \cdot h$

Pero, como a diferencial da función identidade $y = x$ é $dy = dx = 1 \cdot h = h$, entón: $df(x) = f'(x) \cdot dx$

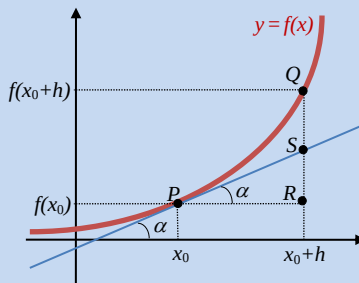
➤ Interpretación xeométrica

Observa na figura adxunta que $f'(x_0) = \tan \alpha = \frac{\overline{RS}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{RS}}{h}$

Polo tanto $f'(x_0) \cdot h = \overline{RS}$; é dicir: $df(x_0) = RS$

Xa que logo, podemos afirmar que:

A diferencial dunha función nun punto, representa o incremento da ordenada da recta tanxente, correspondente a un incremento h da variable independente.



Anexo II: PROTOTIPOS DAS INTEGRAIS MÁIS FRECUENTES QUE SE RESOLVEN POLO MÉTODO DE PARTES E ELECCIÓN DAS MESMAS

$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \rightarrow$ “Sentado, un día vin un vello Soldado vestido de uniforme”

PROTOTIPO	EXEMPLO	ELECCIÓN DE PARTES	
$\int x^n \cdot \sin x \cdot dx$	$\int x^2 \cdot \sin(2x - 1) \cdot dx$	$u = x^2$	$dv = \sin(2x - 1) \cdot dx$
$\int x^n \cdot \cos x \cdot dx$	$\int x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot dx$	$u = x$	$dv = \cos \frac{x}{2} \cdot dx$
$\int x^n \cdot a^x \cdot dx$	$\int (x + 1) \cdot e^x \cdot dx$	$u = x + 1$	$dv = e^x \cdot dx$
$\int x^n \cdot \log_a x \cdot dx$	$\int x \cdot \ln(x + 3) \cdot dx$	$u = \ln(x + 3)$	$dv = x \cdot dx$
$\int \log_a x \cdot dx$	$\int \log_2 3x \cdot dx$	$u = \log_2 3x$	$dv = dx$
$\int \arcsen x \cdot dx$	$\int \arcsen 2x \cdot dx$	$u = \arcsen 2x$	$dv = dx$
$\int \arctg x \cdot dx$	$\int \sqrt{7} \cdot \arctg x \cdot dx$	$u = \arctg x$	$dv = dx$
$\int a^x \cdot \sin x \cdot dx$	$\int 2^{2x+1} \cdot \sin x \cdot dx$	Indistintamente	Indistintamente
$\int a^x \cdot \cos x \cdot dx$	$\int e^x \cdot \cos x \cdot dx$	Indistintamente	Indistintamente
Prioridade para a elección de u : ALPES		1. Arcos 4. Exponenciais	2. Logarítmicas 3. Potenciais 5. Senos y cosenos

CUESTIÓNS, EXERCICIOS E PROBLEMAS

- Existe algunha diferenza entre primitiva e integral indefinida?
- Verdadeiro ou falso: *A integral dun produto é igual ao produto das integrais.*
- Sen derivar, demostra que $F(x) = \ln x$ e $G(x) = \ln(6x)$ son primitivas dunha mesma función.
- Se unha función ten unha primitiva con dominio en $\mathbb{R}$, entón ¿é posible calcular outra que pase polo punto do plano que se nos antolle?
- Queda determinada unha función coñecendo a súa derivada? E se fose a derivada segunda?
- Demostra, de dúas formas distintas, a seguinte igualdade: $\int 2 \cdot \ln 2x \cdot dx = 2x \cdot (-1 + \ln 2x) + C$.
- Dunha función coñécese a súa derivada $y' = 3e^x + 1$. Calcula a súa ecuación sabendo que pasa pola orixe de coordenadas.
 $y = 3e^x + x - 3$
- Calcula a ecuación da curva que pasa polos puntos $(-1,1)$ e $(1,9)$, sabendo que a súa derivada segunda é $y'' = 72x - 6$.
 $y = 12x^3 - 3x^2 - 8x + 8$
- A recta tanxente á gráfica dunha función $f(x)$ no punto $(0,1)$ é paralela á recta $2x - y + 3 = 0$. Ademais, $f''(x) = 4 \cdot e^{2x} - 2x$. Acha a expresión analítica da función.
 $f(x) = e^{2x} - \frac{1}{3}x^3$
- Acha unha función sabendo que $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ e que pasa polo punto $(1,0)$.
 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
- Calcula unha primitiva de cada unha das seguintes funcións:
 - $f(x) = \frac{x}{x+5}$, que pase pola orixe de coordenadas
 $F(x) = x - \ln|x+5| + \ln 5^5$
 - $g(x) = \cos x \cdot (2 \cdot \sin^3 x + \sin x)$, de tal forma que $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$
 $G(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin^2 x \cdot (1 + \sin^2 x) + 1$
 - $h(x) = x \cdot \sin(2x)$
 $H(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin 2x - \frac{1}{2}x \cdot \cos 2x$
 - $l(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$
 $L(x) = \ln|x+2| - \frac{1}{x+2}$
- Resolve as seguintes integrais indefinidas:
 - $\int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{5x^3+7}}$ (substitución)
 $\frac{2}{15} \sqrt{5x^3+7} + C$
 - $\int (x-1)^2 \cdot \ln x \cdot dx$ (partes)
 $\frac{x}{3} \cdot (x^2 - 3x + 3) \cdot \ln|x| - \frac{x}{18} \cdot (2x^2 - 9x + 18) + C$
 - $\int \frac{x^3+x}{x^3-x} \cdot dx$ (descomposición en fraccións simples)
 $x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$
- Atopa a solución das integrais seguintes:
 - $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} \cdot dx$
 - $\int \sin^2 3x \cdot dx$
 - $\int \frac{x+3}{2} \cdot e^{(x^2+6x-4)} \cdot dx$
 - $\int \frac{2x+25}{x^2+25} \cdot dx$

(a) $\frac{2}{3} \cdot (1 + \ln x) \cdot \sqrt{1 + \ln x} + C$ (b) $\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{6} \cdot \sin 6x \right) + C$ (c) $\frac{1}{4} \cdot e^{(x^2+6x-4)} + C$ (d) $\ln(x^2 + 25) + 5 \cdot \arctg \frac{x}{5} + C$

14. Aplicando o método de substituição, atopa unha primitiva das seguintes funcións:

$$\begin{aligned} (a) f(x) &= \frac{1+\ln x}{1+2x \cdot \ln x} & (b) g(x) &= \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} & (c) h(x) &= \frac{-2^x}{\sqrt{1-4^x}} \\ (a) F(x) &= \frac{1}{2} \cdot \ln|1+2x \cdot \ln x| & (b) G(x) &= \frac{3}{320} \cdot (20x^2 - 12x + 9) \cdot \sqrt[3]{(1+2x)^2} & (c) H(x) &= \frac{-1}{\ln 2} \cdot \arcsen 2^x \end{aligned}$$

15. Resolve as seguintes integrais polo método que creas máis conveniente:

$$\begin{aligned} (a) \int x \cdot \sqrt{1+x} \cdot dx & \quad (b) \int \cos x \cdot \ln(\sen x) \cdot dx & (c) \int e^{\sqrt{x}} \cdot dx & \quad (d) \int \frac{x^5+x^3+x}{x^4+x^2+1} \cdot dx \\ (a) \frac{2}{15} (3x^2+x-2) \cdot \sqrt{1+x} + C & \quad (b) \sen x \cdot [-1 + \ln(\sen x)] + C & (c) 2e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}-1) + C & \quad (d) \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

16. Realiza as seguintes integrais: $(a) \int \sen(\ln x) \cdot dx$ $(b) \int \frac{2 \cdot dx}{x^3+3x^2+2x}$ $(c) \int (x+1) \cdot 3^x \cdot \ln^2 3 \cdot dx$

$$(a) \frac{1}{2} x \cdot [\sen(\ln x) - \cos(\ln x)] + C \quad (b) \ln \frac{|x^2+2x|}{(x+1)^2} + C \quad (c) 3^x \cdot [(x+1) \cdot \ln 3 - 1] + C$$

17. Calcula as seguintes integrais indefinidas: $(a) \int \cos^3 2x \cdot dx$ $(b) \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{3x+4}} \cdot dx$ $(c) \int \frac{x+1}{3x^3+6x^2} \cdot dx$

$$(a) \frac{1}{2} \cdot \sen 2x \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \sen^2 2x\right) + C \quad (b) \ln \sqrt{\frac{|\sqrt{3x+4}-2|}{\sqrt{3x+4}+2}} + C \quad (c) \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{x} + \ln \sqrt{\frac{x}{x+2}}\right) + C$$

18. Acha unha primitiva de: $(a) \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$ $(b) \sen^2(x+1) \cdot \cos^3(x+1)$ $(c) \frac{1}{3+5x^2}$

$$(a) 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln(1 + \sqrt[6]{x})^6 \quad (b) \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \sen^2(x+1)\right] \cdot \sen^3(x+1) \quad (d) \frac{\sqrt{15}}{15} \cdot \arcsen\left(\frac{\sqrt{15}}{3}x\right)$$

19. Resolve: $(a) \int \frac{\sen x \cdot \cos x}{1+\sen^2 x} \cdot dx$ $(b) \int \sqrt{x} \cdot \ln x \cdot dx$ $(c) \int \frac{2x^4+x^3-2x^2+4x+1}{x^2+x-2} \cdot dx$

$$(a) \ln \sqrt{1+\sen^2 x} + C \quad (b) \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \left(-\frac{2}{3} + \ln x\right) + C \quad (c) \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x + \ln \frac{(x-1)^2}{|x+2|^3} + C$$

20. Acha unha primitiva de cada unha das seguintes funcións:

$$\begin{aligned} (a) f(x) &= \frac{3}{(2x-5)^4} & (b) g(x) &= \frac{1}{1+\sqrt{x}} & (c) h(x) &= \frac{x}{e^{2x}} \\ (d) l(x) &= \operatorname{tg} 2x & (e) m(x) &= \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} & (f) n(x) &= \cos 5x \cdot \sen 3x \\ (a) F(x) &= \frac{1}{2 \cdot (5-2x)^3} & (b) G(x) &= 2 \cdot [\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})] & (c) H(x) &= -\frac{2x+1}{4 \cdot e^{2x}} & (d) L(x) &= -\ln \sqrt{\cos 2x} \\ & & (e) M(x) &= \arcsen(x-1) & (f) N(x) &= \frac{1}{4} \cdot \cos 2x - \frac{1}{16} \cdot \cos 8x \end{aligned}$$

12. INTEGRAL DEFINIDA

12.1. Sumas superiores e inferiores

Defínese unha **partición** P dun intervalo pechado $[a, b]$ como un conxunto de puntos $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tales que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Chámase **norma** (ou diámetro) da partición P a $\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n\}$.

Definición de sumas superiores e inferiores:

Sexa f unha función positiva nun intervalo $[a, b]$ e $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ unha partición do referido intervalo.

Sexan $m_i = \min\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $M_i = \max\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ (a existencia de extremos está garantida no caso de que a función sexa continua en $[a, b]$, polo teorema de Weierstrass).

Chámase **suma inferior** de f asociada a partición P do intervalo $[a, b]$ á seguinte suma:

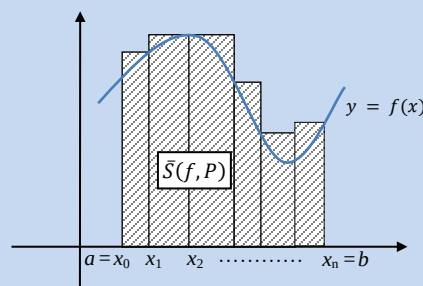
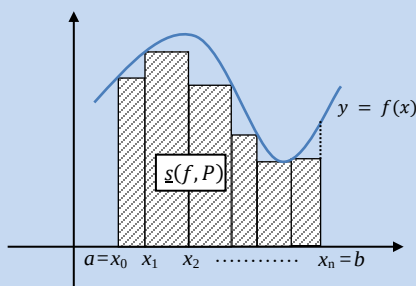
$$\underline{s}(f, P) = m_1 \cdot (x_1 - x_0) + m_2 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + m_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Analogamente, chámase **suma superior** de f asociada a partición P do intervalo $[a, b]$ á suma:

$$\bar{s}(f, P) = M_1 \cdot (x_1 - x_0) + M_2 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + M_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Xeometricamente, as sumas inferior e superior miden a suma das áreas dos rectángulos que teñen por base os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ da partición e por alturas, m_i e M_i , respectivamente.

Ademais, se chamamos $A(R)$ a área do trapezio mixtilíneo determinado pola gráfica da función, o eixe OX e as rectas verticais $x = a$ e $y = b$, sempre se cumpre que $\underline{s}(f, P) \leq A(R) \leq \bar{s}(f, P)$.



12.2. Definición de integral definida nun intervalo pechado. Significado xeométrico

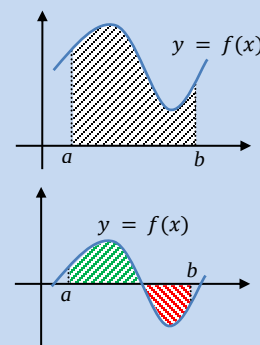
Definición: Consideremos agora unha función calquera f definida nun intervalo pechado $[a, b]$ e $\{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$ unha sucesión de particións do referido intervalo, cuxa norma tende a cero.

Se os límites $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{s}(f, P_n)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}(f, P_n)$ existen e son iguais dise que a función f é **integrable** en $[a, b]$ e o seu valor chámase **integral definida** de f entre a e b . Representase por $\int_a^b f$.

Xa que logo, podemos escribir: $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{s}(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}(f, P_n)$

Significado xeométrico: Se a función é **positiva** en $[a, b]$, a integral definida mide a **área do trapezio mixtilíneo** determinado pola gráfica da función, o eixe OX e as rectas verticais $x = a$ e $x = b$.

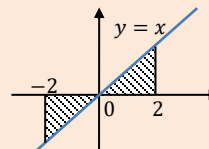
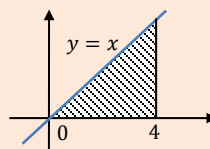
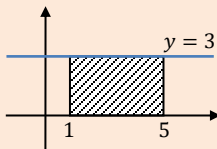
Pola contra, se a función **non é sempre positiva** en $[a, b]$, o valor da integral representa a **diferenza entre as áreas que están enriba e debaixo do eixe OX** , pois nas zonas nas que a función é negativa, as “alturas” dos rectángulos son negativas e, polo tanto, tamén o son as súas áreas.



Exemplos: (a) $\int_1^5 3 \cdot dx = (5 - 1) \cdot 3 = \boxed{12}$

(b) $\int_0^4 x \cdot dx = \frac{4 \cdot 4}{2} = \boxed{8}$

(c) $\int_{-2}^2 x \cdot dx = -\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = \boxed{0}$



Notas: (1) É habitual referirse aos números a e b como límites de integración.

(2) Como se deduce da definición, non sempre existe a integral definida dunha función nun intervalo, pero se se trata dunha función **continua nun intervalo pechado**, está garantida a súa existencia (aínda que hai funcións non continuas que tamén son integrables). Ademais, que exista unha integral non quere dicir que sexamos quen de calculala.

12.3. Propiedades

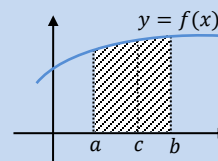
As propiedades que se relacionan a continuación, dedúcense trivialmente da definición da integral definida; ademais todas son moi intuitivas, polo que non as demostraremos agora (no boletín de exercicios faremos algunha). O debuxo adxunto ilustra a última delas.

(a) $\int_a^a f = 0$ (b) $\int_b^a f = -\int_a^b f$ (c) $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

Monotonía: (d) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Linearidade: (e) $\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$ (f) $\int_a^b (k \cdot f) = k \cdot \int_a^b f$

Aditividade en intervalos: (g) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \forall c \in [a, b]$



12.4. Teorema Fundamental do Cálculo Integral. Regra de Barrow

Teorema do Valor Medio do Cálculo Integral

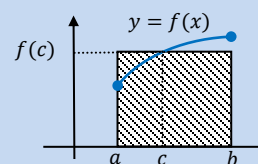
Difícilmente a definición de integral definida permite o seu cálculo, pese a que nos exemplos expostos máis atrás, achamos tres delas facendo uso da súa interpretación xeométrica e de coñecementos básicos de xeometría. O camiño para atopar unha forma mellor de calculalas, comeza co teorema Fundamental do Cálculo Integral (importante teorema que relaciona o cálculo diferencial co integral) e conclúe coa regra de Barrow.

Para demostrar o primeiro deles (TF) necesitamos o denominado Teorema do Valor medio do Cálculo Integral.

Enunciado:

Se f é continua en $[a, b]$, daquela $\exists c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f = (b - a) \cdot f(c)$

Interpretación xeométrica



Nun anaco de curva de trazo continuo e con extremos sempre existe un punto tal que, a área do rectángulo que ten por base o intervalo formado polas abscisas dos extremos e por altura a ordenada do referido punto, é igual a área do trapecio mixtilíneo limitado pola curva, o eixe de abscisas e as rectas $x = a$ e $x = b$.

Demostración:

Ao ser f continua, podemos aplicar o teorema de Weierstrass, polo que se alcanza o mínimo e máximo absolutos no intervalo: $\exists x_0, x_1 \in [a, b] : f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \forall x \in [a, b]$.

Aplicando a propiedade (d) da monotonía: $\int_a^b f(x_0) \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b f(x_1)$.

Por ser $f(x_0)$ e $f(x_1)$ funcións constantes: $f(x_0) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \leq f(x_1) \cdot (b - a)$.

Entón $f(x_0) \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \leq f(x_1)$ e temos un valor intermedio entre o mínimo e o máximo, polo que sabemos que debe ser alcanzado pola función (consecuencia do teorema de Wierstrass: *Unha función continua nun intervalo pechado $[a, b]$ alcanza calquera valor intermedio entre o mínimo e o máximo*). Daquela, $\exists c \in [a, b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)$. É dicir: $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f = (b - a) \cdot f(c)$.

Nota: Existe o típico exercicio no que se pide verificar as hipóteses do teorema nun determinado intervalo e, en caso afirmativo, achar o valor medio cuxa existencia garante a súa tese. Realizaremos algúns deles no boletín práctico, cando xa saibamos calcular integrais definidas.

Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Recorda que, despois da derivada dunha función nun punto, definimos a función derivada. Ben, pois agora, despois de definir a integral definida dunha función entre a e b , definimos a **función integral** de f como:

$$F(x) = \int_a^x f, \forall x \in [a, b].$$

Tamén é coñecida como **función área** asociada a f , pois a cada $x \in [a, b]$ faille corresponder a área da devandita función entre a e x (supoñendo que f sexa unha función positiva).

Exemplos: (a) Calculemos $F(x)$, a función integral de $f(x) = 2$, no intervalo $[0, 5]$.

Ao tratarse dun rectángulo, $F(x) = \int_0^x 2 \cdot dt = \boxed{2x}$. Por exemplo, $F(4) = 8 u^2$

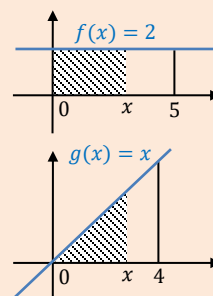
Observa que $F'(x) = 2 = f(x)$. Será casualidade?

(b) Achemos agora $G(x)$, a función integral de $g(x) = x$, no intervalo $[0, 4]$.

No debuxo adxunto, vemos que se trata dun triángulo rectángulo. Daquela:

$$G(x) = \int_0^x t \cdot dt = \frac{x \cdot x}{2} = \boxed{\frac{1}{2}x^2}. \text{ Por exemplo, } G(3) = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4,5 u^2$$

Observa que $G'(x) = x = g(x)$. Será casualidade?



Enunciado:	Interpretación xeométrica:
Se f é continua en $[a, b]$, entón a función área, $F(x) = \int_a^x f, \forall x \in [a, b]$, é derivable en (a, b) , sendo $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$	A área debaixo dunha curva é unha primitiva da propia curva.
Demostración: $F'(x) \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \stackrel{(2)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f - \int_a^x f}{h} \stackrel{(3)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f}{h} \stackrel{(4)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f}{h} \stackrel{(5)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot f(c)}{h} \stackrel{(6)(7)}{=} \lim_{c \rightarrow x} f(c) \stackrel{(8)}{=} f(x)$ Xustificación dos pasos: (1) Definición de función derivada (2) Definición de función integral (3) Propiedade (b) da integral definida: $\int_b^a f = -\int_a^b f$ (4) Propiedade (g) da integral definida: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \forall c \in [a, b]$ (5) Como f é continua en $[a, b]$, podemos aplicarlle o teorema do Valor Medio no intervalo $[x, x+h]$. Daquela, $\exists c \in [x, x+h] : \int_x^{x+h} f = h \cdot f(c)$ (6) Podemos eliminar h pois, ao tender a cero, temos garantido que é distinto de cero (7) Como $c \in [x, x+h]$, ao facer $h \rightarrow 0$ resulta que $c \rightarrow x$ (8) Por ser f unha función continua no intervalo $[a, b]$ entón é continua en x.	

Exemplos: (a) Se $F(x) = \int_5^x \cos t \cdot dt$, entón $F'(x) = f(x) = \cos x$.

(b) Achemos $F'(2)$ sendo $F(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) \cdot dt$.

O teorema Fundamental afirma que: $F'(x) = f(x) = \ln(1+x^2)$. Daquela, $F'(2) = \boxed{\ln 5}$

P1. Demostra que π é un punto singular da función $F(x) = \int_0^x t \cdot \sin t \cdot dt$.

P2. Sabendo que $\int_0^x f = x^2 - \cos x$, calcula $f(\pi)$.

Regra de Barrow (2º Teorema Fundamental do Cálculo Integral)

Co teorema anterior comprobamos que a función integral, $F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt, \forall x \in [a, b]$, é unha primitiva de f . Daquela, $\int_a^b f = F(b)$, no é máis que un valor concreto da función $F(x)$.

Como ben sabes, existen infinitas primitivas dunha mesma función (tantas como os infinitos valores reais que pode tomar a constante de integración), polo que debemos saber cal delas será a que nos interesa.

Chamando $G(x)$ a unha primitiva calquera, a dúbida reside na constante que debemos elixir para atopar a primitiva $G(x) + C$ que queremos. O seguinte resultado (regra de Barrow) dinos cal é o valor desa constante.

Enunciado:

Sexa f unha función continua en $[a, b]$ e G unha primitiva de f . Cúmrese que: $\int_a^b f = G(b) - G(a)$

Demostración:

Segundo afirma o T.F. $F(x) = \int_a^x f$ é unha primitiva de f . Ao ser G outra, entón $F(x) = G(x) + C$.

Daquela, $\int_a^b f = F(b) = G(b) + C$. Achemos o valor de C :

$$\text{Como } \begin{cases} F(a) = G(a) + C \\ F(a) = \int_a^a f = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = G(a) + C \Rightarrow C = -G(a) \Rightarrow \int_a^b f = G(b) - G(a)$$

Notas: (1) É habitual notar $G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b$. Entón podemos escribir $\int_a^b f = G(x) \Big|_a^b$.
(2) Como vale calquera primitiva G , sóese utilizar a máis sinxela ($C = 0$).

Exemplos: (a) $\int_0^4 \sqrt{x} \cdot dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} \sqrt{4^3} - \frac{2}{3} \sqrt{0^3} = \frac{16}{3}$
(b) $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$
(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$
(d) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \arctg x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \arctg \sqrt{3} - \arctg 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

P3. Calcula a integral definida do apartado (a) do exemplo anterior, usando unha primitiva distinta.

P4. Calcula o valor das seguintes integrais definidas: (a) $\int_{-2}^2 2x^2 \cdot dx$ (b) $\int_{-\pi/4}^0 3 \cdot \cos 2x \cdot dx$
(c) $\int_1^3 (x-2) \cdot e^x \cdot dx$ (d) $\int_1^e \frac{1}{2x} \cdot dx$ (e) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$ (f) $\int_{-1}^0 \arcsen x \cdot dx$

Nota: Se $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f$, aplicando a regra de Barrow temos que $F(x) = G[b(x)] - G[a(x)]$, sendo G unha primitiva de f . Aplicando a regra da Cadea, $F'(x) = G'[b(x)] \cdot b'(x) - G'[a(x)] \cdot a'(x)$.

Pero, como $G' = f$, podemos xeneralizar o teorema Fundamental do seguinte xeito:

Se $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f$, entón $F'(x) = f[b(x)] \cdot b'(x) - f[a(x)] \cdot a'(x)$

Exemplo: Achemos $F'(2)$ sendo $F(x) = \int_1^{x^2} \ln(1+t^2) \cdot dt$.

O teorema Fundamental afirma que: $F'(x) = f(x^2) \cdot 2x - f(1) \cdot 0 = 2x \cdot \ln(1+x^4)$.

Daquela, $F'(2) = 4 \cdot \ln 17$

12.5. Cálculo de áreas planas limitadas por gráficas de funcións

Poden presentarse situacións moi distintas, pero todas se basean nos dous casos seguintes:

Área da rexión plana comprendida entre as rectas $x = a$, $x = b$, o eixe OX e unha función

Se para achar esta área nos limitamos a calcular a integral definida da función dada entre os límites a e b , estamos expostos a equivocarnos, pois a función pode cambiar de signo entre os referidos límites e a integral definida “compensaría” áreas positivas con áreas negativas, ofrecéndonos un resultado non desexado.

Para evitalo, débese proceder do seguinte xeito:

1. En primeiro lugar, **achamos os posibles cambios de signo da función entre a e b** . A saber: puntos de corte co eixe OX e puntos de descontinuidade (aínda que estes últimos non se soen presentar no intervalo $[a, b]$, pois poderíamos estar diante de integrais denominadas impropias que se saen dos niveis deste curso).
2. Despois **calculamos as integrais definidas parciais** en cada un dos sub-intervalos definidos polos puntos anteriores.
3. Finalmente, **sumamos os resultados obtidos en valor absoluto** (queremos eses mesmos resultados pero sempre positivos, ao seren áreas).

Nota: Aínda que o estritamente necesario é o dito nos parágrafos anteriores, habitualmente a función soe ser de doada representación, polo que faremos a súa gráfica e estudaremos os signos da función e non só os posibles puntos de cambio de signo (puntos de corte co eixe OX). Deste xeito, aportamos claridade á resolución, vendo o que facemos en cada momento e sabendo que signo van ter as integrais parciais, antes de achalas.

Exemplo: Fagamos o estritamente necesario para calcular a superficie da rexión R comprendida entre as rectas $x = 0$, $x = 2$, o eixe OX e a curva $f(x) = x^2 - 1$.

Achamos os posibles cambios de signo entre 0 e 2: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cortes co eixe } OX \rightarrow 0 = x^2 - 1; x = \pm 1 \\ \text{Puntos de descontinuidade} \rightarrow \text{Non hai (será sempre así)} \end{array} \right.$

Como só temos un posible cambio de signo no intervalo que nos atinxe, basta con dúas integrais parciais (en valor absoluto): $A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \left| \int_0^1 (x^2 - 1) \cdot dx \right| + \left| \int_1^2 (x^2 - 1) \cdot dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 \right| +$

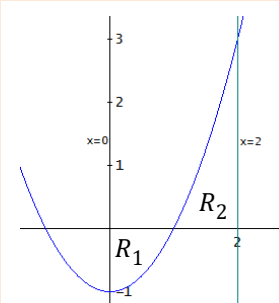
$$\left| \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 \right| = \left| \frac{1^3}{3} - 1 - \left(\frac{0^3}{3} - 0 \right) \right| + \left| \frac{2^3}{3} - 2 - \left(\frac{1^3}{3} - 1 \right) \right| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{2u^2}$$

No entanto, o recomendable é estudar os signos das función e incluso, se é doado, representar graficamente a rexión: $-\infty \xleftrightarrow{+} -1 \xleftrightarrow{-} 1 \xleftrightarrow{+} \infty$

Así, seremos conscientes dos signos das integrais parciais, podendo escribilos diante delas, en lugar do valor absoluto.

Ademais, se queremos evitar os signos negativos, podemos intercambiar os límites de integración facendo uso da propiedade (b):

$$\begin{aligned} A(R) &= A(R_1) + A(R_2) = -\int_0^1 (x^2 - 1) \cdot dx + \int_1^2 (x^2 - 1) \cdot dx \stackrel{\text{prop.(b)}}{=} \\ &= \int_1^0 (x^2 - 1) \cdot dx + \int_1^2 (x^2 - 1) \cdot dx = \boxed{2u^2} \end{aligned}$$

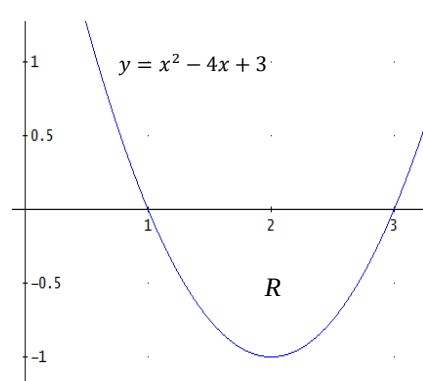


Exemplo: Achamos a área da rexión comprendida entre a parábola de ecuación $y = x^2 - 4x + 3$ e o eixe OX .

Estudamos os signos: $-\infty \xleftrightarrow{+} 1 \xleftrightarrow{-} 3 \xleftrightarrow{+} \infty$ e facemos a representación gráfica da función, porque é moi fácil.

Neste caso, ao non haber límites de integración, asumirán o papel de “ a ” e “ b ” o primeiro e último puntos de corte co eixe OX :

$$\begin{aligned} A(R) &= -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) \cdot dx \stackrel{\text{p.(b)}}{=} \int_3^1 (x^2 - 4x + 3) \cdot dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_3^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 - (9 - 18 + 9) = \boxed{\frac{4}{3}u^2} \end{aligned}$$

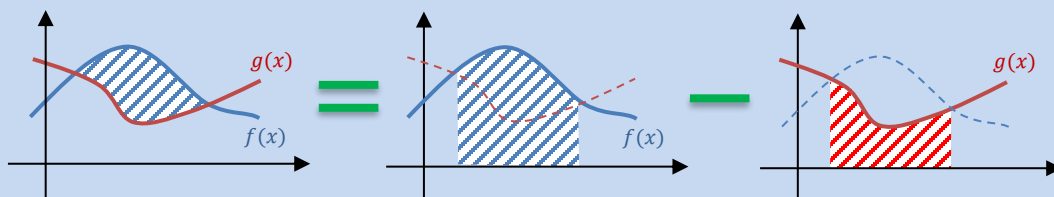


PS. Calcula a área limitada pola función $f(x) = \cos x$, o eixe de abscisas e as rectas $x = 0$ e $x = \pi$.

P6. Calcula a área limitada pola función $f(x) = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$ e a parte positiva do eixe de abscisas.

Área da rexión plana comprendida entre as rectas $x = a$, $x = b$ e dúas funcións

Como podes deducir da ilustración que segue, a área comprendida entre dúas curvas é a resta (en valor absoluto) das áreas que hai entre cada unha delas e o eixe OX .



Entón, basta con considerar a **función diferenza** e actuar como no caso anterior (achar os posibles cambios de signo, que agora son os puntos de intersección das dúas curvas, e sumar as integrais parciais en valor absoluto).

Notas: (1) Entende que se trata dunha xeneralización do caso anterior, pois o eixe OX é a función $g(x)=0$.
 (2) Frecuentemente as funcións soen ser de fácil representación. Nese caso, faremos as súas gráficas (ás veces xa se pide expresamente no enunciado) para aportar claridade á resolución. E aínda que non sexan de fácil representación, sempre é recomendable estudar os signos, evitando así o uso do valor absoluto.

Exemplo: Achamos a área da rexión R , comprendida entre as curvas $y = \frac{x^2}{4}$ e $y = 1 - x$ e as rectas $x = 0$ e $x = 2$.

Traballaremos coa función resta: $y = \frac{x^2}{4} + x - 1$

Signos: $-\infty \xrightarrow{+} -2\sqrt{2} - 2 \xrightarrow{-} 2\sqrt{2} - 2 \xrightarrow{+} \infty$

Só hai un cambio de signo entre 0 e 2, polo que teremos que achar dúas integrais parciais.

Cando os cálculos sexan incómodos, debemos ser máis metódicos, procedendo do seguinte xeito:

1. Calculamos unha primitiva:

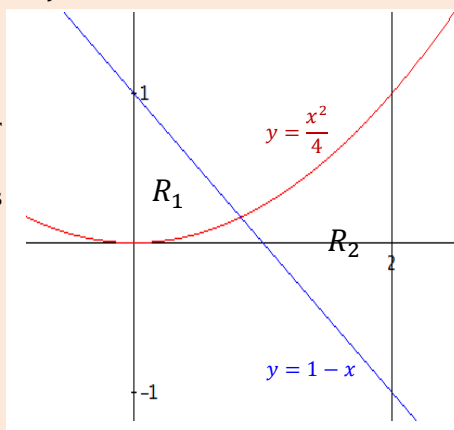
$$G(x) = \int \left(\frac{x^2}{4} + x - 1 \right) \cdot dx = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} - x$$

2. Achamos os valores da primitiva que vamos a necesitar:

$$G(0) = 0; G(2\sqrt{2} - 2) = \frac{2}{3} \cdot (5 - 4\sqrt{2}); G(2) = \frac{2}{3}$$

3. Facendo uso dos valores anteriores e aplicando a regra de Barrow, resolvemos as integrais parciais (é recomendable intercambiar os límites de integración para evitar os signos negativos):

$$\begin{aligned} A(R) &= A(R_1) + A(R_2) = G(x)]_{2\sqrt{2}-2}^0 + G(x)]_{2\sqrt{2}-2}^2 = G(0) - G(2\sqrt{2}-2) + G(2) - G(2\sqrt{2}-2) \\ &= G(0) - 2 \cdot G(2\sqrt{2}-2) + G(2) = 0 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (5 - 4\sqrt{2}) + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot (8\sqrt{2} - 9) \approx \boxed{1,54 u^2} \end{aligned}$$

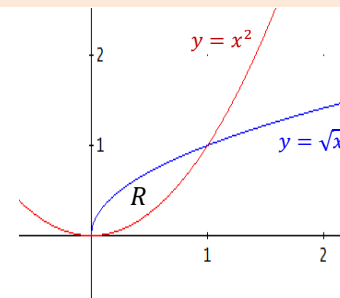


Exemplo: Calculemos agora a superficie da rexión R , comprendida entre as curvas $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$.

Signos de $(f-g)(x) = \sqrt{x} - x^2$: $0 \xrightarrow{+} 1 \xrightarrow{-} \infty$

Xa que logo, temos que calcular só unha integral definida:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \cdot dx = \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3} \cdot 0^{3/2} - \frac{0^3}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3} u^2} \end{aligned}$$



P7. Determina a área encerrada entre a parábola $y = x^2 - 4$ e a recta $y = 3x - 6$.

P8. Calcula a área limitada polas curvas $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = \frac{1}{4x}$ e as rectas $x = \frac{1}{4}$ e $x = 1$.

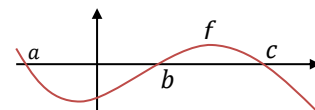
Como verás ao resolver os problemas do boletín final, no suposto de que a rexión estea limitada por **máis de dúas funcións** (o eixe OX tamén conta) terás que graficalas e dividir a rexión en recintos comprendidos por dúas delas.

CUESTIÓNS, EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. É exactamente igual o concepto de *integral definida* que o de *área baixo unha curva*?

2. Se as dúas áreas da figura miden 5 e $2u^2$, di cal será o resultado de:

(a) $\int_a^c f$ (b) $\int_a^c |f|$ (c) $|\int_a^c f|$ (d) $\int_b^a f$ (e) $\int_a^b f + \int_c^b f$



3. Cal será o valor de $\int_{-a}^a f$ sabendo que f é unha función impar?

4. Sendo f unha función non nula e sabendo que $\int_a^b f = 0$, podemos afirmar entón que $a = b$?

5. Se $\int_a^b f = \int_a^c f$, podemos asegurar que $b = c$?

6. Sendo f unha función periódica de período T e sabendo que $\int_0^T f = p$, canto valerá $\int_0^{2T} f$?

7. É certo que $\int_a^b (f \cdot g) = \int_a^b f \cdot \int_a^b g$?

8. Facendo uso da regra de Barrow, demostra a propiedade de aditividade en intervalos: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

9. Baixo que supostos é certa a igualdade $|\int_a^b f| = \int_a^b |f|$?

10. Que relación existe entre integral definida e primitiva?

11. Demostra que o valor da integral $\int_0^1 2^{x^2} \cdot dx$ está comprendido entre 1 e 2.

12. Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do Valor Medio do cálculo integral. É posible aplicarllo á función $f(x) = \sin x$ no intervalo $[0, \pi]$? En caso afirmativo, acha un punto onde se cumpra a súa tese. Si ; $c \cong 0,69$

13. Aplícalle o teorema do Valor Medio do cálculo integral á función $f(x) = 3x^2$ no intervalo $[-4, -1]$ e determina un valor medio cuxa existencia garante. $c = -\sqrt{7}$

14. Teorema Fundamental do cálculo integral. Acha $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+e^t} \cdot dt$. $F(x) = x - \ln \frac{1+e^x}{2}$

15. Acha a ecuación da tanxente á función $F(x) = \int_0^x (1 - \sin^2 t) \cdot dt$ no punto de abscisa 0. $y = x$

16. Determina os puntos de inflexión da función $F(x) = \int_0^x e^{t^2} \cdot dt$. $I(0,0)$

17. Acha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$ sendo $F(x) = \int_0^x \frac{2}{3+e^t} \cdot dt$. $\frac{1}{2}$

18. Sabendo que $\int_x^{x^3} f = x^3 - x^2$, calcula $f(1)$. $\frac{1}{2}$

19. Calcula $\int_{-1}^2 f(x) \cdot dx$ sendo $f(x) = x^2 + |x|$. $\frac{11}{2}$

20. Calcula: (a) $|\int_0^\pi \cos x \cdot dx|$ (b) $\int_0^\pi |\cos x| \cdot dx$ (a) 0 (b) 2

21. Acha: (a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg x \cdot dx$ (b) $\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} \cdot dx$ (c) $\int_{-1}^0 \frac{x}{1+|x|} \cdot dx$ (a) $\ln \sqrt{2}$ (b) $1 - \ln \sqrt{5}$ (c) $-1 + \ln 2$

22. Determina: (a) $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \cdot dx$ (b) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} \cdot dx$ (a) 2π (b) $-1 + \ln 4$

23. Acha a área limitada pola función $f(x) = \frac{4}{x^2+x-2}$, o eixe OX e as rectas $x = 2$ e $x = 3$. $\ln \sqrt[3]{\left(\frac{8}{5}\right)^4} u^2$
24. Acha a área encerrada entre a curva $y = x \cdot \sin x$, o eixe OX e as rectas $x = 0$ e $x = \pi$. πu^2
25. Calcula a área limitada pola función $y = \ln x$, o eixe OX e as rectas $x = \frac{1}{2}$ e $x = e$. $\frac{3-\ln 2}{2} u^2$
26. Determina a área limitada polas funcións $y = \cos x$ e $y = \sin x$ entre 0 e π . $2\sqrt{2} u^2$
27. Acha a área da rexión plana comprendida entre as parábolas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$. $\frac{8}{3} u^2$
28. Canto mide a superficie da figura plana encerrada entre as curvas $y = x^3$ e $y = x^2$? $\frac{1}{12} u^2$
29. Determina a área comprendida entre a curva $y = x^3$ e a bisectriz do primeiro cuadrante. $\frac{1}{2} u^2$
30. Determina a área comprendida entre a función $f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ e a bisectriz do 2º cuadrante. $1 u^2$
31. Acha a área encerrada polos eixes e a recta tanxente á curva $y = x \cdot \sin x$ en $x = \pi$. $\frac{\pi^3}{2} u^2$
32. Calcula a área entre a curva $y = e^x$ e a corda que une os puntos de abscisas $x = -1$ e $x = 1$. $\frac{2}{e} u^2$
33. Debuxa e acha a área do recinto plano limitado pola parábola $y = 4x - x^2$ e as tanxentes á curva nos puntos de intersección co eixe OX . (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos e o vértice e concavidade ou convexidade da parábola). $\frac{16}{3} u^2$
34. Debuxa e calcula a área da rexión limitada polo o eixe OX , a curva $y = (x - 2)^2$ e a súa recta tanxente no punto de abscisa 4. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos e o vértice e concavidade ou convexidade da parábola). $\frac{2}{3} u^2$
35. Calcula a área da rexión R representada no debuxo adxunto. $\frac{35}{6} u^2$
36. Acha a área encerrada polas funcións $y = 2$, $y = 2x$ e $y = x^2$. $\frac{7+4\sqrt{2}}{3} u^2$
37. Mide a superficie limitada pola curva $y = x \cdot e^{-x^2}$, o eixe OX e a recta $x = M$, sendo M a abscisa na que a referida curva alcanza o seu máximo absoluto. $\frac{e-\sqrt{e}}{2e} u^2$
38. Acha a área limitada polo eixe OX e a gráfica da función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x < 1 \\ 3 \cdot (x-2)^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. $5,5 u^2$
39. Acha a área limitada polo eixe OX , a recta $x = 4$ e a curva $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in (0, e) \\ x/e, & x \in [e, \infty) \end{cases}$. $2,58 u^2$
40. A curva $y = 2x^2$ divide en dous recintos ao cadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$. Acha a área de cada un deles. $\frac{\sqrt{2}}{3} e \frac{3-\sqrt{2}}{3} u^2$
41. Determina o valor de $a > 0$ tal que a área da rexión limitada pola curva $y = x^2$ e a recta $y = ax$ é igual a $4,5 u^2$. $a = 3$
42. O trazado dunha estrada ven dado pola función $y = \frac{x^2}{4} - x$, sendo un río o eixe OX . Entre a estrada e o río hai un piñeiral. Se as distancias se miden en km , calcula o valor do piñeiral sabendo que a hectárea do mesmo págase a 300 €.

