

FUNCIONES REAIS DE VARIABLE REAL

Este terceiro bloque temático, Análise Matemática, é significativamente máis extenso cos anteriores.

Vén sendo unha ampliación do que estudastes o curso pasado. Por este motivo, será atendida a xeito de repaso aquela materia que foi tratada en 1º de bacharelato, prestando máis atención a aquela outra que presente novidades.

Debes ser consciente da importancia que ten o estudo das funcións, pois están presentes en todo o que nos rodea. Moitos fenómenos da natureza poden ser expresados mediante funcións que dependen de máis dunha variable: o volume dun paralelepípedo (depende do longo, largo e alto), o espazo percorrido por un móbil (depende da velocidade e do tempo), os latidos dun corazón (dependen da idade, da constitución física...), etc. No entanto, dedicaremos esta unidade ao estudo das funcións que dependen dunha soa variable: a área dun círculo (depende só do radio), o espazo percorrido por un móbil de velocidade constante (depende só do tempo), etc. Así e todo, raras veces trataremos con fenómenos concretos, pois nas matemáticas, abstraémonos e falamos dunha función $y = f(x)$, onde y representa o (anónimo) fenómeno a estudar, en función dunha (tamén anónima) variable independente x .

Por outra banda, hai funcións que traballan no corpo dos números complexos. Pero non te asustes, porque as funcións coas que vamos a tratar nesta unidade, levan os apelidos de “reais de variable real”, o que significa que tanto a variable dependente como a independente toman valores reais.

Nesta primeira unidade do bloque será definida formalmente a **noción de límite**, auténtica porta de entrada na Análise Matemática.

O proceso de “paso o límite” foi utilizado desde a antigüidade (Arquímedes) para resolver problemas que resultaban inalcanzables dende os sinxelos procedementos da *aritmética*, *álgebra* ou *xeometría elemental*. Pero facíase con carácter puntual e de forma intuitiva.

A partir do concepto de límite, durante os séculos XVII e XVIII (Leibnitz, Newton e Euler) desenvolveuse o *cálculo infinitesimal* (así se soe denominar conxuntamente aos cálculos diferencial e integral). Non obstante, non foi ata o século XIX (Bolzano, Cauchy, Riemann e Weierstrass) cando se lle deu o rigor adecuado para libralo das críticas coas que inicialmente foi recibido.

Como vemos na cabeceira, esta primeira parte do terceiro bloque temático consta dunha soa unidade que afianza e amplía o estudado no curso pasado:

8. **Funcións reais de variable real.** Comeza recordando o concepto de función e as funcións elementais. Continúa, como non, coa noción e cálculo de límites de funcións que nos permitirá establecer o concepto de continuidade. Finalmente, expóñense os dous resultados máis importantes sobre continuidade de funcións: teorema de Bolzano e teorema de Weierstrass.

Os obxectivos fundamentais que se perseguen con esta unidade son:

- Coñecer as principais características das funcións elementais.
- Entender a definición e significado gráfico do límite dunha función.
- Calcular límites de funcións (nun punto ou no infinito), resolvendo todo tipo de indeterminacións que se poidan presentar (incluídas as exponenciais) e acudindo aos límites laterais no caso de que sexa preciso.
- Achar as ramas infinitas dunha función.
- Estudar a continuidade dunha función (especialmente nas “definidas en anacos” e incluso dependentes de parámetros), identificando os tipos de discontinuidades que puideran producirse.
- Coñecer os teoremas de Bolzano e Weierstrass xunto coas súas interpretacións xeométricas e utilizar o primeiro para localizar as solucións dunha ecuación.



EULER
Suíza, 1707-1783



BOLZANO
Rep.Checa, 1781-1848



WIERSTRASS
Alemaña, 1815-1897

8. FUNCÍONS REAIS DE VARIABLE REAL

8.1. Conceptos preliminares

Unha **función real de variable real** é unha relación entre dúas variables numéricas reais, habitualmente chamadas X (variable independente) e Y (variable dependente), cumprindo que cada valor real x de X relaciónase, como moito, con un único valor real y de Y .

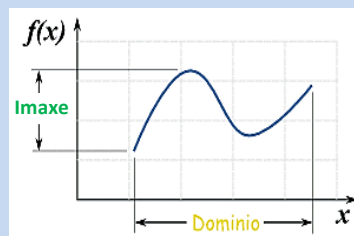
Neste suposto, o valor de y recibe o nome de imaxe do valor de x co que está relacionado. Así mesmo, o valor de x recibe o nome de orixinal ou anti-imaxe do correspondente valor de y .

A maioría das veces, a relación establecida pola función, pode concretarse nunha ecuación, $y = f(x)$, que tamén recibe outros nomes como **expresión analítica** ou fórmula xeral.

O subconxunto de valores reais que toma a variable independente, $D = \{x \in \mathbb{R} : \exists f(x)\}$, denomínase **dominio** de definición ou campo de existencia da función. De forma máis explícita nótase como $\text{Dom}(f)$.

O subconxunto de valores reais que toma a variable dependente, $I = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x \in \mathbb{R}\}$, denomínase **conxunto imaxe**, percorrido ou rango da función. De forma máis explícita nótase como $\text{Im}(f)$.

Para resumir todo isto, sóse escribir: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow y=f(x)$



O conxunto $G = \{(x, f(x)) / x \in D\}$ denomínase **grafo** da función. Cando este conxunto se representa no plano cartesiano, dise que se está a facer a **representación gráfica** da mesma. Este aspecto das funcións será estudado con detemento en futuras unidades.

Para coñecer unha función é necesario identificar a relación que establece e o seu dominio (ao conxunto imaxe non se lle concede tanta importancia). Non obstante, é habitual que só nos dean a súa expresión analítica, porque nos informa da referida relación que se establece e, a partir dela, tamén é posible achar o dominio máximo ou matemático, **DM**, entendendo este como o maior conxunto onde a expresión ten sentido matematicamente.

Outras veces, o dominio tamén ven limitado por “vontade” de quen a propón, ou incluso, polo “contexto real” no que está definida a función, como podemos observar nos seguintes exemplos.

Exemplos: (a) A relación establecida entre cada número real e o seu inverso é unha función real de variable real. A súa expresión analítica é $f(x) = x^{-1}$. O seu dominio son todos os números reais excepto o cero. Resumindo:

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y=x^{-1}$$

Como $f(4) = 0.25$, podemos dicir que 4 é o orixinal de 0.25 ou ben, 0.25 é a imaxe de 4.

(b) A correspondencia entre cada número real maior que 10 e o seu cadrado é unha función real de variable real. A súa expresión analítica é $g(x) = x^2$. O seu dominio é $\text{Dom}(g) = (10, +\infty)$. Podemos escribir:

$$g: (10, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y=x^2$$

Como $g(15) = 225$, podemos dicir que 15 é o orixinal de 225 ou ben, 225 é a imaxe de 15.

(c) A asociación entre a altura h de calquera triángulo de base de 5 unidades e a súa área, é unha función real de variable real. A súa expresión analítica é $A = 2.5 \cdot h$. Aínda que o dominio máximo é $\text{DM}(A) = \mathbb{R}$, o seu dominio é $\text{Dom}(A) = (0, +\infty)$. Isto é:

$$A: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \longrightarrow A=2.5 \cdot h$$

Como $A(4) = 10$, podemos dicir que 4 é o orixinal de 10 ou ben, 10 é a imaxe de 4.

A maioría das veces só coñecemos a expresión analítica abstracta da función (non hai “contexto real” nin “vontade” do autor) polo que, o seu dominio de definición coincide co dominio máximo. Para achalo, debes recordar que:

1. Non se pode **dividir** entre cero.
2. As raíces **de índice par** só existen cando o radicando é **positivo ou cero**.
3. Os **logaritmos** só existen cando o argumento é **estritamente positivo**.

IP1. Acha o dominio das seguintes funcións:

(a) $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x-1}} + \frac{1}{x^2-1}$ (b) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x} \cdot \log(x^2 - 9)$ (c) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x < 7 \end{cases}$ (d) $S(r) = \pi \cdot r^2$

IP2. Observando a gráfica dunha función podemos identificar o seu dominio. Indica o dominio e percorrido de todas as funcións representadas no seguinte apartado.

8.2. Funcións elementais (polinómicas, racionais, irracionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas)

Imos facer unha descrición esquemática das características xerais das familias de funcións elementais:

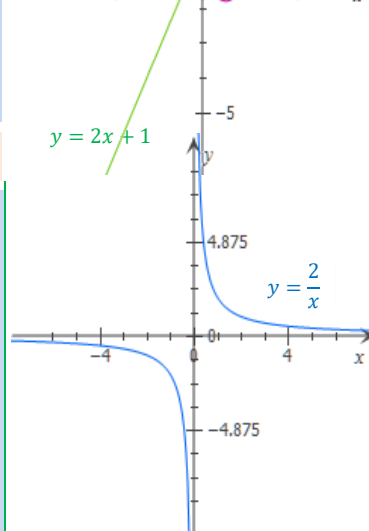
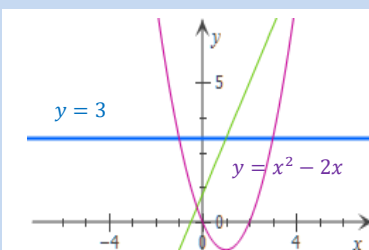
I. **Polinómicas:** A súa expresión analítica é un polinomio: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, $a_i \in \mathbb{R}$. Daquela, o dominio máximo é $\mathbb{R}$, tendo un conxunto imaxe distinto en cada caso. A gráfica depende do grao:

- Grao 0: $y = k$. Chámanse **funcións constantes**. A gráfica é unha líña recta horizontal que pasa por $(0, k)$.
- Grao 1: $y = mx + n$, $m \neq 0$. “ m ” recibe o nome de *pendente* (porque indica a súa inclinación) e “ n ” é a *ordenada na orixe*.

Se $n = 0$, denomínanse **funcións lineais ou de proporcionalidade** e a súa gráfica é unha recta oblicua que pasa pola orixe.

Se $n \neq 0$, chámanse **funcións afinity** e a súa gráfica é unha recta oblicua que non pasa pola orixe.

- Grao 2: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Chámanse **funcións cuadráticas**. A súa gráfica é unha parábola vertical cuxa forma depende exclusivamente do valor de “ a ” (“ b ” e “ c ” só inflúen na súa posición). O seu vértice alcánzase para o valor de $x = -\frac{b}{2a}$.
- Grao ≥ 3 : As súas gráficas son curvas que aprenderemos a representar en vindeiras unidades.



Exemplos: $f(x) = -2$; $g(x) = 2x + 3$; $h(x) = x^2 - 5x + 6$

II. **Racionais:** A súa expresión analítica é un cociente de polinomios, polo que o seu dominio máximo está formado por todos os números reais excepto aqueles que anulan o polinomio do denominador. O percorrido varía en cada caso.

En concreto, aquelas cuxa expresión analítica é da forma $y = \frac{k}{x}$ onde k é calquera número real distinto de cero, reciben o nome de **funcións de proporcionalidade inversa**. A súa gráfica é unha hipérbola.

Así mesmo, as da forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ tamén son hipérboles, pois son transformacións elementais das anteriores (basta con realizar a división polinómica).

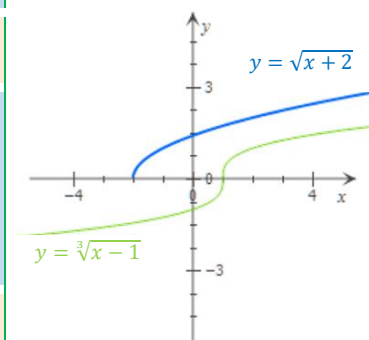
As gráficas das hipérboles e das demais funcións racionais serán obxecto fundamental de estudo nas vindeiras unidades.

Exemplos: $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{-1}{x+1}$; $h(x) = \frac{x-3}{x-2}$

III. **Irracionais:** Na súa forma básica, a expresión analítica é $y = \sqrt[n]{x}$.

Se n é par, o seu dominio máximo é $[0, +\infty)$ e a súa gráfica é media parábola horizontal. Se n é impar, o dominio máximo é $\mathbb{R}$, tendo como gráfica a unión de dúas “medias parábolas” horizontais.

O conxunto imaxe é distinto en cada caso.



Exemplos: $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt[3]{x}$; $h(x) = \sqrt{1-x}$

IV. **Exponenciais:** Na súa forma básica, a expresión analítica é $y = a^x$ onde a é un número real positivo distinto de 1. O seu dominio máximo é $\mathbb{R}$. Neste caso, é importante recordar que o percorrido é $(0, +\infty)$, ou o que é o mesmo, as funcións exponenciais sempre dan resultado positivo.

Son crecentes se $a > 1$ e decrecentes se $0 < a < 1$. A súa gráfica denomínase curva exponencial.

Exemplos: $f(x) = 3^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $h(x) = 2^{x-1}$

V. **Logarítmicas:** Na súa forma básica, a expresión analítica é da forma $y = \log_a x$ onde a é un número real positivo distinto de 1. Son as recíprocas das funcións exponenciais. Xa que logo, o seu dominio é $(0, +\infty)$ e o percorrido, $\mathbb{R}$.

Pola mesma razón, a súa gráfica, que se denomina curva logarítmica, é simétrica da correspondente curva exponencial, respecto da bisectriz do primeiro cuadrante.

Exemplos: $f(x) = \log_2 x$; $g(x) = \log_{1/3} x$; $h(x) = \log(x+1)$

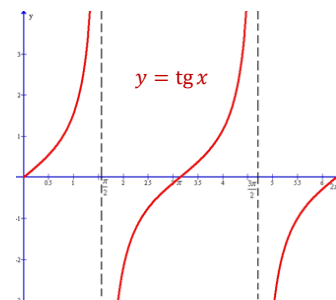
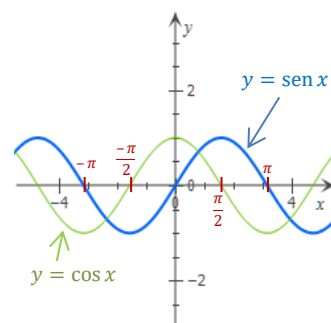
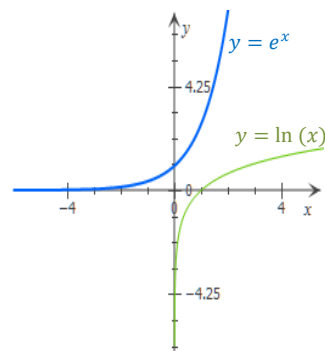
VI. **Trigonómicas:** Basicamente son $y = \sin x$ e $y = \cos x$.

Ámbalas dúas teñen por dominio todo $\mathbb{R}$ e percorrido, o intervalo $[-1,1]$. Son periódicas de período 2π .

As súas coñecidas gráficas denomínanse, respectivamente, sinusoide e cosinusoide.

Tamén temos $y = \operatorname{tg} x$ que é periódica de período π . Ademais, como é o cociente entre o seno e o coseno, non existe cando este último se anula: $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Nesas puntos presenta asíntotas verticais. O conxunto imaxe é $\mathbb{R}$ e a súa gráfica denomínase tanxentoide.

Exemplos: $f(x) = \sin 2x$; $g(x) = 1 + \cos x$; $h(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$



IP3. Ao coñecer “a priori” as gráficas das funcións elementais, construíndo unha pequena táboa de valores suficientemente espallados, elixidos en cada un dos intervalos que forman o seu dominio, podes e debes representar as funcións que aparecen en todos os exemplos deste epígrafe. Ás veces, pode ser suficiente facer unha representación aproximada utilizando as “transformacións elementais” da seguinte nota.

Nota: Debes recordar as “transformacións elementais” estudadas en cursos anteriores:

- (i) **Desprazamentos:** - Se sumamos (restamos) unha cantidade positiva k á variable independente x , $f(x+k)$, prodúcese un desprazamento horizontal de k unidades na súa gráfica, no sentido negativo (positivo) do eixe OX .
- Se sumamos (restamos) unha cantidade positiva k á variable dependente y (é dicir, a toda a función), $f(x) + k$, prodúcese un desprazamento vertical de k unidades na súa gráfica, no sentido positivo (negativo) do eixe OY .
- (ii) **Estiramentos e contraccións:** - Se multiplicamos (dividimos) por unha cantidade positiva $k > 1$ a variable independente x , $f(k \cdot x)$, prodúcese unha contracción (estiramento) horizontal de factor k na súa gráfica.
- Se multiplicamos (dividimos) por unha cantidade positiva $k > 1$ a variable dependente y (é dicir, toda a función), $k \cdot f(x)$, prodúcese un estiramento (contracción) vertical de factor k na súa gráfica.
- (iii) **Reflexións:** - Se cambiamos de signo unha das variables da función, $f(-x)$, $-f(x)$, prodúcese unha reflexión da súa gráfica, cuxo eixo de simetría é o eixe da outra variable.

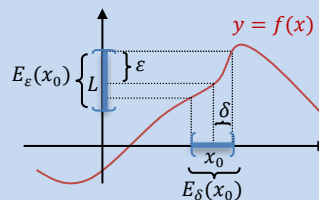
8.3. Límite dunha función nun punto. Límites laterais. Cálculo de límites de funcións

Límite dunha función nun punto

O curso pasado estudastes o concepto de límite dunha forma intuitiva. Seguramente vos dixeran algo similar a isto: “O límite dunha función nun punto, se existe, é o número real ao que se van aproximando (cada vez máis) as imaxes, cando os orixinais se achegan a ese punto”. Nesta afirmación falta a rigorosidade necesaria que agora lle imos proporcionar coa definición de límite dunha función:

Diremos que o **límite dunha función** $f(x)$, cando x tende a x_0 , é o número real L cando, fixado calquera entorno de L (por moi pequeno que este sexa), é posible atopar un entorno de x_0 tal que as imaxes de todos os seus puntos, excepto acaso o propio x_0 , pertencen ao primeiro entorno. É dicir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall E_\varepsilon(L), \exists E_\delta(x_0) : x \in E_\delta(x_0), x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in E_\varepsilon(L).$$



Prescindido de todo o accesorio e establecendo a pertenza a un entorno en termos de distancia (valor absoluto da diferenza), obtemos a definición definitiva:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$

Notas: (1) Ao escribir $0 < |x - x_0|$ excluimos a posibilidade de que $x = x_0$. É importante destacar que, á hora de falar do límite dunha función nun punto, non importa o que ocorra nese punto senón nas súas proximidades; Incluso pode suceder que exista o límite sen que a función estea definida nel.

(2) Cando $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, dise que a función $f(x)$ converxe a L no punto x_0 .

Exemplo: Demostremos que $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$.

Fixado $\varepsilon = 0'5$, analizamos a desigualdade final da definición:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x + 1 - 5| < 0'5 \Leftrightarrow 2|x - 2| < 0'5 \Leftrightarrow |x - 2| < 0'25.$$

Isto significa que, efectivamente, bastaría con tomar calquera δ tal que $0 < \delta < 0'25$.

Fagámolo máis difícil, fixemos $\varepsilon = 0'01$. Analizamos de novo a desigualdade final:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x + 1 - 5| < 0'01 \Leftrightarrow 2|x - 2| < 0'01 \Leftrightarrow |x - 2| < 0'005.$$

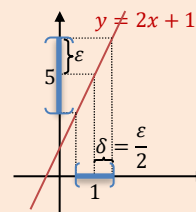
Isto significa que, efectivamente, bastaría con elixir un δ tal que $0 < \delta < 0'005$.

A pesar de todo, aínda non está demostrado que o límite sexa $L = 5$.

Para elo temos que fixar un $\varepsilon > 0$ calquera. Analizamos a desigualdade:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto significa que, efectivamente, bastaría tomar calquera δ tal que $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$.



P4. Demostra que $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

Límites laterais

Coñecido o concepto de límite é moi doado facerse co de límite lateral. Trátase de saber a quen se aproximan as imaxes cando, en vez de falarmos de aproximación en xeral ao punto ($x \rightarrow x_0$), falamos dunha aproximación máis concreta: ben pola dereita ($x \rightarrow x_0^+$) ou pola esquerda ($x \rightarrow x_0^-$).

As definicións rigorosas son as seguintes:

Diremos que $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : [(|x - x_0| < \delta, x > x_0) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$.

Analogamente, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : [(|x - x_0| < \delta, x < x_0) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$.

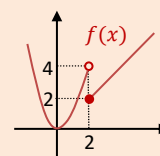
Evidentemente, para que exista o límite L dunha función nun punto, deben existir os límites laterais e seren tamén iguais a L . É dicir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

Exemplo: Podes hallar o límite dunha función nun punto a partir da súa gráfica. Por exemplo:

Se miras a gráfica do exemplo anterior, podes ver que: $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + 1) = 5$.

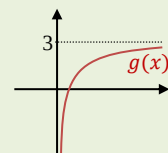
Non obstante, se observas a gráfica adxunta da función a anacos, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, cúmprese que: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. Daquela, $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.



Notas: (1) Existen límites infinitos ($L = \pm\infty$) e límites no infinito ($x_0 = \pm\infty$). Por exemplo, na función $g(x)$ da á dereita, podemos afirmar que: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 3$.

Sería preciso expoñer as correspondentes definicións pero non o faremos para evitar estendernos en exceso.

(2) Cando o límite dunha función nun punto é infinito, dise que a función diverxe a infinito nese punto.



Cálculo de límites de funcións

O límite dunha función cumpre as propiedades alxébricas. Isto quere dicir que se “comporta” como é de esperar coas operacións denominadas alxébricas: o límite dunha suma (resta) é a suma (restas) dos límites, o límite dun produto (cociente) é o produto (cociente) dos límites e o límite dunha potencia (raíz) é igual ao límite da base elevado ao límite do expoñente, sen menosprezo das restricións que lle son propias á división e á potenciación.

Para explicar o comportamento do límite coa composición de funcións, soe dicirse que o *límite conmuta coas funcións continuas*. Isto significa que, se a función g é continua, entón $\lim_{x \rightarrow x_0} g[f(x)] = g\left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right]$.

Como consecuencia destes “comportamentos” e recordando que $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, dedúcese que o **cálculo do límite dunha función $f(x)$ nun punto x_0 consiste, inicialmente, en substituír x por x_0 .**

(i) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5) = 3^2 - 5 = 4$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5}{x^3 + x + 1} = \frac{4}{31}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 2} [(x + 1)^{x+2}] = 3^4 = 81$

(iv) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\sin x) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(v) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(-3 + \frac{2x}{(x+1)^2} + \frac{2}{x}\right) = -3 + \frac{-2}{0^+} - 2 = -3 - \infty - 2 = -\infty$

Frecuentemente, aparecen expresións inesperadas (especialmente cando traballamos con límites no infinito e con límites infinitos). Moitas delas teñen un resultado determinado finito ou infinito (como no último exemplo), pero outras non. Reciben o nome de expresións indeterminadas ou indeterminacións.

Nas táboas que seguen analízanse os distintos casos e resultados que se poden producir:

$\lim(f + g)$		$\lim g$			
		b	∞	$-\infty$	
$\lim f$	a	$a + b$	∞	$-\infty$	
	∞	∞	∞	$\infty - \infty$	
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty + \infty$	$-\infty$	

$\lim(f \cdot g)$		$\lim g$			
		$b \neq 0$	0	∞	$-\infty$
$\lim f$	$a \neq 0$	$a \cdot b$	0	$\infty (a > 0)$ $-\infty (a < 0)$	$-\infty (a > 0)$ $\infty (a < 0)$
	0	0	0	$0 \cdot \infty$	$0 \cdot (-\infty)$
	∞	$\infty (b > 0)$ $-\infty (b < 0)$	$\infty \cdot 0$	∞	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty (b > 0)$ $\infty (b < 0)$	$-\infty \cdot 0$	$-\infty$	∞

$\lim(f/g)$		$\lim g$			
		$b \neq 0$	0	∞	$-\infty$
$\lim f$	$a \neq 0$	a/b	$\pm\infty$	0	0
	0	0	$\frac{0}{0}$	0	0
	∞	$\infty (b > 0)$ $-\infty (b < 0)$	$\pm\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{\infty}{-\infty}$	$\frac{\infty}{-\infty}$ $\frac{-\infty}{-\infty}$
	$-\infty$	$-\infty (b > 0)$ $\infty (b < 0)$	$\pm\infty$	$\frac{-\infty}{\infty}$ $\frac{-\infty}{-\infty}$	$\frac{-\infty}{-\infty}$ $\frac{\infty}{-\infty}$

$\lim f^g$		$\lim g$			
		0	$b \neq 0$	∞	$-\infty$
$\lim f$	0	0^0	$0 (b > 0)$ $\infty (b < 0)$	0	∞
	$0 < a < 1$	1	a^b	0	∞
	1	1	1	1^∞	$1^{-\infty}$
	$a > 1$	1	a^b	∞	0
$\lim f$	∞	∞^0	$\infty (b > 0)$ $0 (b < 0)$	∞	0

Exemplos: (i) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5}{x^2 - 9} = \frac{5}{0^-} = -\infty$ (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3} = \frac{5}{\infty} = 0$ (iii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{7}{2-x} = \frac{7}{0^+} = \infty$
 (iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 5) = 3 \cdot \infty + 5 = \infty$ (v) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{2+x}\right)^{1/(x-1)^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^\infty = 0$ (vi) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{4}{2+x}\right)^{-x} = 2^{-\infty} = 0$

Obviamente, as celas con texto vermello conteñen expresións indeterminados (indeterminacións). Na seguinte táboa reflíctense estes casos de xeito resumido (hai 7 distintos):

Suma e Resta	Multiplicación	División	Potenciación
$\infty - \infty$	$0 \cdot (\pm\infty)$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
			$1^{\pm\infty}$ 0^0 ∞^0

Cando nos atopemos cunha indeterminación, teremos que aplicar algunha estratexia que permita resolvela. Cada indeterminación ten a súa propia estratexia de resolución, as cales imos recordar e practicar deseguido:

Indeterminación	Estratexias
$\infty - \infty$	- Técnica do termo dominante (Ollo! Esta técnica só se pode aplicar cando x tende a ∞). - Outra opción similar consiste en construír infinitésimos, dividindo e multiplicando (para compensar) pola maior potencia de x. - Se hai raíces cadradas e os termos dominantes son iguais, multiplícase e divídese polo binomio conxugado.

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x^3 - 1) = \left[\frac{\infty - \infty}{\text{Indet.}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^3) = -\infty$
 Outra opción sería: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x^3 - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{x} - 3 - \frac{1}{x^3} \right) \cdot x^3 \right] = \left(\frac{1}{\infty} - 3 - \frac{1}{\infty^3} \right) \cdot \infty^3 = -3 \cdot \infty = -\infty$
 (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3 + 5x} - 3x) = \left[\frac{\infty - \infty}{\text{Indet.}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^{3/2}) = \infty$
 (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3x^2 + x}) = \left[\frac{\infty - \infty}{\text{Indet.}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{3}x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 - \sqrt{3}) \cdot x] = -\infty$
 (iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 5}) = \left[\frac{\infty - \infty}{\text{Indet.}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0 \rightarrow \text{NON!}$ (anúlense os termos dominantes ao seren iguais; daquela, o límite non depende deles, senón do resto da expresión).
 Neste caso, multiplicas e divides polo binomio conxugado para quitar a raíz e eliminar os termos dominantes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 5}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 5})(x + \sqrt{x^2 - 5})}{x + \sqrt{x^2 - 5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 5}{x + \sqrt{x^2 - 5}} = \frac{5}{\infty} = 0$$

PS. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^2 - 2x} - \sqrt{2x^3})$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - 3x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - 2x)$

Indeterminación	Estratexias
$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	- Técnica do termo dominante (Ollo! Esta técnica só se pode aplicar cando x tende a ∞). - Outra opción similar consiste en construír infinitésimos, dividindo numerador e denominador pola maior potencia de x.

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6}{3x^2 - 2x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ Indet.} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
 Outra opción sería: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6}{3x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{x^2}}{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 + \frac{6}{\infty}}{3 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{2 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{2}{3}$
 (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{\sqrt{4x + 1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ Indet.} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{\sqrt{4x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2x^{0.5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2} x^{1.5} = \frac{3}{2} \cdot \infty = \infty$

PC. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 25}{\sqrt{5} \cdot x^2 - 5x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{3x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 1}}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{(2x+1) \cdot (5x+3)}{4x^2 - 3}}$

Estratexias de carácter xeral para límites no infinito

- Sempre se deben **realizar as operacións pendentes**, pois poden producir distintos tipos de indeterminacións.
- Para o cálculo de límites no infinito negativo faremos uso de que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(-x)$.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1-x^3+x^4}{x^3-x} - \frac{x^3+1}{x^2-1} \right) &= \left[\infty - \infty \right]_{\text{Indet.}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3-1}{x \cdot (x^2-1)} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \text{Indet.} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-1) = -1 \\ \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{x} \cdot (x^3+1) \right] &= \left[0 \cdot \infty \right]_{\text{Indet.}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+3}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{Indet.} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 = \infty \\ \text{(iii)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-3}{\sqrt{x^2+1}+x} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \text{Indet.} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{2x} = \frac{-1}{2} \\ \text{(iv)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^3-x}}{7x-x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{-5x^3+x}}{-7x-x^2} = \frac{\sqrt{-\infty}}{-\infty} \rightarrow \nexists \end{aligned}$$

P7. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2x}}{3}; \frac{x^2}{2} \right)$ (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2-5x}{x+3} - 2x \right)$ (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$

Estratexia de carácter xeral para límites no infinito

- Se aparecen logaritmos ou exponenciais é interesante ter en conta que $\log_a \infty < \infty^b < c^\infty$, sendo $a > 1$, $b > 0$ e $c > 1$. Isto significa que, aínda que os tres dan como resultado ∞ , **o infinito obtido dun logaritmo** (de base maior que 1) **sempre é de orde inferior ao dunha potencia** (de expoñente positivo) e este, á súa vez, **inferior ao dunha exponencial** (de base maior que 1).

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \log(1+x^3)}{5x^2-7x+1} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \text{Indet.} \right] \stackrel{(*)}{=} 0 & \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (10x^3 - 2^x) &= \left[\infty - \infty \right]_{\text{Indet.}} \stackrel{(*)}{=} -\infty \\ \text{(iii)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \log_2 x^3) &= \left[\infty - \infty \right]_{\text{Indet.}} \stackrel{(*)}{=} \infty & \text{(iv)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2^x}{\log(x^3+1)} &= \left[\frac{-\infty}{\infty} \text{Indet.} \right] \stackrel{(*)}{=} -\infty \end{aligned}$$

(*) En todos estes casos, deberíamos facer mención da propiedade anterior: *O infinito obtido dun....*

PS. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{5^x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x^3)$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x \cdot \sqrt{x^5-1} \right]$

Indeterminación	Estratexia
$1^\pm \infty$	• Aplicar a técnica do número e, que consiste en transformar o límite inicial noutro do tipo $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\left(1 + \frac{1}{u(x)} \right)^{v(x)} \right]$, podendo ser x_0 real ou infinito. Como ben sabes, o resultado deste límite será sempre unha potencia do número e: $e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)}$.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3x^2}{2x^2-x} \right)^{x+3} &= \left(\frac{3}{2} \right)^\infty = \infty & \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{1-2x} \right)^{-2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+2x} \right)^{2x} = \left(\frac{1}{2} \right)^\infty = 0 \\ \text{(iii)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3x}{x-2} \right)^{1+x} &= (-3)^\infty \rightarrow \nexists & \text{(iv)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x^2)^{-x+3} &= \infty^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \text{(v)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-2} \right)^{2x^2} &= [1^\infty \text{Indet.}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{x^2+3}{x^2-2} - 1 \right) \right]^{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x^2-2} \right)^{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-2}{5}} \right)^{2x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-2}{5}} \right)^{\frac{x^2-2}{5}} \right]^{\frac{5}{x^2-2} \cdot 2x^2} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-2}{5}} \right)^{\frac{x^2-2}{5}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2}{x^2-2}} = e^{10} \end{aligned}$$

Ata agora só calculamos límites no infinito (cando x tende a infinito), pero estas indeterminacións tamén poden xurdir ao calcular límites en puntos (cando x tende a un número real), como se advertía na descrición inicial desta estratexia:

$$(vi) \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = [1^\infty \text{ Indet.}] = \lim_{x \rightarrow 1^+} [1 + (x-1)]^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}} \right]^{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1}} = e^1 = e$$

Notas: (1) É posible mecanizar esta técnica coa aplicación da fórmula: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \{[f(x)-1] \cdot g(x)\}}$

No exemplo anterior: $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = [1^\infty \text{ Indet.}] = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} = e$.

A razón de non utilizar esta fórmula nin recomendar a súa utilización é porque a técnica proposta non se esquece con tanta facilidade e resulta máis enriquecedora que ela.

(2) Faltan por resolver as outras dúas indeterminacións exponenciais, 0^0 e ∞^0 . Farémolo máis adiante coa regra de L'Hôpital. En realidade, con ela resolveremos moitos máis tipos de límites que non somos quen de facer neste momento (especialmente cando aparecen funcións trigonométricas, exponenciais e logarítmicas), e outros que xa sabemos resolver, farémolos de xeito máis áxil.

P9. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^{x+3}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{x^2-5}$ (c) $\lim_{x \rightarrow -5} (x+6)^{\frac{1}{25-x^2}}$

Indeterminación	Estratexias
$\frac{0}{0}$	Simplificar despois de factorizar numerador e denominador (pode ser necesario aplicar a regra de Ruffini). Se hai raíces, é moi probable que sexa necesario eliminarlas previamente para facer aparecer o factor polinómico que produce os ceros (multiplicando numerador e denominador pola propia raíz ou polo binomio conxugado).

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{2x^2-2x} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (x+3)}{2x \cdot (x-1)} = \frac{-3}{2}$
(ii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.}\right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{(x+2) \cdot (x^2+5)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x^2+5} = \frac{-4}{9}$
(iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} \cdot (x + \sqrt{x^3})\right] = \left[\infty \cdot 0\right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^3}}{x} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.}\right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x \cdot \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot (1 + \sqrt{x})}{x} = 1$
(iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{3 \cdot \sqrt[3]{x-1}} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.}\right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1) \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}{3 \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1) \cdot (x-1) \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}{3 \cdot (x-1)} = \frac{2 \cdot 0}{3} = 0$
(v) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.}\right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+4-3^2}{(x-5) \cdot (\sqrt{x+4}+3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{1}{6}$

P10. (a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x^2-5x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-6x^2+5x}{x^4-x^3+x-1}$ (c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3+3x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ (d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x+9}{3-\sqrt{12+x}}$

Estratexia de carácter xeral para límites nun punto

- Nos **puntos fronteira** das funcións definidas a anacos e nos **límites infinitos**, case sempre será necesario estudar os **límites laterais**.

(i) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 1 + x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0; \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{bmatrix} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (1 + x) = 3 \end{bmatrix} = 3$
(ii) $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0; \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} e^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \begin{bmatrix} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x) = 1 - \ln 0^+ = 1 - (-\infty) = \infty \end{bmatrix} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1 - \ln x) = 1 - \ln 1 = 1; \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \ln x) = 1 - \ln \infty = 1 - \infty = -\infty$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0} = \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{array} \right] \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x+1}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-3x}{x^2-2x+1} = \frac{-1}{0} = \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-3x}{x^2-2x+1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-3x}{x^2-2x+1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{array} \right] = -\infty$$

P11. (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3-x} & \text{se } x < 3 \\ 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ (en $-\infty, 0$ e 3)

(b) $g(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1}$ (en 3 e 1)

(c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-2}{x^3+4x^2+4x}$

8.4. Ramas infinitas dunha función: asíntotas e ramas parabólicas

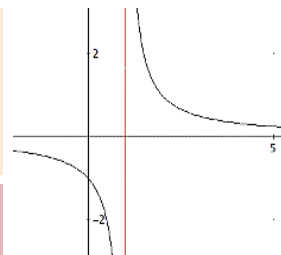
As **asíntotas** dunha función son as rectas ás que a súa gráfica se aproxima progresivamente, máis canto máis nos afastamos da orixe de coordenadas. Ao tratarse de rectas, poden ser de tres tipos:

- Verticais:** Son rectas verticais e polo tanto, a súa ecuación é da forma $x = k$. O valor ou valores finitos de k (poden existir infinitos) deben ser tales que cando x se aproxima a eles (pola dereita ou pola esquerda), o valor da función tende a ∞ ou $-\infty$. É dicir: $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \pm\infty$.

Nota: Toma nota de que os valores de k debes escollelos entre os puntos de descontinuidade da función, porque ao teren algún límite lateral infinito, non pode haber continuidade neles.

Exemplo: A función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ é continua en $D = \mathbb{R} - \{1\}$. Vexamos se hai asíntota vertical no único punto sospeitoso $k = 1$. Efectivamente así é, pois:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$



P12. Acha as asíntotas verticais de: (a) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ (b) $g(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

- Horizontais:** Son rectas horizontais e polo tanto, a súa ecuación é da forma $y = k$.

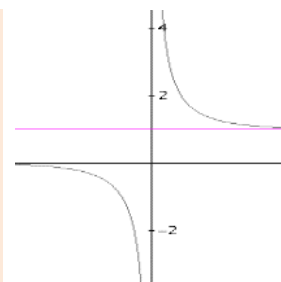
O valor ou valores de k (como moito poden existir dous) son os límites da función cando x tende a ∞ ou $-\infty$, que deben ser finitos. É dicir: $k_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e $k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Poden pedirche que estudes a posición da función con respecto á asíntota; Isto é, se a función se aproxima por enriba ou por debaixo a ela. Para sabelo, basta con pescudar o signo de $[f(x) - k]$: se é positivo, significa que a función queda por enriba. En caso contrario, quedaría por debaixo.

Exemplo: A función $f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$ ten dúas asíntotas horizontais nas rectas $y = 1$ e $y = 0$ pois $k_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{1-e^{-\infty}} = \frac{1}{1-0} = 1$ e $k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{1-e^{\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

Como $\frac{1}{1-e^{-x}} - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} > 0$ (cando x é arbitrariamente grande e positivo) entón a función aproxímase por enriba a asíntota $y = 1$ no ∞ .

Como $\frac{1}{1-e^{-x}} - 0 = \frac{1}{1-e^{-x}} < 0$ (cando x é arbitrariamente grande e negativo) entón a función aproxímase por debaixo a asíntota $y = 0$ no $-\infty$.



P13. Determina as asíntotas horizontais das funcións:

(a) $f(x) = \frac{x}{1+2x}$

(b) $g(x) = \frac{x}{1-|x|}$

Nota: (1) Sempre que unha función racional ten unha asíntota horizontal cando $x \rightarrow \infty$ entón tamén presenta esa mesma asíntota cando $x \rightarrow -\infty$. Analiza por que ocorre iso.
(2) Loxicamente, as funcións periódicas non poden ter asíntotas horizontais.

2.2. Oblicuas: Son rectas oblicuas e polo tanto, a súa ecuación explícita será da forma $y = mx + n$. Para achar o valor ou valores da pendente e da ordenada na orixe (como moito poden existir dous de cada un deles) é necesario calcular os seguintes límites, que deben ser finitos (e $m \neq 0$):

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } n_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - m_1 \cdot x] ; m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - m_2 \cdot x]$$

Poden pedirche que estudes a posición da función con respecto á asíntota. Isto é, se a función se aproxima por enriba ou por debaixo a ela. Para sabelo, basta con pescudar o signo de $[f(x) - (mx + n)]$: se é positivo, significa que a función queda por enriba. En caso contrario, quedaría por debaixo.

Notas: (1) Ten en conta que para calcular a ordenada na orixe é necesario coñecer o valor da pendente. Ademais, se $m = 0$, non existiría a asíntota oblicua buscada. En todo caso, sería horizontal.
(2) Observa que, se unha función se aproxima a unha A.H. cando $x \rightarrow \infty$, non pode aproximarse tamén a unha A.O. e reciprocamente. O mesmo sucede cando $x \rightarrow -\infty$. É dicir, se existen A.H. por un lado entón non existen A.O. por ese mesmo lado, e viceversa.

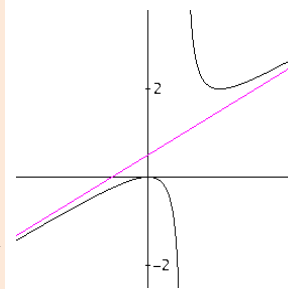
Exemplo: $f(x) = \frac{x^2}{2x-2}$ ten unha A.O. na recta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$, pois:

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{2x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \frac{1}{2} \text{ e } n_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x-2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^2+2x} = \frac{1}{2} \text{ e } n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x+2} = \frac{1}{2} \right).$$

Como $\frac{x^2}{2x-2} - \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2x-2} > 0$ cando x é arbitrariamente grande e positivo, entón a función aproxímase por enriba a asíntota $y = \frac{x+1}{2}$, no ∞ .

Como $\frac{x^2}{2x-2} - \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2x-2} < 0$ cando x é arbitrariamente grande e negativo, entón a función aproxímase por debaixo a asíntota $y = \frac{x+1}{2}$, no $-\infty$.



P14. Acha as asíntotas oblicuas das funcións: (a) $f(x) = \frac{x^3}{(2+x)^2}$ (b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Notas: (1) Sempre que unha función racional ten unha asíntota oblicua cando $x \rightarrow \infty$ entón tamén presenta esa mesma asíntota oblicua cando $x \rightarrow -\infty$. Analiza por que ocorre iso.
(2) Loxicamente, as funcións periódicas non poden ter asíntotas oblicuas.

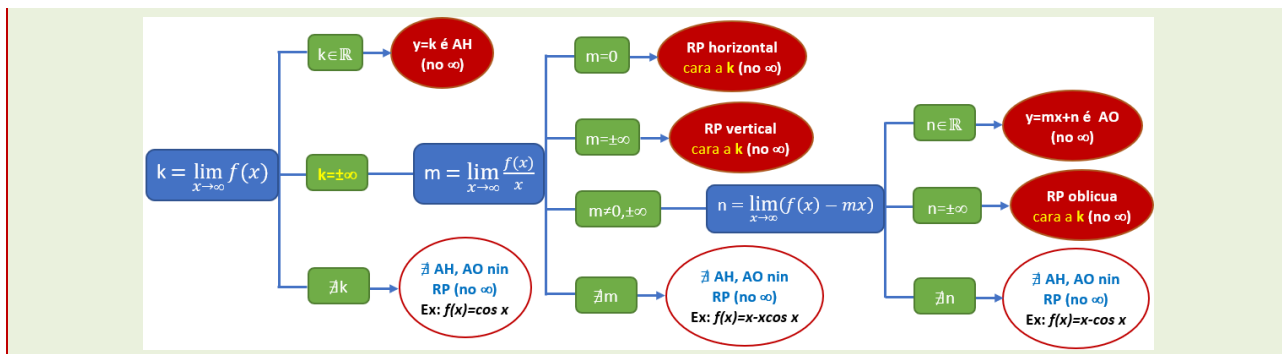
2.3. Ramas parabólicas: Cando $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ e $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ (daquela, non hai asíntota horizontal nin oblicua no ∞), dise que a función presenta **rama parabólica vertical** no ∞ . Significa que acaba crescendo indefinidamente sen aproximarse a ningunha recta, como o fai unha parábola de eixe vertical.

Cando $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ e $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (daquela, non hai asíntota horizontal nin oblicua no ∞), dise que a función presenta **rama parabólica horizontal** no ∞ . Significa que acaba crescendo indefinidamente sen aproximarse a ningunha recta, pero con menos ímpetu, como o fai unha parábola de eixe horizontal.

Cando $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$, $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq \begin{cases} \pm\infty \\ 0 \end{cases}$ e $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \pm\infty$ (daquela, non hai asíntota horizontal nin oblicua no ∞), dise que a función presenta **rama parabólica oblicua** no ∞ . Significa que acaba crescendo indefinidamente sen aproximarse a ningunha recta, como o fai unha parábola de eixe oblicuo.

Todo isto podería suceder analogamente no $-\infty$.

Notas: (1) Toma nota de que as A.H. as A.O. e as R.P. analizan como acaba a función cando $x \rightarrow \infty$ e cando $x \rightarrow -\infty$. Xa que logo, son incompatibles entre si (polo mesmo lado) e só poden existir dúas, en total.
(2) Para o estudo das A.H., A.O. e R.P. no ∞ pode ser útil o seguinte esquema (sería igual no $-\infty$):

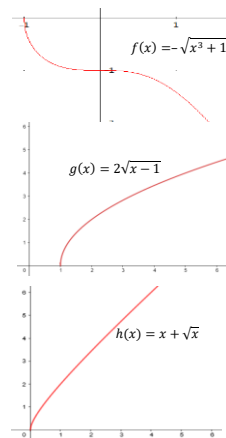


Exemplos: (1) A función $f(x) = -\sqrt{x^3 + 1}$ acaba en rama parabólica vertical cara a $-\infty$ no ∞ , pois $k = \lim_{x \rightarrow \infty} (-\sqrt{x^3 + 1}) = -\infty$ e $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{x^3 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\sqrt{x + \frac{1}{x^2}} \right] = -\infty$.

(2) A función $g(x) = 2\sqrt{x-1}$ acaba en rama parabólica horizontal cara a ∞ no ∞ , pois $k = \lim_{x \rightarrow \infty} 2\sqrt{x-1} = \infty$ e $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}} = 0$.

(3) A función $h(x) = x + \sqrt{x}$ acaba en rama parabólica oblicua cara a ∞ no ∞ , pois $k = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x}) = \infty$, $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = 1 \neq \left\{ \begin{matrix} \pm\infty \\ 0 \end{matrix} \right.$ e $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4x^2}{\sqrt{x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$.

Dado o dominio tres dúas funcións, non ten sentido buscar RP no $-\infty$.



P15. Determina as ramas parabólicas de: (a) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ (b) $g(x) = e^{-2x}$

Notas: (1) Se unha función racional acaba en rama parabólica cando $x \rightarrow \infty$ entón tamén o fai cando $x \rightarrow -\infty$, aínda que poden ser distintas (unha cara a ∞ e outra cara a $-\infty$). Pensa por qué.

(2) Loxicamente, as funcións periódicas non poden presentar ramas parabólicas.

8.5. Función continua nun punto. Continuidade lateral. Tipos de discontinuidades. Continuidade nun intervalo.

Diremos que unha función f é **continua** no punto x_0 , se e só se, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

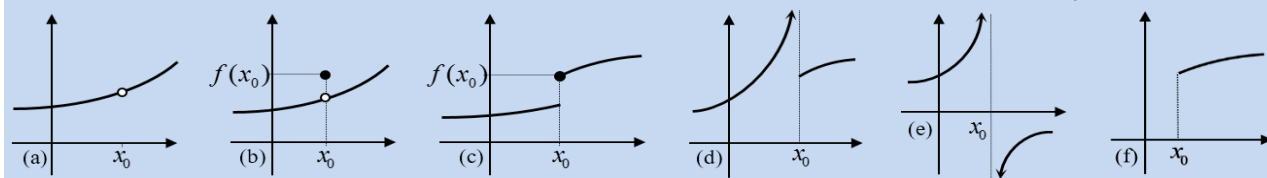
Nota: Ao dicir que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, estamos falando de tres condicións: $\left\{ \begin{matrix} (i) \text{ Que exista o límite (e sexa finito)} \\ (ii) \text{ Que exista a imaxe} \\ (iii) \text{ Que ambos valores coincidan} \end{matrix} \right.$

Diremos que unha función f é continua **pola dereita** no punto x_0 , se e só se, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Analogamente, unha función f é continua **pola esquerda** no punto x_0 , se e só se, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Nota: Observa que a continuidade nun punto equivale á continuidade lateral pola esquerda e pola dereita (ao mesmo tempo) nese punto. Entón, a condición de continuidade é "máis forte" que a de calquera das continuidadeas laterais. Por exemplo, a función (c) da seguinte imaxe, non é continua no punto x_0 , pero si o é pola súa dereita.

Observa os seguintes exemplos de funcións que non son continuas (por distintas razóns) no punto x_0 :



Cando **existe límite finito** da función no punto, a descontinuidade recibe o nome de **evitable**, pois é posible “evitala” construíndo outra función practicamente idéntica a ela, pero continua nese punto (bastaría con asignarlle como imaxe do punto, o valor do límite). Poden ser dous os motivos que a provocan: (a) que non exista a imaxe no punto e (b) que exista pero sexa distinta ao límite.

Cando **non existe límite ou sexa infinito** (independentemente de se existe ou non a imaxe da función no punto) a descontinuidade recibe o nome de **esencial** ou **inevitable**. Hainas de dous tipos:

- De **1ª especie**:
 - De **salto finito**: Cando existen límites laterais finitos pero distintos (c).
 - De **salto infinito**: Cando un dos límites laterais é finito e o outro é infinito (d).
 - Asintótica**: Cando os dous límites laterais son infinitos (iguais ou distintos) (e).
- De **2ª especie**: Cando non existe (finito nin infinito) un ou os dous límites laterais. O motivo máis frecuente é a propia inexistencia da función nas proximidades do punto, como ocorre pola esquerda de x_0 na ilustración (f). Cómpre dicir que hai outras descontinuidades de 2ª especie moito máis complexas, cuxo estudo se sae deste nivel académico.

Nota: Daríaste conta de que o nome de descontinuidade **asintótica** provén da existencia dunha **asíntota vertical** nese punto. Pero, nunha descontinuidade de **salto infinito** tamén existe (**media**) **asíntota vertical**.

P16. Organiza nun esquema, os distintos tipos de descontinuidade que pode presentar unha función.

Diremos que unha función f é **continua** en (a, b) cando o sexa en todo punto $x_0 \in (a, b)$.

Así mesmo, diremos que unha función f é **continua** en $[a, b]$ cando sexa continua en (a, b) , continua pola dereita en a e continua pola esquerda en b .

Para o estudo da continuidade dunha función, debes saber que:

*“As funcións **elementais** e as operacións entre elas son continuas no seu dominio”*

Loxicamente, nos puntos que non son do dominio a función non é continua pois non existe a imaxe. Para pescudar o tipo de descontinuidade que presenta en cada un deses puntos, analizaremos o límite, aínda que só o faremos naqueles puntos nos que exista a función, cando menos, a un dos seus lados.

Exemplos: 1. A función $f(x) = 2 - \log(x - 3)$ é continua no seu dominio $\text{Dom}(f) = (3, \infty)$, presentando no 3 unha descontinuidade de 2ª especie, pois $\nexists \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

2. A función $g(x) = 5x - \sqrt{1 - x}$ é continua no seu dominio $\text{Dom}(g) = (-\infty, 1]$, presentando no 1 unha descontinuidade de 2ª especie, pois $\nexists \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

3. A función $h(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$ é continua no seu dominio $\text{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$, presentando:

- No $-1 \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \frac{-6}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \infty \end{cases} \Rightarrow$ descontinuidade esencial de 1ª especie asintótica.
- No $2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \left[\frac{0}{0} \text{ Ind.} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x^2+1)}{(x-2) \cdot (x+1)} = \frac{5}{3} \Rightarrow$ descontinuidade evitable.

P17. Estuda a continuidade das funcións: (a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ (b) $g(x) = \frac{1}{\ln(x - 1)}$

Máis problemas xorden ao tratar con funcións máis artificiosas, como as **definidas a anacos**, pois:

*“As funcións **definidas a anacos** son continuas no seu dominio, **excepto acaso, nos puntos fronteira**”*

Para decidir **esa excepción**, estudarémolos **individualmente** usando a definición e botando man dos límites laterais, se é necesario (case sempre o é).

Exemplo: 1. Estudemos a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 2 \\ -1 & \text{se } x = 2 \\ x^2 - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$.

- En $(\mathbb{R} - \{2\}) \rightarrow f$ é continua pois $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, sendo 2 o único punto de fronteira.
- No $2 \rightarrow f$ pode ou non ser continua. Para sabelo, aplicamos a definición de continuidade:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2-1) = 3 \end{array} \right] = 3 \\ \text{(ii)} f(2) = -1 \\ \text{(iii)} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ presenta descontinuidade evitable no } 2$$

Resumo: f é continua en $\mathbb{R} - \{2\}$, presentando descontinuidade evitable no 2.

2. Analicemos a continuidade da función $g(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ x-5 & \text{se } x > 10 \end{cases}$.

- En $(0,10) \cup (10, \infty) \rightarrow g$ é continua pois $D = (0, \infty)$, sendo 0 e 10, os puntos fronteira dos anacos.
- No $0 \rightarrow g$ presenta unha descontinuidade de 2ª especie pois $\nexists \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$.
- No $10 \rightarrow g$ pode ou non ser continua. Para sabelo, aplicamos a definición de continuidade:

$$\text{(i)} \lim_{x \rightarrow 10} g(x) = \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 10^-} \log x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 10^+} (x-5) = 5 \end{array} \right] \rightarrow \nexists \Rightarrow \text{descontinuidade esencial de 1ª especie e salto finito}$$

Resumo: g é continua en $(0,10) \cup (10, \infty)$, presentando descontinuidade de esencial de 2ª especie no 0 e descontinuidade esencial de 1ª especie e salto finito no 10.

P18. Estuda a continuidade de $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 3x-4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-6x}{x^2-9} & \text{se } x \neq 3 \\ 1 & \text{se } x = 3 \end{cases}$.

P19. Analiza se $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 3x-4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ é continua no intervalo $[0,4]$.

8.6. Teoremas de continuidade (Bolzano e Weierstrass)

Chámanse así porque en ambos figura a hipótese de que a función sexa continua, aínda que o primeiro deles conta cunha hipótese máis.

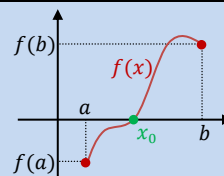
Teorema de Bolzano

Enunciado:

Se unha función é continua nun intervalo pechado e toma distintos signos nos seus extremos, entón existe un punto interior do intervalo no que a función se anula. É dicir:

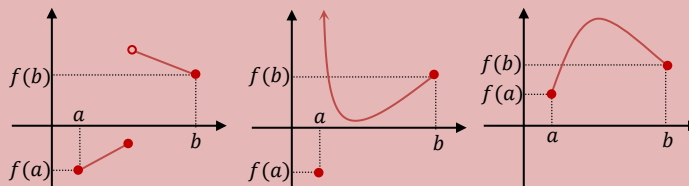
$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$$

Interpretación xeométrica



Se un anaco de curva de trazo continuo ten os seus extremos en distinto semiplano dos dous en que o eixe de abscisas divide ao plano cartesiano, entón debe cortar ao citado eixe, polo menos, nun punto.

P20. As seguintes funcións non cumpren a tese do teorema de Bolzano. Que hipóteses fallan?



Exemplo: O teorema de Bolzano aplícase para localizar solucións de ecuacións que non podemos resolver alxebricamente. Como exemplo, imos achar unha raíz real do polinomio $x^3 - 3x + 40$, ou o que é o mesmo, achar unha solución da ecuación $x^3 - 3x + 40 = 0$.

Construímos $f(x) = x^3 - 3x + 40$ que é unha función continua en calquera intervalo $[a, b]$, ao selo en todo o seu dominio, que é $\mathbb{R}$.

Buscamos dous enteiros consecutivos onde a función cambie de signo: $f(-4) = -12$ e $f(-3) = 22$.

Xa que logo, aplicando o teorema de Bolzano, podemos afirmar que $\exists x_0 \in (-4, -3) : f(x_0) = 0$. É dicir, que existe unha raíz do polinomio entre -4 e -3 .

Ademais, como $f(-3,8) < 0$ e $f(-3,7) > 0$, temos o seu valor aproximado ata as décimas. Continuando así, podemos aproximala tanto como queiramos.

P21. Demostra que a curva $y = x^4 - 2x^3 - 5$ corta ao eixe de abscisas nalgún punto do intervalo $(2,3)$. Acha, dous decimais do punto onde se produce o corte.

Teorema de Weierstrass

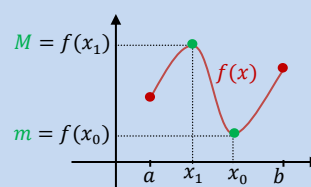
Enunciado:

Se unha función é continua nun intervalo pechado entón alcanza nel os valores máximo e mínimo absolutos. É dicir:

$$f \text{ continua en } [a, b] \Rightarrow \exists x_0, x_1 \in [a, b] : f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \forall x \in [a, b]$$

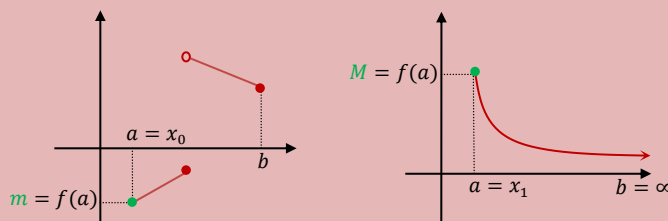
Un anaco de curva de trazo continuo e con extremos, sempre ten, polo menos, un punto máis alto e un punto máis baixo.

Interpretación xeométrica



Nota: Ten en conta que o teorema de Weierstrass só garante a existencia dos valores máximo e mínimo absolutos, pero non di nada sobre a súa localización (aprenderemos a achalos en próximas unidades).

P22. As funcións seguintes non cumpren a tese do teorema de Weierstrass. Que hipóteses fallan?



Observando o anterior teorema, vemos que **toda función f continua nun intervalo pechado** $[a, b]$ ten por percorrido o intervalo, tamén pechado, $[m, M]$. Disto dedúcese dous importantes corolarios:

- **Está limitada** no referido intervalo $[a, b]$, pois debe cumprir que $m \leq f(x) \leq M$.
- **Alcanza calquera valor intermedio entre m e M:** $\forall y \in [m, M], \exists x \in [a, b] : f(x) = y$.

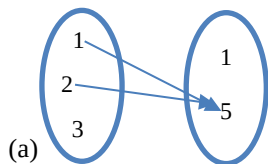
Exemplo: Podemos afirmar que a función $f(x) = x^2 - 1$ alcanza máximo e mínimo absolutos no intervalo $[-2, 3]$ pola sinxela razón de ser continua no mesmo (xa que é continua no seu dominio $\mathbb{R}$). Ademais, pola mesma razón, podemos afirmar que está limitada no referido intervalo.

Exemplo: No entanto, non podemos afirmar que a función $g(x) = \frac{1}{x}$ alcance o máximo ou mínimo absolutos no intervalo $[0, 1]$ pois non é continua nel (presenta unha discontinuidade asíntótica no 0). Pero isto non significa que non poida telos. De feito, esta función si alcanza o mínimo absoluto (no 1), aínda que non o máximo.

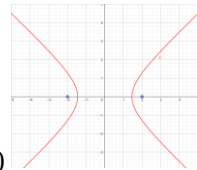
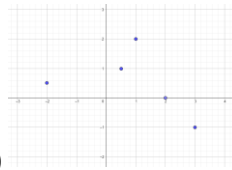
P23. A función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$ está limitada no intervalo $[1, 4]$? E no $[0, 4]$?

CUESTIÓNS, EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Di se as seguintes relacións entre dúas variables numéricas son funcións:



(b) Relacionar a idade de cada alumno co número de zapato que calza.



(e) $y = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 2 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

(f) $y = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 2 \\ x - 1 & \text{se } x > 5 \end{cases}$

(g) $x^2 + y = 1$

(h) $x^2 + y^2 = 1$

2. Verdadeiro ou falso:

(a) O dominio de continuidade dunha función coincide co propio dominio (de definición) da función?

(b) O dominio máximo (ou matemático) dunha función coincide co dominio (de definición) da función?

3. Se unha función ten por dominio $\mathbb{R}$, pode ter algunha asíntota vertical? E se é continua en $\mathbb{R}$?

4. Se existe unha asíntota horizontal, pode existir unha rama parabólica?

5. Xustifica as fórmulas $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - mx\}$ que permiten calcular as AO.

6. Representa graficamente a información que proporcionan os seguintes límites da función $f(x)$:

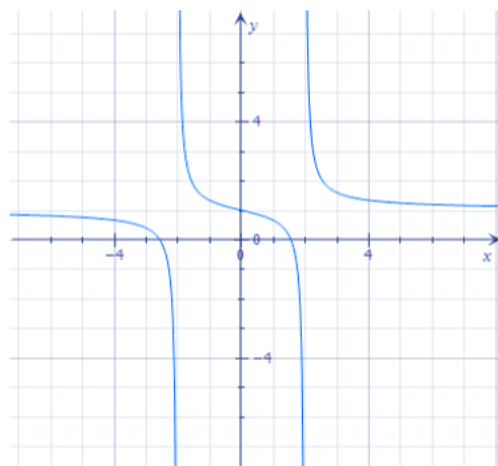
(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$ (d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

7. Traza a gráfica dunha función que cumpra que: $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $f(0) = 0$, $\nexists$ extremos, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ e ten unha descontinuidade evitable en $x = 1$.

8. Unha función pode ter límite finito nun punto e non ser continua nel? De ser así, escribe un exemplo e di de que tipo de descontinuidade se trata.

9. Mediante observación da representación anexa que corresponde á gráfica da función $y = f(x)$, determina:

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
(d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



10. Utilizando a definición, demostra que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$.

11. Determina o dominio das funcións:

(a) $f(x) = \ln(x^2 - 9) - \ln x$ (b) $g(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{2-|x|}$

(c) $h(x) = \sqrt{2-x^2} \cdot \log(\sin x)$

(d) $l(x) = \frac{1}{x^2+3x} \cdot \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$

(e) $m(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

(f) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

(a) $\text{Dom}(f) = (3, \infty)$ (b) $\text{Dom}(g) = [-1, 2) \cup (2, \infty)$ (c) $\text{Dom}(h) = (0, \sqrt{2}]$
(d) $\text{Dom}(l) = (-\infty, -3) \cup (-3, -1] \cup (1, \infty)$ (e) $\text{Dom}(m) = (-\infty, 0) \cup [2, \infty)$ (f) $\text{Dom}(V) = (0, \infty)$

12. Calcula os seguintes límites de funcións nos puntos que se indica:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{2/x^2} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x^2-6}{x^2 \cdot (3-x)} - \frac{1}{x-3} \right) & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+4} \\
 \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow \infty} [(\sqrt{x+7} - \sqrt{2x}) \cdot \sqrt{3x+5}] & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x} - x) \\
 \text{(g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3-1}{1+x} & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \sqrt{1-\cos x}}{\ln(1-\cos x)} & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{x^2-4x-10}{x-4} \right)^{1/(x-6)} \\
 \text{(l)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x+5^x}{3^x+6^x} & \text{(m)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} & \text{(n)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right)^x \\
 \text{(ñ)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\ln x} & \text{(o)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\log(x^2+1) - \sqrt{1-x^5}) & \text{(p)} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+x-6}} \\
 \text{(q)} \lim_{x \rightarrow 1/2} 3^{1/2x-1} & \text{(r)} \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x \cdot (x-1)} \right] & \text{(s)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{16-x^4}{\sqrt{x^2-4}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} 0 & \text{(b)} -\infty & \text{(c)} \frac{1}{3} & \text{(d)} e \quad \text{(e)} -\infty \\
 \text{(f)} \frac{-1}{2} & \text{(g)} \infty & \text{(h)} \frac{1}{2} & \text{(i)} e^3 \cdot \sqrt{e} \quad \text{(l)} 0 \quad \text{(m)} \frac{1}{2} \quad \text{(n)} 1 \quad \text{(ñ)} 0 \quad \text{(o)} -\infty \quad \text{(p)} \infty \quad \text{(q)} \nexists \quad \text{(r)} \infty \quad \text{(s)} 0
 \end{array}$$

13. Dada $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 1 \\ x^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases}$, calcula o seu límite nos puntos $-2, 0, 1$ e 3 . $\frac{-1}{2}; \nexists; \nexists; 8$

14. Calcula os límites das seguintes funcións nos dous infinitos, no 0 e no 1 :

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 1 - \ln x, & x > 0 \end{cases} & \text{(b)} g(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases} & \text{(c)} h(x) = |x-3| - |x|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1; \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty; \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty; \nexists \lim_{x \rightarrow 0} g(x); \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -3; \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 3; \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 3; \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1
 \end{array}$$

15. Calcula o valor de k sabendo que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+kx+1}{x^2+x-2} \right)^{\frac{x^3+1}{x^2-1}} = \sqrt{e}$. $k = \frac{3}{2}$

16. Determina o valor de a para que exista $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-3ax+5}{x-2}$. Nese caso, acha tamén L . $a = \frac{13}{6}; L = \frac{3}{2}$

17. Acha as asíntotas das funcións: (a) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^3-9x}$ (b) $g(x) = \frac{2x^2+x}{x+1}$
 (a) $AV \rightarrow x = -3; AH \rightarrow y = 0$ (b) $AV \rightarrow x = -1; AO \rightarrow y = 2x - 1$

18. Acha as ramas infinitas: (a) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ (b) $g(x) = \sqrt{9x^2-4}$ (c) $h(x) = \frac{x}{e^{2x}}$ (d) $k(x) = x - \sqrt{x}$
 (a) $AV \rightarrow x = 1; RPH \text{ a } \infty \text{ no } \infty$ (b) $AO \rightarrow y = 3x \text{ e } y = -3x$ (c) $AH \rightarrow y = 0; RPV \text{ a } -\infty \text{ no } -\infty$ (d) $RPO \text{ a } \infty \text{ no } \infty$

19. Estuda a continuidade das funcións $f(x) = \log_2(3-x)$ e $g(x) = \frac{x^2-x}{1-x^2}$.
 f é continua en $(-\infty, 3)$, presentando no 3 descont. de 2ª especie
 g é continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, presentando no -1 descont. asíntótica e no 1 descont. evitable

20. Demostra que $y = \frac{x^2-25}{5-x}$ é continua en $\mathbb{R} - \{5\}$, presentando unha discontinuidade evitable en $x_0 = 5$. “Evita” a antedita discontinuidade definindo unha nova función continua en $\mathbb{R}$, que só difira da anterior no citado punto.
 $y = -(x+5)$

21. Estuda a continuidade da función $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{x-1}}}$.

f é continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, presentando no 0 descont. asíntótica e no 1 descont. de salto finito

22. Estuda a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ (\sqrt{x+3})^x & \text{se } 1 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{se } x > 6 \end{cases}$

f é continua en $\mathbb{R} - \{6\}$, presentando no 6 descontinuidade de salto finito

23. Estuda a continuidade da función $f(x) = \frac{|x-1|}{x}$.

f é continua en todo $\mathbb{R} - \{0\}$, presentando no 0 descontinuidade asíntótica

24. Estuda a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} a + 2x, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 + ax}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ segundo os valores de a .

$[a \neq -1 \Rightarrow f \text{ é continua en } \mathbb{R} - \{1\}, \text{ presentando no 1 descontinuidade de salto infinito}]$
 $[a = -1 \Rightarrow f \text{ é continua en } \mathbb{R}]$

25. Determina a e b para que $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$ sexa continua.

$\forall a \in \mathbb{R} ; b = 0$

26. Enuncia o teorema de Bolzano e utilízao para demostrar que a ecuación $e^x - 2^x - 2 = 0$ ten unha solución entre 1 e 2. Aproxímaa ata as décimas.

$1,6 < x_0 < 1,7$

27. Demostra que as funcións $f(x) = x^3 + x^2$ e $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan nun punto.

28. Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$, sendo $f(a) = -5$ e $f(b) > 0$, podemos asegurar que a función $g(x) = f(x) + 3$ ten un cero no intervalo (a, b) ?

29. Entre que dous enteiros se atopa a para que $P(a) = 8$, sendo $P(x) = x^5 - 3x^2 + 1$?

$1 < a < 2$

30. Dada $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$, demostra que existe un punto $c \in (0, 4)$ no que $f(c) = f(c + 1)$.

31. Podes afirmar que a función $f(x) = x^{25} - 7$ está limitada en $[-2, 5]$? E a función $y = \frac{1}{x-5}$?

Si ; Non

CÁLCULO DIFERENCIAL

A derivada é un dos conceptos matemáticos de maior aplicación noutros campos do coñecemento. A súa noción xurdiu ao tratar de encontrar solución a dous antigos problemas: trazar a recta tanxente a unha curva nun punto e calcular a velocidade instantánea dun movemento non uniforme.

No século XVII Leibnitz e Newton, por separado, crearon o Cálculo Diferencial (así se chama basicamente ao cálculo de derivadas), dando así resposta teórica completa aos referidos problemas.

Aínda que Euler (século XVIII) fixo avances no estudo da derivada, non foi ata comezos do século XIX cando Cauchy, ao relacionala de forma clara co concepto de límite, conseguiu establecer un proceso sistemático para o seu cálculo, practicamente igual ao que se estuda na actualidade.

Neste manual, o Cálculo Diferencial está dividido en dúas unidades:

9. **Derivada dunha función**, cunha primeira parte de contido eminentemente teórico, na que se profunda no coñecemento de derivada e do seu significado nas ciencias, dando solución aos antigos problemas que deron lugar a súa aparición. Tamén se analiza a relación existente entre continuidade e derivabilidade. Pola contra, a segunda parte é moi práctica e ten por obxectivo aprender as regras e fórmulas de derivación e adquirir destreza na súa aplicación.

10. **Aplicacións da derivada**, onde serán aplicados os coñecementos anteriores para estudar o comportamento dunha función nas proximidades dun punto, estudo que aproveitaremos para facer representacións gráficas de distintos tipos de curvas. Ademais, na segunda parte da unidade, demostraranse dous resultados moi importantes: teorema de Rolle e teorema do Valor Medio. Finalmente, enunciaremos a regra de L'Hôpital que nos permitirá ampliar o cálculo de límites aprendido con anterioridade noutra unidade.

Os obxectivos fundamentais que se perseguen con estas unidades son:

- Comprender o a definición de derivada dunha función nun punto, así como do seu significado xeométrico e noutras ciencias
- Calcular derivadas utilizando a definición ou ben facendo uso das fórmulas, chegando a dominar por completo a técnica do cálculo de derivadas, incluíndo a derivación en forma implícita e a derivación logarítmica
- Determinar a ecuación da recta tanxente e normal a unha curva nun punto
- Estudar a derivabilidade dunha función (especialmente nas “definidas en anacos” e incluso daquelas que dependen de parámetros)
- Estudar a monotonía, extremos, curvatura e puntos de inflexión dunha función utilizando as súas derivadas
- Aplicar o estudo dos extremos dunha función á resolución de problemas de optimización
- Representar gráficas de funcións de tipo polinómico, racional, exponencial, logarítmico e trigonométricas, ou combinación delas, incluíndo como mínimo os seguintes estudos: dominio, puntos de corte, simetrías, monotonía, extremos, curvatura, inflexións e asíntotas
- Constatar se unha función cumpre ou non as hipóteses do teorema do Valor Medio e do teorema de Rolle nun determinado intervalo, sabendo obter os puntos cuxa existencia afirman nas súas teses
- Calcular límites de funcións aplicando a regra de L'Hôpital



NEWTON
Inglaterra, 1643-1727



LEIBNITZ
Alemaña, 1646-1716



L'HÔPITAL
Francia, 1661-1704

9. DERIVADA DUNHA FUNCIÓN

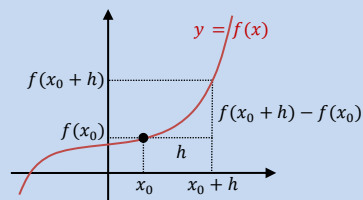
9.1. Definición de derivada dunha función nun punto. Interpretación xeométrica. Derivadas laterais

Derivada dunha función nun punto

Chámase **derivada dunha función** $f(x)$ **nun punto** (de abscisa) x_0 , ao seguinte límite, se é que existe e é finito:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

De ser así, dise que a función é **derivable** nese punto.



Notas: (1) Toma nota de que a derivada dunha función nun punto, se existe, é un número real.

(2) Facendo $x = x_0 + h$ obtemos outra forma de escribir a derivada: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Exemplo: Aplicando a definición, calculemos a derivada da función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ no punto $x_0 = 2$.

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-(2+h)} + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1-1-h}{1-h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h \cdot (1-h)} = 1.$$

$$\text{Ou ben: } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{1-x} + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1+1-x}{1-x}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(1-x) \cdot (x-2)} = \frac{-1}{(1-2)} = 1.$$

P1. Utilizando a definición de derivada, calcula $f'(-1)$ sendo $f(x) = 3x^2 - 1$.

P2. Aplicando a definición, intenta calcular a derivada da función $g(x) = \sqrt{x}$ no punto $x_0 = 0$.

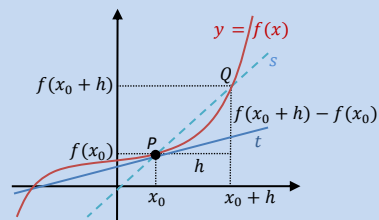
Interpretación xeométrica

Observa o debuxo que acompaña. Nel está representada a función no intervalo $[x_0, x_0 + h]$ e dúas rectas chamadas s e t que son, respectivamente, a recta secante á curva polos puntos de abscisa x_0 e $x_0 + h$, e a recta tanxente no punto de abscisa x_0 .

Recordando que a pendente dunha recta é a tanxente do ángulo que forma coa parte positiva do eixe OX , cúmprese que: $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = m_s$.

Pero, cando h tende a 0, o punto Q aproxímase a P , ou o que é o mesmo, a recta secante acaba converténdose na recta tanxente.

Daquela: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{s \rightarrow t} m_s = m_t$, podendo afirmar:



“A derivada dunha función nun punto é a pendente da recta tanxente á súa gráfica nese punto”

Derivadas laterais

Ao estar definida como un límite, para calcular a derivada nun punto pode ser necesario achar os límites laterais. Reciben o nome de derivadas laterais pola dereita e pola esquerda e nótanse como segue:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ e } f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Notas: (1) Na notación alternativa: $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

(2) Tal e como ocorre con calquera outro límite, a existencia da derivada dunha función nun punto equivale á existencia (finita) e coincidencia das derivadas laterais.

9.2. Ecuación da recta tanxente a unha función nun punto. Ecuación da normal

Seguramente recordes que para construír a ecuación dunha recta r no plano dispoñendo dun punto polo que pasa (x_0, y_0) e da súa pendente m utilizabas a fórmula $r \equiv y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, que recibe o nome de ecuación punto-pendente da recta r .

Agora ben, se queremos calcular a ecuación da recta tanxente a unha función f nun punto x_0 , como o punto de tanxencia pertence á gráfica da función entón $y_0 = f(x_0)$. Daquela, tendo presente que $m_t = f'(x_0)$ (interpretación xeométrica da derivada dunha función f nun punto x_0) a súa ecuación punto-pendente quedaría así:

$$t \equiv y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Así mesmo, tamén temos a posibilidade de calcular a ecuación da recta normal á función no mesmo punto, entendendo por esta, aquela recta perpendicular á tanxente que pasa polo mesmo punto de tanxencia.

Para facelo, basta con recordar que “as pendentes de dúas rectas perpendiculares son opostas e inversas” e escribir de novo a súa ecuación punto-pendente:

$$n \equiv y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Exemplo: Calculemos a ecuación da recta tanxente á curva $f(x) = x^3$ no punto $x_0 = 2$.

A ordenada do punto de tanxencia é $f(2) = 2^3 = 8$. Entón, o punto $P(2,8)$ é un punto da recta.

Aplicando a interpretación xeométrica de derivada podemos calcular a pendente:

$$m_t = f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 6h^2 + 12h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (h^2 + 6h + 12)}{h} = 12.$$

Finalmente, escribimos a ecuación punto-pendente da recta: $t \equiv y - 8 = 12 \cdot (x - 2)$.

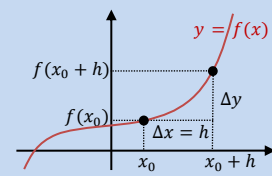
Sen ningún traballo adicional, tamén podemos escribir a da recta normal: $n \equiv y - 8 = \frac{-1}{12} \cdot (x - 2)$.

Nota: Máis adiante, cando coñezamos as fórmulas e regras de derivación, o exercicio será máis doado ao non teres que aplicar a definición de derivada para o cálculo da pendente.

P3. Calcula a ecuación das rectas tanxente e normal á gráfica da función $f(x) = 3x^2 - 1$ no punto $x_0 = -1$ (observa que a derivada desta función nese punto xa foi calculada nun exercicio previo).

9.3. Interpretación da derivada como razón de cambio: taxa de variación instantánea

Frecuentemente interesa coñecer o grao co que crece ou decrece unha función nun intervalo. Para iso, defínese **taxa de variación media** dunha función f nun intervalo $[x_0, x_0 + h]$, e désignase por $t_m[x_0, x_0 + h]$, ao cociente entre o incremento da variable dependente e o incremento da variable independente nese intervalo. É dicir: $t_m[x_0, x_0 + h] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$



Exemplo: Calculemos a taxa de variación media de $f(x) = x^2 - 1$ no intervalo $[4,6]$:

$$t_m[4,6] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{35 - 15}{2} = 10$$

P4. Calcula a taxa de variación media da función $f(x) = x$ no intervalo $[-1,1]$.

Dependendo do fenómeno que representa a función, a taxa de variación media recibe nomes particulares como: velocidade media, aceleración media ou taxa de crecemento medio dunha poboación.

P5. Calcula a velocidade media no segundo minuto de movemento dun móbil que se despraza segundo a función $s(t) = t^2 - 6t$, onde s representa o espazo en metros e t o tempo en segundos.

Porén, o que interesa moitas veces é o grao co que crece ou decrece a función nun punto.

Para iso defínese a **taxa de variación instantánea** dunha función f nun punto x_0 , como o límite (se é que existe) das taxas de variación medias nos intervalos $[x_0, x_0 + h]$, cando a súa lonxitude tende a cero (cando $h \rightarrow 0$). É dicir:

$t_i(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. O seu valor mide o ritmo ao que “crece” a función ao seu paso exactamente por ese punto (cantas unidades avanza a variable Y por cada unidade que avanza a variable X).

Exemplo: Achemos a taxa de variación instantánea da función $f(x) = x^2 - 1$ no punto $x_0 = 6$:

$$t_i(6) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h)-f(6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6+h)^2-1-35}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+12h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+12) = 12$$

É dicir: Ao pasar xusto por enriba do 6, a función está “crecendo” a un ritmo de 12 unidades na variable Y , por cada unidade que avanza a variable X .

P6. Acha a taxa de variación instantánea da función $f(x) = x^2 - 1$ no punto $x_1 = 5$.

Dependendo do fenómeno que represente a función, a taxa de variación instantánea recibe nomes como: velocidade instantánea, aceleración instantánea ou taxa de crecemento instantánea dunha poboación.

P7. Calcula a velocidade do móbil do exercicio P5 no instante $t_0 = 70$ segundos.

Obviamente, xa te darías conta de que **a taxa de variación instantánea é a famosa derivada**. Isto proporcionáanos outra interpretación dela, de carácter máis físico:

“A derivada dunha función nun punto é a taxa de variación instantánea da función nese punto”

9.4. Función derivada. Derivadas de orde superior. Derivada n-ésima

Sendo máis ambiciosos, en lugar de calcular a derivada dunha función nun punto concreto x_0 , podemos facelo en calquera punto x : Chámase **función derivada dunha función** f , e represéntase por f' , á **función** que fai corresponder a cada valor de x , a derivada de f nese punto x , se é que existe. É dicir: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Unha vez obtida a función derivada, podemos utilizala para achar a derivada en calquera punto que nos pidan.

Exemplo: Imos calcular a función derivada de $f(x) = 1 - x^2$ e aproveitaremos o resultado para achar a derivada da mesma función nos puntos $x_0 = 1$ e $x_1 = -7$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-(x+h)^2-(1-x^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2-2xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h-2x)}{h} = -2x.$$

Polo tanto, a función derivada é $f'(x) = -2x$.

Utilizámola agora para calcular $f'(1) = -2 \cdot 1 = -2$ e $f'(-7) = -2 \cdot (-7) = 14$.

A función derivada da función derivada de f chámase derivada segunda (represéntase por f'') e así sucesivamente f''' , $f^{(4)}$, $f^{(5)}$... ás que nos referiremos como **derivadas sucesivas da función** f .

Exemplo: Achemos as derivadas sucesivas ata a quinta orde da función $f(x) = 2x^3 + 1$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^3+1-(2x^3+1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2h^2+6xh+6x^2)}{h} = 6x^2.$$

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h)^2-6x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6h+12x)}{h} = 12x.$$

$$f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12(x+h)-12x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h}{h} = 12.$$

$$f^{(4)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'''(x+h)-f'''(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12-12}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Ás veces, á vista das derivadas sucesivas dunha función, é posible obter unha expresión que as representa a todas elas. Chámase **derivada n-ésima** da función. A partir dela podemos deducir a derivada de calquera orde.

Exemplo: A derivada n-ésima da función anterior é a seguinte: $f^{(n)}(x) = \begin{cases} 6x^2, & n = 1 \\ 12x, & n = 2 \\ 12, & n = 3 \\ 0, & n \geq 4 \end{cases}$

PS. Atopa a derivada n-ésima da función $y = \frac{1}{x}$.

9.5. Fórmulas e regras de derivación. Derivación logarítmica e en forma implícita

Derivadas das funcións elementais (fórmulas)

Ata agora estivemos calculando derivadas aplicando a definición, pero resulta moi laborioso e pouco operativo para calcular derivadas de funcións complicadas. É necesario deducir fórmulas que nos permitan calcular automaticamente derivadas, sen necesidade de recorrer ao xa famoso límite.

A continuación temos unha táboa, onde se resumen as fórmulas das derivadas das funcións elementais. Máis adiante (no boletín de exercicios) demostraremos aquelas que resultan máis interesantes.

TÁBOA DE DERIVADAS DAS FUNCIÓNS ELEMENTAIS			
Primitiva	Derivada	Primitiva	Derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$y = \cot x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$y = \sec x$	$y' = \sec x \cdot \tan x$	$y = \operatorname{cosec} x$	$y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$

Nota: Nesta primeira táboa, hai información redundante. Algunhas fórmulas non serían necesarias ao ser posible aplicar outras, realizando previamente unha simple transformación. Por exemplo, a fórmula da derivada da función raíz cadrada non sería necesaria, pois podería aplicarse a fórmula da derivada da función potencial con expoñente $\frac{1}{2}$. No entanto, co obxecto de evitar a realización de continuas transformacións como a exposta, interesa a súa inclusión porque aparecen con moita frecuencia.

P9. Efectúa as derivadas das seguintes funcións:

(a) $y = -3$ (b) $y = x^3$ (c) $y = 3^x$ (d) $y = \sqrt[5]{x}$ (e) $y = \sqrt{x^2}$ (f) $y = \log_2 x$

Derivadas das operacións con funcións (reglas)

As fórmulas anteriores, por si soas, non son de moita utilidade, pois con elas só podemos calcular as derivadas das funcións elementais. Porén, a maioría das funcións non son elementais, senón o resultado de operacións entre elas. Para derivalas, necesitamos saber como se comporta a derivada con esas operacións.

Na seguinte táboa expóñense as fórmulas das derivadas das operacións con funcións. Máis adiante (no boletín de exercicios) demostraremos algunhas delas.

TÁBOA DE DERIVADAS DAS OPERACIÓNS CON FUNCIÓNS	
Operación	Regra
Suma e resta	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
Produto por un número real	$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$
Produto	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Cociente	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
Composición (regra da cadea)	$\{g[f(x)]\}' = g'[f(x)] \cdot f'(x)$
Recíproca	$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$

P10. Efectúa as derivadas das seguintes funcións:

- | | | | |
|---|--|--|---|
| (a) $y = 5$ | (b) $y = x^{3/2}$ | (c) $y = -2x^{-3/2}$ | (d) $y = 8x^4 - 3x^2 + 1$ |
| (e) $y = \sqrt[5]{x} - 3\sqrt{x}$ | (f) $y = x^2 \cdot \ln x$ | (g) $y = \frac{3x^2-2}{5x+4}$ | (h) $y = (2 - x^2) \cdot (3x - 1)$ |
| (i) $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$ | (l) $y = 3^x \cdot \cos x$ | (m) $y = \frac{x^2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{2^x}$ | (n) $y = \cot 3x$ |
| (ñ) $y = \log_2(1 + x^2)$ | (o) $y = \ln(7 + 2^x)$ | (p) $y = \frac{5^x \cdot x^5}{\sqrt{5x}}$ | (q) $y = 2 \cdot (x^2 - 1)^{-3}$ |
| (r) $y = \frac{e^x + 3 \cdot e^{-x}}{5}$ | (s) $y = \frac{3}{2x-3}$ | (t) $y = \operatorname{cosec}^2 x^2$ | (u) $y = 4 \cdot \operatorname{tg} \sqrt{4x}$ |
| (v) $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{\ln \left(\frac{x^2-1}{x^3} \right)}$ | (x) $y = \operatorname{arc} \operatorname{cot} \frac{1-x^2}{\sqrt{3}}$ | (y) $y = \operatorname{arc} \operatorname{sec} \sqrt{x-1}$ | (z) $y = \sin \sqrt{\ln(1-3x)}$ |

Derivación logarítmica

Este método de derivación, consiste en derivar o logaritmo neperiano da función en vez da propia función. Ten máis aplicacións pero agora é necesario para calcular a derivada dunha función de tipo potencial-exponencial: $y = [f(x)]^{g(x)}$, onde $f(x)$ e $g(x)$ son funcións non constantes (observa que este tipo de funcións non aparece nas táboas).

Procédese do seguinte xeito:

1. Aplícanse logaritmos neperianos aos dous membros: $\ln y = g(x) \cdot \ln[f(x)]$
2. Derívanse os dous membros da igualdade anterior: $\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$
3. Despéxase a derivada: $y' = [f(x)]^{g(x)} \left\{ g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}$

Nota: En lugar do procedemento de derivación logarítmica, poderíamos memorizar a fórmula final do paso 3 (fórmula potencial-exponencial). De feito, noutros manuais podes atopala na táboa de fórmulas.

A razón de non facelo é porque o procedemento proposto non se esquece con tanta facilidade e resulta máis enriquecedor que a fórmula. Ademais, necesitarás aplicar unha técnica similar máis adiante, no cálculo de límites con indeterminacións exponenciais.

Exemplo: Apliquemos a derivación logarítmica para calcular a derivada da función $y = (x^3 + 2)^{x^2}$.

$$\ln y = x^2 \cdot \ln(x^3 + 2) \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln(x^3 + 2) + x^2 \cdot \frac{3x^2}{x^3 + 2} \Rightarrow y' = (x^3 + 2)^{x^2} \cdot \left\{ \ln[(x^3 + 2)^{2x}] + \frac{3x^4}{x^3 + 2} \right\}$$

P11. Acha a derivada da función $y = x^{\sin x}$

Derivación en forma implícita

Dise que unha función está definida en forma implícita cando a variable dependente non aparece despexada (explícita) na ecuación que relaciona as dúas variables.

Para achar a derivada dunha función en forma implícita non é necesario facela explícita. De feito, moitas veces non é posible. Basta con derivar os dous membros da ecuación **tendo presente que y é unha función** e, finalmente, se é posible, despexar y' .

Exemplo: Derivemos a función implícita na ecuación $x^2 + 4y + y^2 - 2y = 4$.

$$2x + 4y' + 2y \cdot y' - 2y' = 0 \Rightarrow y' \cdot (2 + 2y) = -2x \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2+2y} = \frac{-x}{1+y}$$

P12. Calcula a derivada da función implícita en $x^3 - y^2 + 20x - y - 1 = 0$, nos puntos de abscisa $x_0 = 1$.

9.6. Estudo da continuidade e derivabilidade dunha función

Recorda da unidade anterior que unha función f é **continua** nun punto x_0 cando $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nesta unidade, establecemos que f é **derivable** nun punto x_0 cando $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existe e é finito.

Pois ben, debes saber que a condición de derivabilidade é “máis forte” ca de continuidade:

Propiedade: f derivable en $x_0 \Rightarrow f$ continua en x_0

Demostración: Supoñamos que f é derivable en x_0 . Temos que comprobar que f é continua en x_0 . É dicir, que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, ou o que é o mesmo, que $\lim_{x \rightarrow x_0} \{f(x) - f(x_0)\} = 0$.

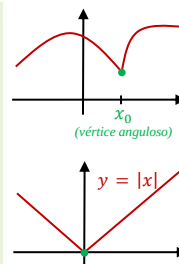
Multiplicando e dividindo por $x - x_0$ (podemos facelo pois está garantido que $x - x_0 \neq 0$, ao estar x aproximándose a x_0) temos que: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right]$

Aplicando que “o límite dun produto é igual ao produto dos límites” (propiedade estudada na unidade anterior): $\lim_{x \rightarrow x_0} \{f(x) - f(x_0)\} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$

Por hipótese, a función f é derivable en x_0 . Entón o $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe e é finito. Ademais, $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$. Xa que logo: $\lim_{x \rightarrow x_0} \{f(x) - f(x_0)\} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$.

Notas: (1) Como sabes, que unha función sexa continua nun punto, significa que a súa gráfica “non se rompe” nese punto. Pois ben, que unha función sexa derivable nun punto, ademais de ser continua (non romper), significa que se “pegue con suavidade” nese punto. É dicir, que a gráfica non forme un “vértice angular”, pois este feito implicaría rectas tanxentes distintas á dereita e á esquerda do punto, e polo tanto, a non existencia da derivada.

(2) O recíproco da propiedade anterior non se cumpre, como comprobaremos coa función valor absoluto, $y = |x|$. Veremos que é continua pero non derivable no punto 0 (observa na súa coñecida gráfica que “non se pega con suavidade” no 0).



Para o estudo da derivabilidade dunha función, debes saber que:

“As funcións elementais e as operacións entre elas son derivables no dominio da súa derivada”

Loxicamente, nos puntos que non son do dominio da derivada, a función non é derivable, non sendo preciso dicir máis nada.

Nota: A función derivada non é unha función abstracta calquera, senón que provén de facer un límite coa función primitiva. Este “contexto” xunto co contrarrecíproco da propiedade anterior, impoñen unha restrición do seu dominio máximo que nos obriga a quitarlle os puntos de descontinuidade da función orixinal.

Exemplos: (a) Se $f(x) = \frac{e^{x-2}}{x^2+1}$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Daquela, f é continua en $\mathbb{R}$.

Como $f'(x) = \frac{e^{x-2} \cdot (x-1)^2}{(x^2+1)^2}$, $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}$. Entón, f é derivable en $\mathbb{R}$.

(b) Se $g(x) = \frac{1-x^2}{2 \cdot (x-2)}$, $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{2\}$. Daquela, g é continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

Como $g'(x) = \frac{-x^2+4x-1}{2 \cdot (x-2)^2}$, $\text{Dom}(g') = \mathbb{R} - \{2\}$. Entón, g é derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

(c) Se $h(x) = \ln x$, $\text{Dom}(h) = (0, \infty)$. Daquela, h é continua en $(0, \infty)$.

Como $h'(x) = \frac{1}{x}$, o seu DM é $\mathbb{R} - \{0\}$, pero h só é derivable en $\text{Dom}(h') = (0, \infty)$.

(d) Se $l(x) = \sqrt{x-1}$, $\text{Dom}(l) = [1, \infty)$. Daquela, l é continua en $[1, \infty)$.

Como $l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $\text{Dom}(l') = (1, \infty)$. Entón, l é derivable en $(1, \infty)$.

(e) Se $m(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $\text{Dom}(m) = \mathbb{R}$. Daquela, m é continua en $\mathbb{R}$.

Como $m'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $\text{Dom}(m') = \mathbb{R} - \{0\}$. Entón m é derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

(f) Se $n(x) = x^2$, $x \in [3,5]$, o seu DM é $\mathbb{R}$, pero n só é continua en $\text{Dom}(n) = [3,5]$.

Como $n'(x) = 2x$, o seu DM é $\mathbb{R}$, pero n só é derivable en $\text{Dom}(n') = (3,5)$.

Notas: (1) As funcións polinómicas e racionais son infinitamente derivables en todo o seu dominio (dise que son funcións de clase infinito).

(2) Aínda que se contempla a posibilidade de incluír extremos de intervalos no dominio de continuidade dunha función (continuidade lateral), nunca se poden incluír no dominio de derivabilidade, pois non se definiu o concepto de derivabilidade lateral. De feito, sempre son puntos de descontinuidade da función.

P13. Analiza a derivabilidade das funcións:

$$(a) f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-9}$$

$$(b) g(x) = \ln(x-2)$$

$$(c) h(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x^2}$$

$$(d) l(x) = 5x, x \geq 0$$

Máis problemas xorden ao tratar con funcións máis artificiosas, como as **definidas a anacos**, pois:

“As funcións definidas a anacos son derivables no dominio da súa derivada, excepto acaso nos puntos fronteira”

Para decidir **esa excepción**, estudaremos **individualmente** analizando a **continuidade da derivada**. Ao seren puntos fronteira, utilizaremos os límites laterais: Se coinciden, outorgándolle o valor do límite como imaxe, a derivada será continua e afirmaremos que a función é derivable nese punto. Se non coinciden, a derivada terá unha descontinuidade esencial e diremos que a función non é derivable nese punto.

Exemplos: (a) Estudemos a derivabilidade da función $f(x) = |x|$.

En primeiro lugar estudamos a continuidade:

▪ En $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow f$ é continua pois $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, sendo 0 o único punto fronteira dos anacos.

▪ No $0 \rightarrow f$ pode ser ou non ser continua. Para sabelo, aplicamos a definición de continuidade:

$$\left. \begin{array}{l} (i) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left[\begin{array}{l} f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \\ f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0 \end{array} \right] = 0 \\ (ii) f(0) = 0 \\ (iii) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ é continua en } 0.$$

Resumo: f é continua en $\mathbb{R}$.

Estudemos agora a derivabilidade:

♦ En $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow f$ é derivable sendo $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

♦ No $0 \rightarrow f$ pode ser ou non derivable. Para sabelo, estudamos a continuidade da derivada:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \begin{cases} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \xRightarrow[\text{terior (2)}]{\text{Nota pos-}} \nexists f'(0) \Rightarrow f \text{ non é deriv. en } 0.$$

Resumo: f é derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, sendo $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

(b) Estudemos a derivabilidade da función $g(x) = \begin{cases} 2x^{-1}, & x < 1 \\ 3 - x^2, & x \geq 1 \end{cases}$.

En primeiro lugar estudamos a continuidade:

- En $\mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow g$ é continua, pois $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, sendo 1 o único punto fronteira.
- No $0 \rightarrow g$ non pode ser continua porque, ao non pertencer ao dominio, $\nexists g(0)$
- No $1 \rightarrow g$ pode ser ou non continua. Para sabelo, aplicamos a definición de continuidade:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \begin{cases} g(1^-) = 2 \cdot 1^{-1} = 2 \\ g(1^+) = 3 - 1^2 = 2 \end{cases} = 2 \\ \text{(ii)} g(1) = 2 \\ \text{(iii)} \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 = g(1) \end{array} \right\} \Rightarrow g \text{ é continua en } 1.$$

Resumo: A función g é continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Estudemos agora a derivabilidade:

♦ En $\mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow g$ é derivable sendo $g'(x) = \begin{cases} -2x^{-2} & \text{se } x < 1 \\ -2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

♦ No $0 \rightarrow g$ non pode ser derivable porque non é continua.

♦ No $1 \rightarrow g$ pode ser ou non derivable. Para sabelo, estudamos a continuidade da derivada:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g'(x) = \begin{cases} g'(1^-) = -2 \cdot 1^{-2} = -2 \\ g'(1^+) = -2 \cdot 1 = -2 \end{cases} = -2 \xRightarrow{\text{Nota (2)}} \exists g'(1) = -2 \Rightarrow g \text{ é derivable en } 1.$$

Resumo: A función g é derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, sendo $g'(x) = \begin{cases} -2x^{-2} & \text{se } x < 1 \\ -2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

P14. Analiza a derivabilidade de: (a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < -2 \\ -1, & -2 \leq x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x \leq 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \end{cases}$

Notas: (1) É habitual abreviar a **notación do límite lateral** dunha función así: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0^-)$.

(2) Que unha función sexa derivable nun punto significa que a súa derivada exista e sexa finita. Daquela, nos puntos fronteira das funcións definidas a anacos, deberíamos comprobar que as derivadas laterais existen, son finitas e iguais. Sen embargo, isto dá moito traballo e óptase por **estudar a continuidade da función e da derivada**, aínda que é unha condición máis forte que a propia derivabilidade. Isto significa que existen funcións que non teñen derivada continua nun punto, pero que si son derivables nese punto (pero son moi complexas e non aparecerán durante este curso).

(3) Observarás no seguinte exemplo que o **estudo da continuidade da función é necesario**:

É inmediato ver que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ non é continua no 1. Entón, non pode ser derivable.

Pero, se só estudamos a continuidade da derivada, $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \begin{cases} f'(1^-) = 2x|_{x=1} = 2 \\ f'(1^+) = 2|_{x=1} = 2 \end{cases} = 2$, creríamos erroneamente que a derivada é continua no 1 e, polo tanto, afirmariamos que é derivable no 1.

Loxicamente, se estudamos a existencia da derivada, vemos que non existe, pois non hai derivada lateral

$$\text{pola esquerda: } f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 - 2}{h} = \frac{-1}{0} \rightarrow \nexists.$$

CUESTIÓNS, EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Que nome máis xeral inclúe os conceptos de pendente da tanxente a unha curva nun punto, taxa de crecemento instantáneo dunha poboación e velocidade instantánea dun móbil?
2. Que é a derivada dunha función nun punto: Un número real ou unha función?
3. A que se lle chama **dominio de derivabilidade** dunha función? É certo que sempre está contido no dominio de continuidade da función?
4. Chámase **pendente dunha función nun punto, á pendente da recta tanxente** á súa gráfica nese punto.
 - (a) Cres que existe algunha función que teña a mesma pendente en todos os seus puntos?
 - (b) E algunha función cuxa pendente en cada punto sexa igual ao seu propio valor nese punto?
5. É posible que dúas funcións distintas teñan a mesma función derivada?
6. Que podes dicir da derivada dunha función nun punto no que a tanxente é paralela ao eixe de abscisas?
7. É certo que se $f'(x_0) = f'(x_1)$ entón a curva $y = f(x)$ ten a mesma recta tanxente en x_0 que en x_1 ?
8. Demostra a fórmula de derivada da función logarítmica: $\left[y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \right]$. A partir dela, demostra a fórmula da derivada da función logaritmo neperiano: $\left[y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \right]$.
9. Demostra a regra da derivada dunha suma.
10. Aplicando a regra da derivada dun cociente e as fórmulas das derivadas das funcións seno e coseno, deduce a fórmula da derivada da función tanxente.
11. Aplicando a fórmula da derivada da función potencial, deduce a fórmula da derivada da función raíz n-ésima.
12. Aplicando a fórmula da derivada da función coseno e a regra da función recíproca, deduce a fórmula da derivada da función arco coseno.
13. Definición de derivada dunha función nun punto. Cal é o seu significado xeométrico? Aplica a definición para calcular a derivada de $f(x) = \frac{5}{2x+3}$ no punto $x_0 = 1$. $-\frac{2}{5}$
14. Utilizando a definición calcula a función derivada de $f(x) = x^3 + x$ e aprobeítaa para achar a derivada nos puntos $x_0 = -1$ e $x_1 = 0$. Pescuda se esta curva pode ter tanxente horizontal nalgún dos seus puntos. $3x^2 + 1$; 4 ; 1 ; Non
15. A ecuación do espazo percorrido (metros) por un móbil en función do tempo (segundos) é $s(t) = 3t^2 - t + 1$. Calcula, utilizando a definición de derivada, a velocidade aos 3 segundos de iniciarse o movemento. 17 m/s
16. Que función crece máis no intervalo $[1,3]$: $f(x) = x^3$ ou $g(x) = x^2 + 3x$? E exactamente en $x_0 = 1$? f ; g
17. Calcula a taxa de variación media no intervalo $[-2,5]$ e a taxa de variación instantánea no punto $x_0 = 2$ da función $y = x^3 - x$. 18 ; 11

18. Calcula as rectas tanxente e normal á curva $y = x^2 - 1$ no punto de abscisa $x_0 = 2$.

$$t \equiv y - 3 = 4 \cdot (x - 2) ; n \equiv y - 3 = \frac{-1}{4} \cdot (x - 2)$$

19. Calcula a recta tanxente á curva $y = e^{x^2}$ no punto de abscisa $x_0 = 1$.

$$t \equiv y - e = 2e \cdot (x - 1)$$

20. Determina as rectas tanxentes á curva $x^2 + y^2 = 4$ nos puntos de abscisa 1.

$$t_1: y - \sqrt{3} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 1) ; t_2: y + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 1)$$

21. Determina un punto da curva $y = \ln(1 + x^2)$ no que a recta tanxente:

(a) Forme un ángulo de 45° co eixe de abscisas.

$$(1, \ln 2)$$

(b) Sexa paralela á recta $2x - y - 1 = 0$.

$$\nexists$$

22. Acha o valor de $f'(1)$, sendo $f(x) = \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{2^4 \sqrt{x}}$.

$$\frac{23}{24}$$

23. Calcula as derivadas das seguintes funcións, simplificando o resultado todo o posible:

$$(a) y = \frac{\cos(2x+1) \cdot [\cos^2(2x+1) - 3]}{6}$$

$$y' = \sin^3(2x + 1)$$

$$(b) y = 2^{\sin 2x} + \sin^2 2x$$

$$y' = 2 \cdot \cos 2x \cdot (2^{\sin 2x} \cdot \ln 2 + 2 \cdot \sin 2x)$$

24. Calcula as derivadas das seguintes funcións, simplificando o resultado todo o posible:

$$(a) y = \ln \sqrt{\cos(\arctg 2x)}$$

$$(b) y = \arctg \frac{1+x}{1-x} - \arctg x$$

$$(a) y' = \frac{-2x}{1+4x^2} \quad (b) y' = 0$$

25. Deriva as funcións: (a) $y = \ln^2(\arcsen x^3)^2$ (b) $y = \frac{\sin^2 5x}{x - \cos 5x}$

$$(a) y' = \frac{12x^2 \cdot \ln(\arcsen x^3)^2}{\sqrt{1-x^6} \cdot \arcsen x^3} \quad (b) y' = \frac{5 \cdot \sin 10x \cdot (x - \cos 5x) - \sin^2 5x \cdot (1 + 5 \cdot \sin 5x)}{(x - \cos 5x)^2}$$

26. Deriva as seguintes funcións: (a) $y = 2^{\sin \sqrt{x}}$ (b) $y = \cos^2(x^2 - x)^2$ (c) $y = \ln \sqrt{\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}}$

$$(a) y' = \frac{2^{\sin \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} \cdot \ln 2 \cdot \cos \sqrt{x}}{2x} \quad (b) y' = 2x \cdot (1 - 2x) \cdot (x - 1) \cdot \sin[2 \cdot (x^2 - x)^2] \quad (c) y' = -\sec 2x$$

27. Utilizando a derivación implícita, calcula $y''(2)$ na curva $x^2 y + 4y = 24$.

$$y''(2) = 3/4$$

28. Utilizando as técnicas da derivación implícita e logarítmica, acha as derivadas das seguintes funcións nos puntos que se indican: (a) $y = x^{\ln x}$ en $x_0 = e$ (b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ en $x_0 = 1$

$$(a) y'(e) = 2 \quad (b) y'(1) = 0$$

29. Sendo $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \cos x^2$, calcula $(g \circ f)'(x)$ e $(f \circ g)'(x)$.

$$(g \circ f)'(x) = -4x \cdot (x^2 + 1) \cdot \sin(x^2 + 1)^2 ; (f \circ g)'(x) = -2x \cdot \sin(2x^2)$$

30. Acha a derivada n-ésima das funcións $y = a \cdot e^{ax-1}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$y^{(n)} = a^{n+1} \cdot e^{ax-1}$$

31. Cal é o dominio de derivabilidade da función $y = \sqrt{x}$?

$$\text{Dom}(y') = (0, \infty)$$

32. En que puntos é derivable a función $y = 5 \cdot \log(1 - x^2)$?

$$\text{En } (-1, 1)$$

33. Estuda a derivabilidade de $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } -5 \leq x < -1 \\ -x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x}{x-3} & \text{se } 1 < x \end{cases}$. Derivable en $(-5, \infty) - \{-1, 1, 3\}$
34. Acha os valores de a e b para que a curva $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{se } x \leq 2 \\ ax^2 + b & \text{se } x > 2 \end{cases}$ teña derivada en $x_0 = 2$. Con eses valores, escribe a súa función derivada. $a = \frac{1}{2}, b = 1$; $y' = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se } x \leq 2 \\ x & \text{se } 2 < x \end{cases}$
35. Dada a función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-1} & \text{se } x \leq 1 \\ \lambda x^2 - \mu x & \text{se } x > 1 \end{cases}$, atopa os valores de λ e μ , sabendo que $f(x)$ é derivable no punto fronteira dos anacos. Para os valores achados, di en que puntos a función non é derivable. $\lambda = 0$ e $\mu = -1$; Non é derivable en $(-\infty, 1/2]$
36. (a) Di que relación debe existir entre a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in (0, e] \\ ax + b, & x \in (e, \infty) \end{cases}$ sexa contínua. $a \cdot e + b = 1$; $a = \frac{1}{e}$ e $b = 0$
- (b) ¿E cales deben ser os seus valores para que sexa derivable?
37. Estuda a derivabilidade de $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{se } x \leq 2 \\ a - x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ segundo os valores de a . $[a = -8 \Rightarrow f \text{ é derivable en } \mathbb{R}$
 $a \neq -8 \Rightarrow f \text{ é derivable en } (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
38. Acha $f'(x)$ sendo $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Existe $f''(0)$? $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$; Non
39. A función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ ax^2 + \sin(bx) + c & \text{se } x < 0 \end{cases}$ é dúas veces derivable. Calcula a , b e c . $a = -1, b = 0$ e $c = 1$

10. APLICACIÓNS DA DERIVADA

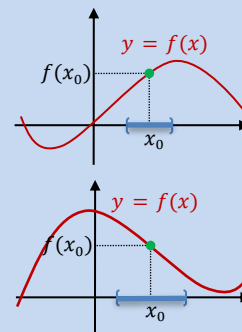
10.1. Monotonía dunha función: crecemento e decrecemento

Diremos que unha función f é **monótona crecente** nun punto x_0 , cando podemos encontrar un entorno del, no que a súa imaxe é maior ou igual que a dos puntos do entorno que están a súa esquerda, e menor ou igual que a dos que están á dereita.

É dicir: $\exists E(x_0)$ tal que $\forall x \in E(x_0)$ cúmprese que $\begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \end{cases}$.

Diremos que f é **monótona decrecente** nun punto x_0 , cando podemos encontrar un entorno del, no que a súa imaxe é menor ou igual que a dos puntos do entorno que están a súa esquerda, e maior ou igual que a dos que están a súa dereita.

É dicir: $\exists E(x_0)$ tal que $\forall x \in E(x_0)$ cúmprese que $\begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \end{cases}$.



Notas: (1) No caso de que os signos das desigualdades sexan estritos, a función dise estritamente crecente ou decrecente, respectivamente.

(2) Observa que unha función constante pode considerarse crecente e decrecente simultaneamente (aínda que non estritamente).

Exemplo: $f(x) = x^2$ é crecente no punto $x_0 = 1$, pois existe un entorno do 1, por exemplo (0,2) no que se cumpra a definición. En cambio, é decrecente en $x_0 = -1$ (olla o Anexo).

En xeral, para saber se unha función é monótona (crecente ou decrecente), hai que comprobar se se cumpre algunha das definicións anteriores. Pero se a función é derivable no punto (algo moi frecuente), podemos facer uso da seguinte propiedade, que denominaremos **criterio da monotonía**:

(a) $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crecente en x_0 . (b) $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrecente en x_0 .

Nota: Este criterio é moi intuitivo se pensas na interpretación física da derivada (taxa de variación instantánea), pero a súa demostración formal, na que se utiliza a definición de derivada, non a faremos.

Exemplos: (a) Estudemos a monotonía da función $f(x) = x^3 - 3x$ nos puntos 0 e 2.

Achamos a función derivada, $f'(x) = 3x^2 - 3$ e pescudamos o seu signo nos citados puntos:

$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0 \Rightarrow f$ é (estritamente) decrecente no punto 0.

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0 \Rightarrow f$ é (estritamente) crecente no punto 2.

(b) Sexamos máis ambiciosos e estudemos agora a monotonía da función anterior en todo o seu dominio. Isto implica resolver as inecuacións $3x^2 - 3 > 0$ e $3x^2 - 3 < 0$, para determinar os puntos onde a función é crecente e decrecente, respectivamente.

Para iso, achamos os seus valores fronteira (derivada nula). Neste caso: $3x^2 - 3 = 0$; $x = \pm 1$.

Estes valores fronteira son os posibles cambios de signo da derivada e con eles determinamos os intervalos onde o signo da derivada é constante: $-\infty \longleftrightarrow -1 \longleftrightarrow 1 \longleftrightarrow \infty$.

Substituíndo un punto de cadanseu intervalo **na función derivada** obtemos o seu signo en cada un deles: $f'(-2) = 9 > 0$; $f'(0) = -3 < 0$; $f'(2) = 9 > 0$.

Finalmente expresamos o resultado do estudo: $-\infty \xrightarrow[f'>0]{f \text{ crec.}} -1 \xrightarrow[f'<0]{f \text{ decrec.}} 1 \xrightarrow[f'>0]{f \text{ crec.}} \infty$

Nota: Para establecer os intervalos é necesario coñecer o dominio da función derivada. Neste exemplo, $\text{Dom}(f') = (-\infty, \infty)$ por seren f e f' funcións polinómicas. Se o dominio fose distinto habería que actuar en consecuencia, como veremos na práctica.

P1. Determina os intervalos de crecemento e decrecemento da función $y = x^2 - 4$.

Observa que se $f'(x_0) = 0$, o criterio da monotonía non decide. Neste caso, pode suceder "de todo", como o poñen de manifesto as funcións $y = x^3$, $y = -x^3$ e $y = x^2$. É inmediato comprobar que nos tres casos $f'(0) = 0$. Porén, nese mesmo punto, a primeira función é crecente, a segunda é decrecente e a terceira, ningunha das dúas cousas (olla o Anexo).

10.2. Extremos relativos e absolutos

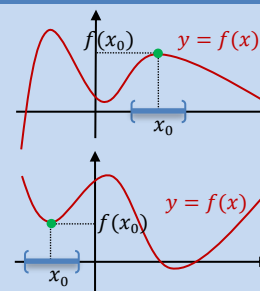
Extremos relativos

Diremos que unha función f presenta un **máximo relativo** (ou local) nun punto do dominio x_0 , cando podemos encontrar un entorno del no que a súa imaxe é maior ca dos demais puntos do entorno. É dicir:

$$x_0 \text{ máximo relativo de } f \Leftrightarrow \exists E(x_0) \text{ tal que } f(x) \leq f(x_0), \forall x \in E(x_0).$$

Diremos que unha función f presenta un **mínimo relativo** (ou local) nun punto do dominio x_0 , cando podemos encontrar un entorno del no que a súa imaxe é menor ca dos demais puntos do entorno. É dicir:

$$x_0 \text{ mínimo relativo de } f \Leftrightarrow \exists E(x_0) \text{ tal que } f(x) \geq f(x_0), \forall x \in E(x_0).$$



Exemplo: $f(x) = x^2$ ten un mínimo relativo (e absoluto) no punto $x_0 = 0$, pois podemos atopar un entorno do 0, por exemplo $(-1, 1)$ no que a súa imaxe é menor ca dos demais puntos do entorno. En realidade, ocorre en calquera entorno, pois $f(x) = x^2 \geq 0 = f(0), \forall x \in \mathbb{R}$ (olla o Anexo).

Nota: (1) Observa que unha función non é estritamente crecente nin decrecente nun extremo. Precisamente, os extremos son os puntos onde a función cambia de monotonía.

(2) Nunha función constante, todos os seus puntos son máximos e mínimos, simultaneamente.

En xeral, a busca e estudo dos extremos relativos dunha función (máximos e mínimos) é unha tarefa complicada, pero se a función é derivable no punto, podemos utilizar o resultado seguinte, que se chama **condición necesaria de extremo**:

Se f presenta un extremo relativo no punto x_0 entón $f'(x_0) = 0$ (tanxente paralela ao eixe OX).

Demostración: f ten extremo en $x_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ non é estr. crecente en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 \\ f \text{ non é estr. decrecente en } x_0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} f'(x_0) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$

(*) Nestes pasos aplícase a propiedade anterior (criterio da monotonía).

Nota: Esta propiedade afirma que $f'(x_0) = 0$ é unha condición **necesaria** pero **non suficiente** para que f posúa un extremo no punto x_0 , como o proba a función $f(x) = x^3$, que ten derivada nula no punto $x_0 = 0$, sen que presente extremo nese punto (olla o Anexo).

Os puntos do dominio da función que cumpren esa condición, $f' = 0$, chámanse **puntos singulares (PS)**; xunto con aqueles nos que $\nexists f'$ (neles non podemos comprobar se se cumpre ou non tal condición), son os **candidatos a extremos** da función e reciben o nome de **puntos críticos (PC)**.

P2. Encontra os puntos críticos das funcións: (a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$ (b) $y = |x|$

A continuación veremos dúas formas de pescudar se un punto crítico é un extremo e, en caso afirmativo, como distinguir se se trata dun máximo ou dun mínimo.

1. Estudando a monotonía da función nas proximidades do punto.

Se a función pasa de ser decrecente (na esquerda do punto) a crecente (na dereita do punto), entón podemos afirmar que é un extremo relativo, e que, neste caso en particular, se trata dun mínimo.

Se a función pasa de ser crecente a decrecente, entón podemos afirmar que é un extremo relativo, e que, neste caso en particular, se trata dun máximo.

P3. Pescuda se os puntos críticos do exercicio anterior son extremos e, en caso afirmativo, di de que tipo.

2. Calculando o signo da derivada segunda da función nese punto e aplicando a seguinte propiedade, chamada **condición suficiente de extremo**:

(a) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ presenta un mínimo relativo en x_0 .

(b) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ presenta un máximo relativo en x_0 .

Demostración: Só demostraremos o apartado (a), pois a do apartado (b) é idéntica e queda como exercicio.

$f'(x_0) = 0$ e $(f')'(x_0) > 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ e f' é crecente en $x_0 \Rightarrow f'$ pasa de ser negativa (á esquerda de x_0) a positiva (á dereita de x_0) $\Rightarrow f$ pasa de ser decrecente (á esquerda de x_0) a crecente (á dereita de x_0) $\Rightarrow f$ presenta un mínimo relativo no punto x_0 .

Nota: Ten en conta que esta propiedade só se pode aplicar cando a función é dúas veces derivable en x_0 .

P4. Resolve o exercicio anterior, pero agora utilizando este segundo método.

Observa que se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, a condición suficiente de extremo non decide. Neste caso, pode suceder "de todo", como o poñen de manifesto as funcións $y = x^4$, $y = -x^4$ e $y = x^3$. É inmediato comprobar que nos tres casos $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 0$. Porén, a primeira función posúe un mínimo nese mesmo punto, a segunda posúe un máximo e a terceira ningunha das dúas cousas (olla o Anexo).

Neste caso, continuaríamos estudando as derivadas sucesivas ata encontrar a primeira que sexa distinta de cero. Se esta é de orde impar, a función é monótona nese punto (crecente ou decrecente, dependendo do signo). Se é de orde par, a función posúe un extremo nese punto (máximo ou mínimo, dependendo do signo).

Velaquí un cadro-resumo do estudo da monotonía e extremos por esta segunda vía:

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ é crecente en x_0

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ é de crecente en x_0

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ presenta un mínimo relativo en } x_0 \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ presenta un máximo relativo en } x_0 \\ f''(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ é crecente en } x_0 \\ f'''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ é de crecente en } x_0 \\ f'''(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f^{(4)}(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ presenta un mínimo relativo en } x_0 \\ f^{(4)}(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ presenta un máximo relativo en } x_0 \\ f^{(4)}(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

P5. Acha os extremos das funcións:

(a) $y = x^7$

(b) $y = (x + 1)^4$

Extremos absolutos

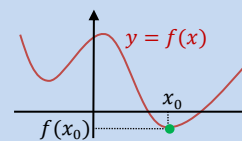
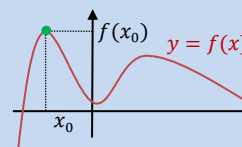
Diremos que unha función f alcanza en x_0 un **máximo absoluto** (ou global) do intervalo $[a, b]$, cando a súa imaxe é maior ou igual ca dos demais puntos de $[a, b]$.

É dicir: x_0 máximo absoluto de f en $[a, b] \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0), \forall x \in [a, b]$.

Diremos que unha función f alcanza en x_0 un **mínimo absoluto** (ou global) do intervalo $[a, b]$, cando a súa imaxe é menor ou igual ca dos demais puntos de $[a, b]$.

É dicir: x_0 mínimo absoluto de f en $[a, b] \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0), \forall x \in [a, b]$.

En xeral, non se pode garantir a existencia de máximos e mínimos absolutos en calquera subconxunto do dominio da función, pero tratándose dunha función continua nun intervalo $[a, b]$, si está garantida polo teorema de Weierstrass.



Para atopalos, basta con achar os puntos críticos da función no intervalo $[a, b]$ e comparar as súas imaxes (ordenadas). A maior ordenada corresponde ao máximo absoluto e a menor, ao mínimo absoluto.

Nota: Ao considerar a función definida só no intervalo pechado, sempre debes incluír os seus extremos na lista de puntos críticos, pois neles a función nunca é derivable.

Exemplo: Achamos os extremos absolutos de $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$.
 $f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ anúlase en $x = 1$ e non existe en $x = 0$. Daquela, comparamos os valores de $f(1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(-1) = -5$ e $f(2) \approx -0'76$.
 Á vista dos resultados, o máximo absoluto é $M_a(0, 0)$ e o mínimo absoluto é $m_a(-1, -5)$.

P6. Acha os extremos absolutos de $f(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + 1)$ no intervalo $[1, 4]$.

Se o intervalo é aberto (finito ou infinito) non está garantida a existencia de extremos absolutos. Nese caso, na lista de imaxes a comparar, se non existen $f(a)$ e/ou $f(b)$ substituiranse por $f(a^+)$ e/ou $f(b^-)$ (cando $a = -\infty$ e/ou $b = \infty$ substituiranse por $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e/ou $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$). Se o maior (menor) de todos os valores é algún destes límites, non existe máximo absoluto (mínimo absoluto). Obviamente, de non ser así, o máximo (mínimo) absoluto sería o punto crítico no que se alcanza a maior (menor) ordenada.

P7. Acha os extremos absolutos de $f(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + 1)$ no intervalo $[1, 4]$.

P8. Acha os extremos absolutos de $f(x) = e^x - x$.

Nota: Se unha función continua só ten un extremo relativo nun determinado intervalo, entón podemos afirmar que tamén é absoluto nese intervalo. Pensa por que ocorre isto.

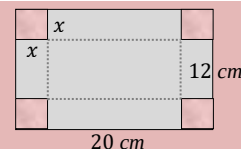
10.3. Problemas de optimización

Son problemas moi frecuentes en todas as ciencias. Neles trátase de encontrar a mellor solución (optimizar) de entre as moitas que cumpren unhas determinadas condicións impostas, o que significa de xeito máis matemático, achar o máximo ou mínimo absoluto dunha función.

O procedemento a seguir para resolver este tipo de problemas consta de catro pasos, que a continuación se explican, acompañados paralelamente á dereita, pola resolución do seguinte problema:

“De todas as parellas de números que suman 50, encontra aquela que ten maior produto”		
1.	Constrúese a función obxectivo que representa a magnitude que se quere optimizar (en xeral, con máis dunha variable).	$p(x, y) = x \cdot y$
2.	Relaciónanse as variables entre si, a fin de conseguir expresar a función obxectivo cunha soa variable (se é que hai máis dunha) e determínase o seu dominio.	$x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$ $p(x) = x \cdot (50 - x)$; $D = (-\infty, \infty)$
3.	Áchase o extremo absoluto desexado (máximo ou mínimo) da función obxectivo.	$p'(x) = 50 - 2x$; $50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25$ (punto crítico) $p''(x) = -2 < 0 \Rightarrow x = 25$ é un máximo relativo de p Como $p(x)$ é continua en $\mathbb{R}$ entón $x = 25$ tamén é máximo absoluto
4.	Interprétanse os resultados obtidos, comprobando se corresponden coa realidade do problema e contéstase explicitamente á pregunta realizada.	Os números buscados son $x = 25$ e $y = 25$

P9. Cunha cartolina rectangular de 20 cm de largo e 12 cm de ancho, quero facer unha caixa, recortando nos catro vértices un cadrado de lado x (observa a figura). Canto debe medir x para que a capacidade da caixa sexa máxima?



P10. Acha o punto da recta $2x - y + 1 = 0$ que está a menor distancia de $P(7, 5)$.

P11. Un arame de 10 metros de lonxitude divídese en dous anacos, cos que se fai un cadrado e unha circunferencia. Calcula a lonxitude de cada cacho para que a suma das áreas sexa mínima.

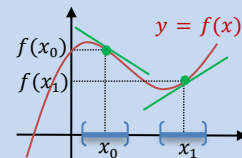
10.4. Curvatura dunha función: concavidade e convexidade

Diremos que unha función f ten curvatura **cóncava** nun punto x_0 , cando existe un entorno del, no que a recta tanxente en x_0 queda por enriba da gráfica da función. É dicir:

$$\exists E(x_0) \text{ tal que } f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) > f(x), \forall x \in E(x_0), x \neq x_0.$$

Diremos que unha función f ten curvatura **convexa** nun punto x_1 , cando existe un entorno del, no que a recta tanxente en x_1 queda por debaixo da gráfica da función. É dicir:

$$\exists E(x_1) \text{ tal que } f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1) < f(x), \forall x \in E(x_1), x \neq x_1.$$



Nota: Recorda que a ecuación da recta tanxente a unha curva $y = f(x)$ nun punto x_0 é $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Daquela $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Exemplo: $f(x) = x^2$ ten curvatura convexa no punto $x_0 = 1$, pois existe un entorno del, por exemplo $(0,2)$ no que se cumpre a definición. En realidade é convexa en todos os puntos (olla o Anexo).

En xeral, para estudar a curvatura dunha función, hai que aplicar as definicións anteriores. Pero se a función é dúas veces derivable no punto (algo moi frecuente), podemos usar a seguinte propiedade, que se chama **criterio da curvatura**:

$$(a) f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ é convexa en } x_0.$$

$$(b) f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ é cóncava en } x_0.$$

Nota: Este criterio é moi intuitivo (pensa que a derivada segunda, é a derivada primeira da derivada primeira), pero non faremos a súa demostración formal.

Exemplo: Estudemos a curvatura da función $y = x^3 - 6x^2 + 12$ nos puntos $x_0 = 1$ e $x_1 = 6$.

Achamos a función derivada segunda e achamos o seu signo nos citados puntos:

$$f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow f \text{ é cóncava no punto } 1 \\ f''(6) = 6 \cdot 6 - 12 = 24 > 0 \Rightarrow f \text{ é convexa no punto } 6 \end{cases}$$

Exemplo: Sexamos agora máis ambiciosos e estudemos a curvatura da función anterior en todo o seu dominio.

Teremos que examinar cando a segunda derivada é positiva e cando é negativa. Isto implica resolver as inecuacións $6x - 12 > 0$ e $6x - 12 < 0$ para determinar os puntos onde a función é convexa e cóncava, respectivamente. Resolvamos as dúas de xeito simultáneo:

Para iso, achamos o(s) valor(es) fronteira (derivada segunda nula): $6x - 12 = 0$; $x = 2$.

Estes valores fronteira son os posibles cambios de signo da segunda derivada e con eles, deseñamos os intervalos onde o signo da segunda derivada é constante: $-\infty \longleftarrow 2 \longrightarrow \infty$

Substituíndo un punto de cadanseu intervalo na función derivada segunda, obtemos o seu signo en cada intervalo: $f''(0) = -12 < 0$; $f''(3) = 6 > 0$.

Finalmente expresamos o resultado do estudo: $-\infty \xleftarrow[f'' < 0]{f \text{ cóncava}} 2 \xrightarrow[f'' > 0]{f \text{ convexa}} \infty$

Nota: Ao igual que no estudo da monotonía, é fundamental coñecer o dominio da función derivada segunda para deseñar o esquema de intervalos. Neste exemplo, $\text{Dom}(f'') = (-\infty, \infty)$ por ser f'' unha función polinómica. Se o dominio fose distinto habería que actuar en consecuencia, como veremos na práctica.

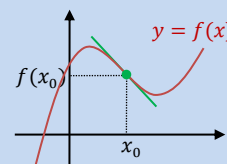
P12. Estuda a curvatura da función $y = (x^2 - 3x + 2) \cdot e^x$ en todo o seu dominio.

Observa que se $f''(x_0) = 0$, o criterio da curvatura non decide. Neste caso, pode suceder "de todo", como o poñen de manifesto as funcións $y = x^4$, $y = -x^4$ e $y = x^3$. É inmediato comprobar que nos tres casos $f''(0) = 0$. Porén, nese mesmo punto, a primeira función é convexa, a segunda é cóncava e a terceira, ningunha das dúas cousas (olla o Anexo).

10.5. Puntos de inflexión

Diremos que unha función f presenta un **punto de inflexión** nun punto de continuidade x_0 , cando a función cambia de curvatura ao pasar por el. É dicir, que pasa de ser cóncava a convexa (inflexión cóncavo-convexo) ou de convexa a cóncava (inflexión convexo-cóncavo).

Daquela, a función non é cóncava nin convexa nun punto de inflexión; de feito, a recta tanxente (se existe) atravesa a súa gráfica.



Exemplo: $f(x) = x^3$ ten un punto de inflexión cóncavo-convexo en $x_0 = 0$ (olla o Anexo).

En xeral, a busca e estudo dos puntos de inflexión é unha tarefa complicada. Pero se a función é dúas veces derivable no punto, podemos aplicar a seguinte propiedade, que denominaremos **condición necesaria de punto de inflexión**:

Se f presenta un punto de inflexión en x_0 entón $f''(x_0) = 0$.

Demostración: f presenta inflexión en $x_0 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ non é convexa en } x_0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0 \\ f \text{ non é cóncava en } x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x_0) = 0.$

(*) Nestes pasos aplícase a propiedade anterior (criterio da curvatura).

Nota: Esta propiedade afirma que $f''(x_0) = 0$ é unha condición **necesaria** pero **non suficiente** para que f posúa unha inflexión no punto x_0 , como o demostra a función $f(x) = x^4$ que ten derivada segunda nula no punto $x_0 = 0$, sen que presente inflexión nese punto (olla o Anexo).

Os puntos do dominio de continuidade que cumpren esa condición, $f'' = 0$, xunto con aqueles nos que $\nexists f''$ (pois neles non podemos comprobar se se cumpre ou non tal condición) son os **candidatos a puntos de inflexión (CI)** da función.

P13. Atopa os candidatos a puntos de inflexión da función $y = 2x^4 - 3x^2$

A continuación veremos dúas formas de pescudar se unha posible inflexión, a é en realidade.

1. Estudando a curvatura da función nas proximidades do punto.

Se a función pasa de ser convexa (na esquerda do punto) a cóncava (na dereita do punto), entón podemos afirmar que, efectivamente é un punto de inflexión, que neste caso, denominaremos convexo-cóncavo por razóns obvias.

Se a función pasa de ser cóncava a convexa, entón podemos afirmar que, efectivamente é un punto de inflexión, que denominaremos cóncavo-convexo.

P14. Acha os puntos de inflexión da función do exercicio anterior, estudando a curvatura nas proximidades.

2. Calculando o signo da derivada terceira da función nese punto e aplicando o seguinte propiedade, que denominaremos **condición suficiente de inflexión**:

(a) Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) > 0$ entón f presenta un punto de inflexión cóncavo-convexo en x_0 .

(b) Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) < 0$ entón f presenta un punto de inflexión convexo-cóncavo en x_0 .

Demostración: Só demostraremos o apartado (a), pois a do apartado (b) é idéntica e queda como exercicio.

$f''(x_0) = 0$ e $(f'')'(x_0) > 0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$ e f'' é crecente en $x_0 \Rightarrow f''$ pasa de ser negativa (á esquerda de x_0) a positiva (á dereita de x_0) $\Rightarrow f$ pasa de ser cóncava (á esquerda de x_0) a convexa (á dereita de x_0) $\Rightarrow f$ presenta un punto de inflexión cóncavo-convexo en x_0 .

Nota: Ten en conta que esta propiedade só se pode aplicar cando a función é tres veces derivable en x_0 .

P15. Acha as inflexións da función do exercicio anterior, utilizando a condición suficiente.

Observa que se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) = 0$, a condición suficiente de punto de inflexión non decide. Neste caso, pode suceder "de todo", como o evidencian as seguintes funcións $y = x^5$, $y = -x^5$ e $y = x^4$. É inmediato comprobar que

nos tres casos $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = 0$. Porén, a primeira función posúe un punto de inflexión cóncavo-convexo nese mesmo punto, a segunda, un punto de inflexión convexo-cóncavo e a terceira, ningunha das dúas cousas (olla o Anexo). Neste caso, continuaríamos estudando as derivadas sucesivas ata encontrar a primeira que sexa distinta de cero. Se esta é de orde par a función é convexa ou cóncava dependendo de que o signo desta sexa positivo ou negativo. Se é de orde impar, a función posúe un punto de inflexión nese punto (convexo-cóncavo ou cóncavo-convexo, dependendo do signo).

Finalizamos cun cadro resumo do estudo da curvatura e puntos de inflexión por esta segunda vía:

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ é convexa en } x_0$$

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ é cóncava en } x_0$$

$$f''(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ presenta inflexión cóncavo-convexo en } x_0 \\ f'''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ presenta inflexión convexo-cóncavo en } x_0 \\ f'''(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f^{(4)}(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ é convexa en } x_0 \\ f^{(4)}(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ é cóncava en } x_0 \\ f^{(4)}(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f^{(5)}(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ presenta inflexión cóncavo-convexo en } x_0 \\ f^{(5)}(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ presenta inflexión convexo-cóncavo en } x_0 \\ f^{(5)}(x_0) = 0 \Rightarrow \dots \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Nota: Na exposición teórica deste epígrafe diferenciamos dous tipos de puntos de inflexión para poñer de manifesto a analogía existente co estudo dos extremos. No entanto, ao non ter transcendencia nos exercicios e problemas, non faremos esa distinción na práctica.

P16. Acha os puntos de inflexión das funcións: (a) $y = x^6$ (b) $y = (3 - x)^5$

10.6. Teoremas de derivabilidade (Rolle e Valor Medio)

Chámanse así porque en ambos figura a hipótese de que a función sexa derivable nun intervalo aberto (e continua no pechado), aínda que o primeiro deles conta cunha hipótese máis. O teorema do Valor Medio está considerado como un dos resultados máis profundos sobre derivadas. Nel demóstrase un feito moi intuitivo xeometricamente, como veremos de seguido na súa interpretación xeométrica. É unha xeneralización do teorema de Rolle que o precede e do que necesita para a súa demostración.

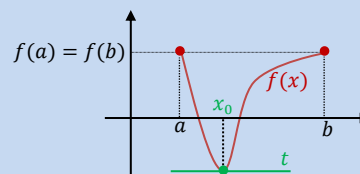
Teorema de Rolle

Enunciado:

Se unha función continua nun intervalo pechado, derivable no mesmo intervalo aberto e ten a mesma imaxe nos seus extremos, entón existe algún punto interior do intervalo no que a súa derivada é cero. É dicir:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ f \text{ derivable en } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$$

Interpretación xeométrica



Se un anaco de curva de trazo continuo e suave ten os seus extremos á mesma altura, entón necesariamente, a recta tanxente é horizontal nalgún dos seus puntos.

Demostración:

Ao ser continua, f alcanza máximo e mínimo absolutos en $[a, b]$ (teorema de Weierstrass). Distingamos tres casos:

1. Que f alcance o máximo nun punto x_0 de (a, b) : Neste caso, $f'(x_0) = 0$ (condición necesaria de extremo).
2. Que f alcance o mínimo nun punto x_0 de (a, b) : Igualmente neste caso, $f'(x_0) = 0$.
3. Que ningún dos valores máximo e mínimo pertencen ao intervalo (a, b) : Neste suposto, alcánzanse nos extremos do intervalo. Como por hipótese $f(a) = f(b)$, entón a función é constante en $[a, b]$, polo que a derivada é nula en todos os puntos do intervalo (a, b) .

Xa que logo, en calquera caso existe polo menos un punto do intervalo (a, b) no que a derivada é nula.

Exemplo: A función $y = x^3 - 4x + 4$ cumpre as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[0,2]$ por tratarse dunha función polinómica (continua e derivable en todo $\mathbb{R}$) e ser $f(0) = 4 = f(2)$. Para calcular o punto x_0 (polo menos existe un, segundo afirma o teorema de Rolle), procédese igualando a derivada a cero:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ Efectivamente, } x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,15 \in (0,2).$$

P17. Explica por que $y = \cos x$ cumpre as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[0,2\pi]$ e determina un punto no que se cumpra a tese.

Como corolario deste teorema, observa a relación existente entre as raíces dunha función e da súa derivada:

- Entre **dúas raíces dunha función** derivable, debe existir, polo menos, **unha da súa derivada**.

E como consecuencia, se a derivada non ten raíces nun intervalo, a función pode ter, como moito, unha.

P18. Demostra o anterior corolario do teorema de Rolle.

Teorema do Valor Medio do Cálculo Diferencial (de Lagrange ou dos Incrementos Finitos)

Enunciado:	Interpretación xeométrica
Sexa f unha función continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b). Entón existe algún punto x_0 no interior do intervalo no que a súa derivada vale $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. É dicir: $\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ f \text{ derivable en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	
Nun anaco de curva de trazo continuo e suave ten que existir, necesariamente, algún punto no que a recta tanxente sexa paralela á corda que une os extremos da citada curva.	
Demostración: Construímos a función $h(x) = (b-a) \cdot f(x) - [f(b) - f(a)] \cdot x$ que é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) por ser resultado de operar funcións continuas en $[a, b]$ e derivables en (a, b). Ademais $h(a) = b \cdot f(a) - a \cdot f(b) = h(b)$. Aplicándolle o teorema de Rolle a esta función h, podemos afirmar que: $\exists x_0 \in (a, b) / h'(x_0) = 0$. Pero $h'(x) = (b-a) \cdot f'(x) - [f(b) - f(a)] \Rightarrow h'(x_0) = (b-a) \cdot f'(x_0) - [f(b) - f(a)]$. Xa que logo: $0 = (b-a) \cdot f'(x_0) - [f(b) - f(a)]$. Ou o que é o mesmo: $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.	

Exemplo: A función $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+1)$ cumpre as hipóteses do teorema dos Incrementos Finitos en $[0,4]$ (en realidade en calquera intervalo, por tratarse dunha función polinómica que é continua e derivable en todo $\mathbb{R}$). Para calcular o punto x_0 (polo menos existe un, segundo afirma o teorema do Valor Medio), procédese igualando a derivada ao valor $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Fagámolo:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 6x \\ \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 6x = 4; x = 1 \pm \frac{\sqrt{21}}{3}; \text{ Efectivamente, } x_0 = 1 + \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 2,53 \in [0,4]$$

P19. Comproba que $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x < 4 \\ 10x-(19+x^2), & x \geq 4 \end{cases}$ cumpre as hipóteses do teorema do Valor Medio no intervalo $[2,6]$ e atopa un punto no que se cumpra a tese.

Nota: Sempre é interesante constatar que as hipóteses dun teorema son estritamente necesarias. Para facelo, basta con que “inventes” funcións ás que lle falle unha das hipóteses e que non cumpran a tese.

Deste importante teorema é doado deducir o seguinte corolario:

- Se unha función ten **derivada nula** en todos os puntos dun intervalo, entón é **constante**.

P20. Demostra o anterior corolario do teorema do Valor Medio (utiliza o método de redución ao absurdo).

10.7. Regra de L'Hôpital: Aplicación á resolución de límites indeterminados.

Enunciado: Supoñamos que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ (sendo x_0 finito ou infinito).

Se existe o $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (sexa finito ou infinito), cúmprese que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Nota: Trátase dun enunciado reducido adaptado a este nivel, pois o enunciado completo é máis complexo.

Exemplos: (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{3x^2 - 10x + 8} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 8}{6x - 10} = \frac{4}{2} = 2.$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x \cdot \ln 3}{3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x \cdot \ln^2 3}{6x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x \cdot \ln^3 3}{6} = \infty.$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x.$ Este último límite non existe (función periódica). Porén, non podemos dicir que non exista o primeiro límite, ao non ser aplicable a R.L. por non cumprirse unha das súas hipóteses. Calculémolo doutro xeito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1.$$

P21. Aplica a regra de L'Hôpital para calcular $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x+3}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}.$

P22. O seguinte límite está mal resolto. Intenta explicar o erro cometido e acha o seu resultado correcto:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{25 - x^2} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 5}{-2x} \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{-2} = \lim_{x \rightarrow 5} (-1) = -1$$

Nos seguintes exemplos verás como se poden transformar as indeterminacións da suma ($\infty - \infty$) e do produto ($0 \cdot \infty$) nunha das dúas indeterminacións de L'Hôpital ($\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$) para poder empregar tamén a regra. Ademais verás que se pode aplicar ás indeterminacións exponenciais, despois de tomar logaritmos.

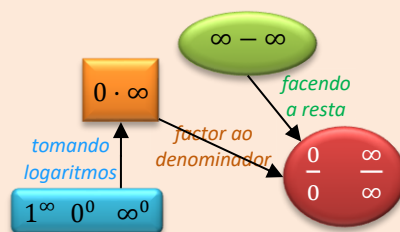
Exemplos: (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \left[-\infty + \infty \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cdot \cos x} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \cdot \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \cdot \left(5^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] = \left[\infty \cdot 0 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot \ln 5}{-\frac{1}{x^2}} = 5^0 \cdot \ln 5 = \ln 5.$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \left[1^\infty \text{ Indet.} \right].$ Neste caso, chamamos $L = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ e tomamos logaritmos (por exemplo, neperianos) para evitar a indeterminación exponencial:

$$\ln L = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{x^2} \cdot \ln(\cos 2x) \right] = \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ Indet.} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \ln(\cos 2x)}{x^2} =$$

$$\left[\frac{0}{0} \text{ Indet.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{-\sin 2x}{\cos 2x} \cdot 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6 \cdot \text{tg } 2x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \text{ Indet.} \right] \stackrel{RL}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6 \cdot (1 + \text{tg}^2 2x) \cdot 2}{2} = -6 \Rightarrow L = e^{-6}.$$



P23. Acha $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - 2^{\frac{1}{x}} \right) \cdot x \right]$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[(\ln x)^{\frac{1}{e^x}} \right]$, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 4)^{x-2}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}} \right].$

10.8. Representación Gráfica de Funcións

Para facer a representación gráfica dunha función estudaremos os seguintes apartados:

1. Dominios (da función, de continuidade e de derivabilidade)

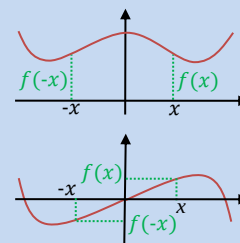
Este apartado foi estudado nas unidades 8 e 9.

2. Simetrías

Diremos que unha función f é **par** (simétrica respecto do eixe OY) cando cumpre que: $f(-x) = f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$.

Diremos que é **impar** (simétrica respecto da orixe) cando $f(-x) = -f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$.

Se unha función ten algún tipo de simetría só é necesario estudala e na metade do seu dominio, pois sabemos que a outra metade, é simétrica con respecto ao eixe OY ou ben á orixe, dependendo de se é par ou impar.



Exemplos: (a) A función $f(x) = x^2$ é par pois $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) A función $f(x) = x^3$ é impar pois $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

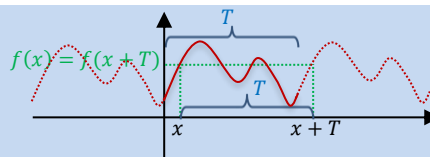
Nota: Para que unha función poida presentar unha simetría, é necesario que o seu dominio sexa simétrico respecto do 0. De non ser así diremos que “dado o seu dominio, non poden existir simetrías”.

P24. Estuda a simetría de: (a) $f(x) = x^2 - x$ (b) $g(x) = \ln|x|$ (c) $h(x) = \frac{x}{(x^2-1)}$ (d) $l(x) = \frac{1}{x-1}$

3. Periodicidade

Diremos que unha función f é **periódica** de período T , cando T é o número positivo máis pequeno que cumpre:

$$f(x+T) = f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$$



Exemplo: A función $f(x) = \sin 2x$ é periódica de período π , pois

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \sin 2(x+T) = \sin 2x \Rightarrow 2(x+T) = 2x + 2\pi \Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi.$$

Nota: Ten presente que as funcións $\sin x$ e $\cos x$ son periódicas de período 2π . Así mesmo, a función $\tan x$ é periódica de período π . As súas inversas ($\text{cosec } x$, $\sec x$ e $\cot x$) teñen o mesmo período que elas.

Se unha función é periódica de período T , só é necesario estudala e representala no intervalo $[0, T)$, pois sabemos que o resto da representación gráfica é unha repetición infinita dese anaco.

P25. Estuda a periodicidade das funcións: (a) $f(x) = 2 \cdot \cos \frac{x}{2}$ (b) $g(x) = |\sin x|$ (c) $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$

Nota: Date conta de que non poden existir os límites no infinito dunha función periódica. Xa que logo, se existe algún destes límites (sexa finito ou infinito), a función non pode ser periódica.

4. Ramas infinitas: asíntotas e ramas parabólicas

Este apartado foi estudado na unidade 8.

5. Signos da función: Rexións de existencia

Para estudar os signos da función, acharemos antes os seus **puntos de corte co eixe OX** que son os puntos de intersección da gráfica co eixe de abscisas (máis adiante acharemos tamén o punto de corte co eixe OY).

Daquela, para achalos basta con resolver o sistema formado polas súas ecuacións $y = f(x)$ e $y = 0$; Ou o que é o mesmo, resolver a ecuación $f(x) = 0$.

Nota: Unha función pode ter infinitos cortes co eixe de abscisas pero, como moito, só un co eixe de ordenadas.

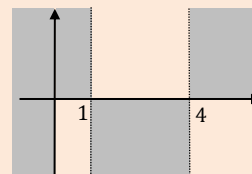
Estes puntos, xunto coas discontinuidades, son os posibles cambios de signo da función. Con todos eles establecemos os intervalos onde a función ten signo constante; e substituíndo **na función** un valor por cadanseu intervalo, determinamos os signos correspondentes.

Este estudo proporciona información moi interesante para representar unha función, pois dá a coñecer as rexións do plano cartesiano por onde se pode mover a súa gráfica (de aí o nome de “rexións de existencia”).

Exemplo: A función $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-16}$ é continua no seu dominio $D = [0, \infty) - \{4\}$

Cortes co eixe OX: $\frac{1-\sqrt{x}}{x^2-16} = 0$; $1 - \sqrt{x} = 0$; $\begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow C^X(1,0) \\ x_2 = -1 \notin D \end{cases}$.

Con estes datos, as rexións quedan así: $0 \xrightarrow[f<0]{-} 1 \xrightarrow[f>0]{+} 4 \xrightarrow[f<0]{-} \infty$.



P26. Determina os signos das funcións: (a) $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ (b) $g(x) = 2 \cdot \cos 2x$ (c) $h(x) = \ln(4 - x^2)$

6. Signos da función derivada: Monotonía e extremos

7. Signos da función segunda derivada: Curvatura e inflexións

Este dous apartados foron estudados anteriormente nesta mesma unidade.

Nota: Os tres últimos apartados son moi similares, coa diferenza de que se traballa coa propia función no primeiro deles (rexións de existencia), coa primeira derivada no segundo (monotonía e extremos) e coa segunda derivada no terceiro (curvatura e inflexións).

8. Táboa de valores

Nalgúns casos, os sete apartados estudados non aportan información suficiente para concretar con seguridade a gráfica da función. Neste suposto (en realidade é recomendable facelo sempre) é necesario construír unha pequena táboa de valores onde reflectir en conxunto, os puntos distinguidos xa achados nos anteriores apartados 5, 6 e 7 (puntos de corte co eixe OX, extremos e inflexións) xunto co punto de corte co eixe OY (caso de habelo) e aqueloutros puntos elixidos intelixentemente nos intervalos onde dispoñemos de pouca información (algo que faremos xunto co seguinte apartado, así como se vaia detectando a necesidade).

9. Representación gráfica

Unha vez concluídos os estudos anteriores e plasmada no plano cartesiano a información que nos aportan sobre a curva (a excepción da monotonía e da curvatura, que non se poden interpretar ata o último momento), realízase a súa representación gráfica.

Exemplo: Fagamos de xeito resumido (que ti debes completar), a representación da función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

1. **Dominio:** $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, sendo continua e derivable en todo o seu dominio.

2. **Simetrías:** Presenta simetría impar.

3. **Periodicidade:** Non presenta.

4. **Ramas infinitas:** $x = 1$, $x = -1$ e $y = 0$.

5. **Rexións de existencia:**

$-\infty \xrightarrow[f<0]{-} -1 \xrightarrow[f>0]{+} 0 \xrightarrow[f<0]{-} 1 \xrightarrow[f>0]{+} \infty$; $C^{XY}(0,0)$.

6. **Monotonía e extremos:**

$-\infty \xrightarrow[f'<0]{f \text{ dec.}} -1 \xrightarrow[f'<0]{f \text{ dec.}} 0 \xrightarrow[f'<0]{f \text{ dec.}} 1 \xrightarrow[f'<0]{f \text{ dec.}} \infty$; $\nexists$ extremos.

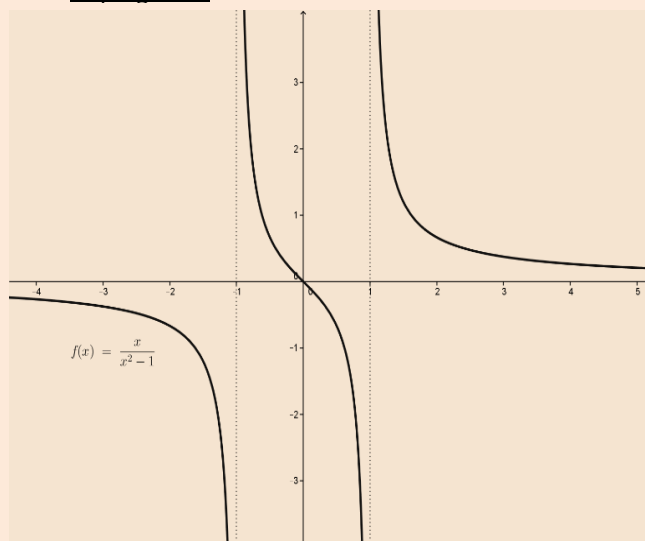
7. **Curvatura e inflexións:**

$-\infty \xrightarrow[f''<0]{f \text{ cónc.}} -1 \xrightarrow[f''>0]{f \text{ conv.}} 0 \xrightarrow[f''<0]{f \text{ cónc.}} 1 \xrightarrow[f''>0]{f \text{ conv.}} \infty$; $I(0,0)$.

8. **Táboa de valores:**

X	-3	-1,5	-0,5	0	0,5	1,5	3
Y	-0,37	-1,2	0,66	0	-0,66	1,2	0,37

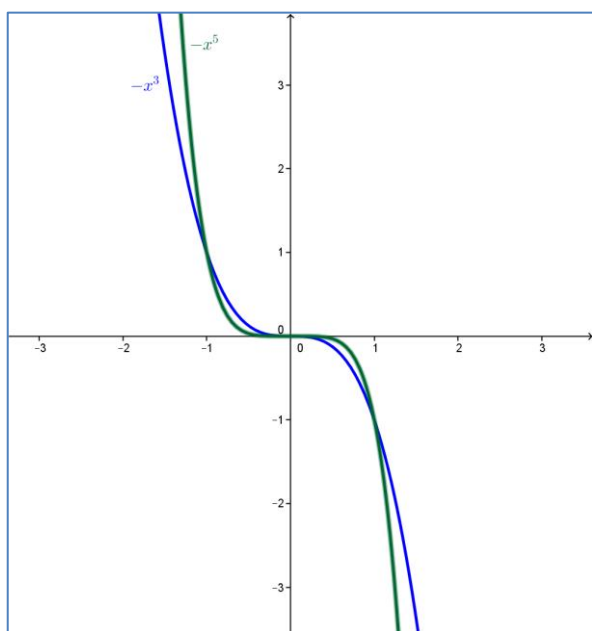
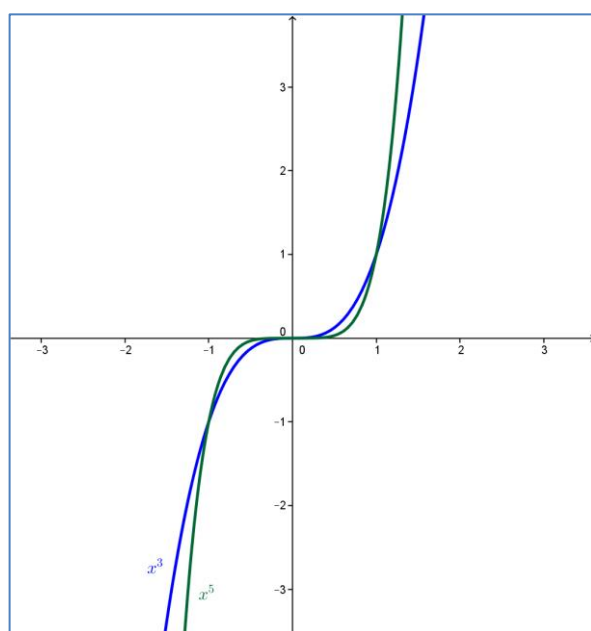
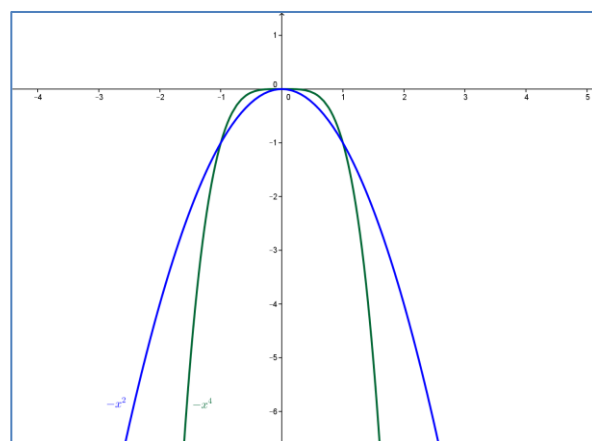
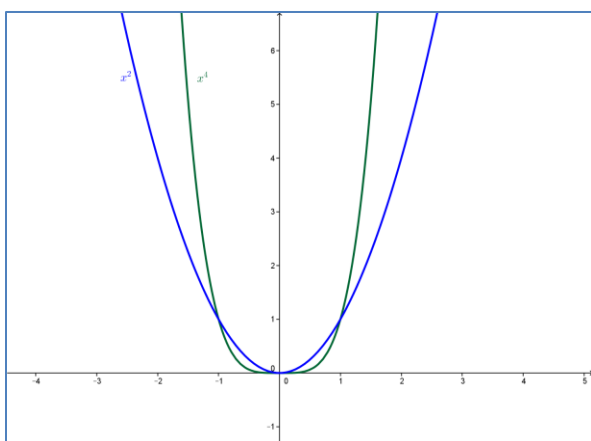
9. **Repr. gráfica:**



P27. Representa graficamente as funcións: (a) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

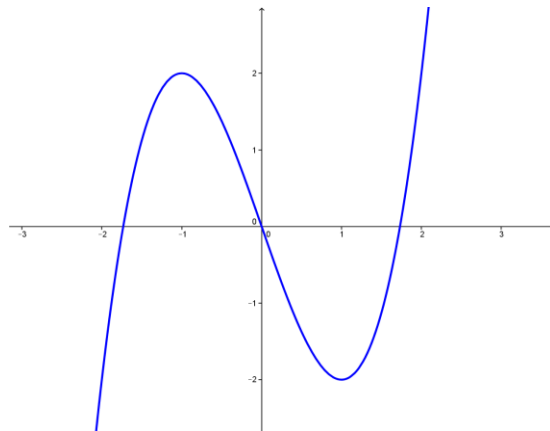
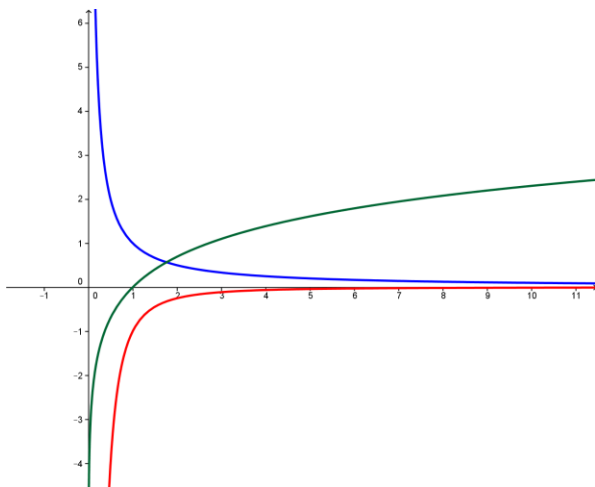
(b) $f(x) = \frac{1-x}{x^2+1}$

Anexo: GRÁFICAS DAS FUNCIÓNS QUE APARECEN COMO EXEMPLOS



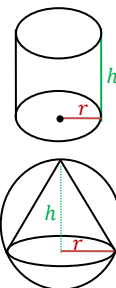
CUESTIÓNS, EXERCICIOS E PROBLEMAS

- Verdadeiro ou falso: Se unha función é crecente en x_0 , entón debe suceder que $f'(x_0) > 0$.
- Nun extremo relativo sempre se debe cumprir que a derivada é nula?
- Sendo x_0 un mínimo local e x_1 un máximo local dunha función f , é posible que $f(x_0) > f(x_1)$?
- É posible que unha curva sexa atravesada pola súa recta tanxente no punto de tanxencia?
- Verdadeiro ou falso: Se $f'''(x_0) \neq 0$, entón x_0 é un punto de inflexión de f .
- Razoa por que ningunha función polinómica de segundo grao pode ter puntos de inflexión.
- É certo que toda función polinómica de terceiro grao ten sempre un único punto de inflexión?
- Unha función par que é continua en todo $\mathbb{R}$, debe pasar sempre pola orixe? E unha impar?
- É posible atopar unha función derivable en $\mathbb{R}$, que corte dúas veces ao eixe X e cuxa derivada non o corte ningunha?
- (a) As tres primeiras gráficas corresponden a unha función e as súas dúas primeiras derivadas. Identifícaa.
(b) A última curva é a gráfica dunha función $f(x)$. A partir dela, fai un bosquexo da gráfica de $f'(x)$.

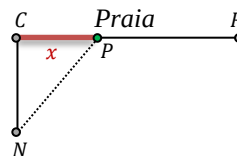


- Acha os valores críticos da función $y = x \cdot \sqrt[3]{x \cdot (1-x)}$. Cales deles son singulares? $4/5$; 0 e 1; O primeiro
- Estuda a monotonía da función $y = x + 5 - 2 \cdot \sin x$ no intervalo $[0, 2\pi)$. $0 \xleftrightarrow[f' < 0]{f \text{ decr.}} \frac{\pi}{3} \xleftrightarrow[f' > 0]{f \text{ cresc.}} \frac{5\pi}{3} \xleftrightarrow[f' < 0]{f \text{ decr.}} 2\pi$
- Estuda o crecemento, decrecemento e extremos da función $f(x) = e^x \cdot (2x^2 + x - 8)$. $-\infty \xleftrightarrow[f' > 0]{f \text{ cresc.}} \frac{-7}{2} \xleftrightarrow[f' < 0]{f \text{ decr.}} 1 \xleftrightarrow[f' > 0]{f \text{ cresc.}} \infty$; $M\left(\frac{-7}{2}, \frac{13}{e^3 \sqrt{e}}\right)$; $m(1, -5e)$
- Estuda a monotonía e extremos da función $f(x) = x - 2\sqrt{x}$. $0 \xleftrightarrow[f' < 0]{f \text{ decr.}} 1 \xleftrightarrow[f' > 0]{f \text{ cresc.}} \infty$; $m(1, -1)$; $M(0, 0)$

15. Determina os intervalos de crecemento e decrecemento da función $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. $-\infty \xrightarrow[f' < 0]{f \text{ decr.}} 0 \xrightarrow[f' > 0]{f \text{ crec.}} \infty$
16. Estuda a monotonía da función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } -1 < x < 0 \\ \frac{x^2 + 3}{x + 1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. $-1 \xrightarrow[f' < 0]{f \text{ decr.}} 0 \xrightarrow[f' < 0]{f \text{ decr.}} 1 \xrightarrow[f' > 0]{f \text{ crec.}} \infty$
17. (a) A curva $y = x^2 + bx + c$ pasa por $P(-2, 1)$ e ten un punto singular en $x = -3$. Acha b e c . $b = 6$; $c = 9$
 (b) Dada a función $f(x) = ax^3 + bx$, acha a e b sabendo que posúe un mínimo en $(-2, 48)$. $a = 3$; $b = -36$
18. Sabemos que $x = \frac{1}{2}$ é unha asíntota da función $f(x) = \frac{ax+b}{cx-1}$; E que a recta tanxente no punto de abscisa 1 ten por ecuación $y = 5x - 6$. Determina os valores de a , b e c . Para os valores achados, posúe algunha asíntota máis?
 $a = 3, b = -4, c = 2$; Si, $y = \frac{3}{2}$
19. (a) Calcula os valores de h , k e l para que a función $f(x) = \begin{cases} hx & \text{se } x < 1 \\ kx^2 + lx + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ sexa derivable en $x = 1$ e teña un extremo relativo en $x = 3$. $h = -4, k = 1$ e $l = -6$
 (b) Enuncia o T.V.M. Sendo $h = -4$, $k = 1$ e $l = -6$, calcula (se é que existe) un punto entre 0 e 5 no que a tanxente á curva $f(x)$ sexa paralela ao segmento que une os puntos $(0, 0)$ e $(5, -4)$. $x_0 = \frac{13}{5}$
20. Calcula os valores de a , b e c para que $f(x) = \begin{cases} x + \ln(1 + x^2) & \text{se } x > 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ sexa derivable no seu dominio e presente un extremo no punto de abscisa $x = -2$. $a = 1/4$; $b = 1$; $c = 0$
21. Razona se a función $f(x) = x^2 - x$ ten extremos absolutos no intervalo $[-2, 2]$. E en $(-2, 2)$? E en $\mathbb{R}$? En caso procedente, calcúlalos.
 (a) $M(-2, 6)$, $m(0'5, -0'25)$ (b) $m(0'5, -0'25)$ (c) $m(0'5, -0'25)$
22. Por que a función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ debe ter extremos absolutos no intervalo $[-1, 2]$? Áchaos.
 $M(2, 10)$; $m_1(-1, 1)$; $m_2(1, 1)$
23. A porcentaxe de concentración de nitróxeno dun composto vén dada pola función $N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$, onde t representa o tempo en segundos.
 (a) A concentración de nitróxeno crece ou decrece co paso do tempo? *crece*
 (b) Calcula en que momento a concentración é mínima e cal é o seu valor. $t = 0 \rightarrow N(0) = 20\%$
 (c) A que valor tende a concentración cando o tempo tende a infinito? 60%
24. Acha o punto onde a curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ ten maior inclinación. $(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$
25. Un propietario ten alugados corenta pisos a estudantes universitarios por 500 € cada mes. Sabe que por cada 50 € de aumento, perde dous alugueres. Cal é o prezo que lle produce máis ingresos? **750 €**
26. Con que dimensións deberían fabricar as latas de refrescos (33 cl) para que o gasto de material empregado sexa mínimo?
 $r = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \cong 3,745 \text{ cm}$; $h \cong 7,490 \text{ cm}$
27. Acha o radio e a altura do cono de volume máximo que se pode inscribir nunha superficie esférica de 12 cm de radio.
 $r = 8\sqrt{2} \cong 11,31 \text{ cm}$; $h = 16 \text{ cm}$
28. O custo dun marco dunha fiestra é de 12,50 €/m nos lados verticais e de 8 €/m nos horizontais. Queremos facer unha de 1 m² de área. Cales deben ser as súas dimensións para que resulte o máis barato posible.
base = 1,25 m ; altura = 0,8 m



29. Un nadador (N) atópase na auga a 300 m da praia en fronte dunha caseta (C). Desexa volver ao punto da praia onde ten a roupa (R), que se atopa a 600 m da caseta. Sabendo que anda pola area a unha media de 5 km/h e nada a unha media de 3 km/h, pescuda a que distancia da caseta debe estar o punto P ao que se debe dirixir para chegar nun tempo mínimo.
 $x = 225$ m



30. Acha os extremos e puntos de inflexión da función $y = \sin 2x$ que se atopen no intervalo $(0, \pi)$.

$$M\left(\frac{\pi}{4}, 1\right); m\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right); I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

31. Determina o valor de a para que a función $f(x) = x^4 + ax^3 - 25x + 6$ teña un punto de inflexión en $x = -2$. Ten máis inflexións para ese valor de a ?

$$a = 4; \text{ Si ten: } I_1(0,6) \text{ e } I_2(-2,40)$$

32. Acha os puntos de inflexión da curva $f(x) = x \cdot e^x$. En que intervalos é cóncava? En que puntos presentará inflexións a función $g(x) = f(x) + 2$? E a función $h(x) = f(x - 2)$?

$$I(-2, -2e^{-2}); (-\infty, -2); I(-2, 2-2e^{-2}); I(0, -2e^{-2})$$

33. Estuda a curvatura e inflexións de $y = x^4 - 4x^3$.

$$\infty \xleftrightarrow[y'' > 0]{y \text{ conv.}} 0 \xleftrightarrow[y'' < 0]{y \text{ cónc.}} 2 \xleftrightarrow[y'' > 0]{y \text{ conv.}} \infty; I_1(0,0) \text{ e } I_2(2, -16)$$

34. Estuda a monotonía e curvatura da función $y = x \cdot \ln x$.

$$0 \xleftrightarrow[y' < 0]{y \text{ decrec.}} e^{-1} \xleftrightarrow[y' > 0]{y \text{ crecient.}} \infty; 0 \xleftrightarrow[y'' > 0]{y \text{ conv.}} \infty$$

35. Acha os extremos e inflexións da función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

$$M(0,0), m(2,4); \nexists \text{ inflexións}$$

36. Sexa $f(x) = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1$, $a \neq 0$. Determina o valor ou valores de a que fan que as tanxentes á curva nos puntos de inflexión sexan perpendiculares.

$$a = \pm 1$$

37. Determina unha función polinómica de grao cuarto da que sabemos que ten: (i) un punto de inflexión con recta tanxente $y = 2x$, na orixe e (ii) un punto crítico no $(1,3)$

$$f(x) = -5x^4 + 6x^3 + 2x$$

38. Analiza se as seguintes funcións cumpren as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[-1,1]$. En caso afirmativo, atopa un punto no que se cumpra a tese.

$$(a) f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2} \quad (b) g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$(a) \text{ Non } (b) \text{ Si }; x_0 = \frac{2-\sqrt{7}}{3} \cong -0,215$$

39. Acha o valor de a para que sexa aplicable o teorema de Rolle á función $f(x) = x^3 + ax - 1$ no intervalo $[0,1]$. Para o valor achado, calcula un punto $x_0 \in (0,1)$ de tanxente horizontal.

$$a = -1; x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

40. (a) Demostra que a gráfica da función $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ corta unha soa vez ao eixe de abscisas.

(b) Demostra que a ecuación $e^x = 1 + x$ ten unha única solución real.

41. Sexa f una función continua e derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 3$. Calcula $f(5)$ para asegurármonos de que existe un $c \in (0,5)$ tal que $f'(c) = 8$.

$$f(5) = 43$$

42. Calcula c e d para que $f(x) = \begin{cases} x^2 + cx + d, & x < 1 \\ 2x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ cumpra as hipóteses do T.V.M. en $[-1,5]$. Para os valores achados, calcula un punto onde cumpra a tese.

$$c = 0 \text{ e } d = 2; x_0 = \frac{2}{3}$$

43. Dada a función $f(x) = x \cdot \cos \frac{\pi x}{2}$, demostra que $\exists \alpha \in (1,2)$ tal que $f'(\alpha) = -2$.

44. Aplica a regra de L'Hôpital para calcular o valor dos seguintes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \ln x}{e^x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{1/\cos x}$$

$$0; 1/2; e^{\frac{\pi-2}{\pi}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{4+x} - 8 - x}{x^2}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$$

$$-1/64; 1/2; 1$$

45. Acha un valor de a para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2} = 8$. 4

46. Acha o valor de k para que $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + k}{x - \sin x}$ sexa finito. 4

47. Analiza se a función $y = ax + \frac{b}{x}$, onde a e b son números reais positivos, ten mínimo absoluto no seu dominio. E no intervalo $(0, \infty)$? Representaa graficamente para os valores $a = 2$ e $b = 8$. Non ; Si

48. Representa $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 11}{2 \cdot (x - 3)}$. Como axuda, dispón de $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{2 \cdot (x - 3)^2}$ e $f''(x) = \frac{4}{(x - 3)^3}$.

49. Representa aproximadamente a gráfica da función $f(x) = 2 \cdot e^{-2|x|}$, despois de estudar como mínimo, o seu dominio, asíntotas, monotónia, extremos, curvatura e inflexións.

50. Debuxa as curvas: (a) $y = \frac{x-2}{3+x}$

(b) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

(c) $y = \frac{x}{\ln x}$

(d) $y = 2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$

(e) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

(f) $y = \sin x + \cos x$

