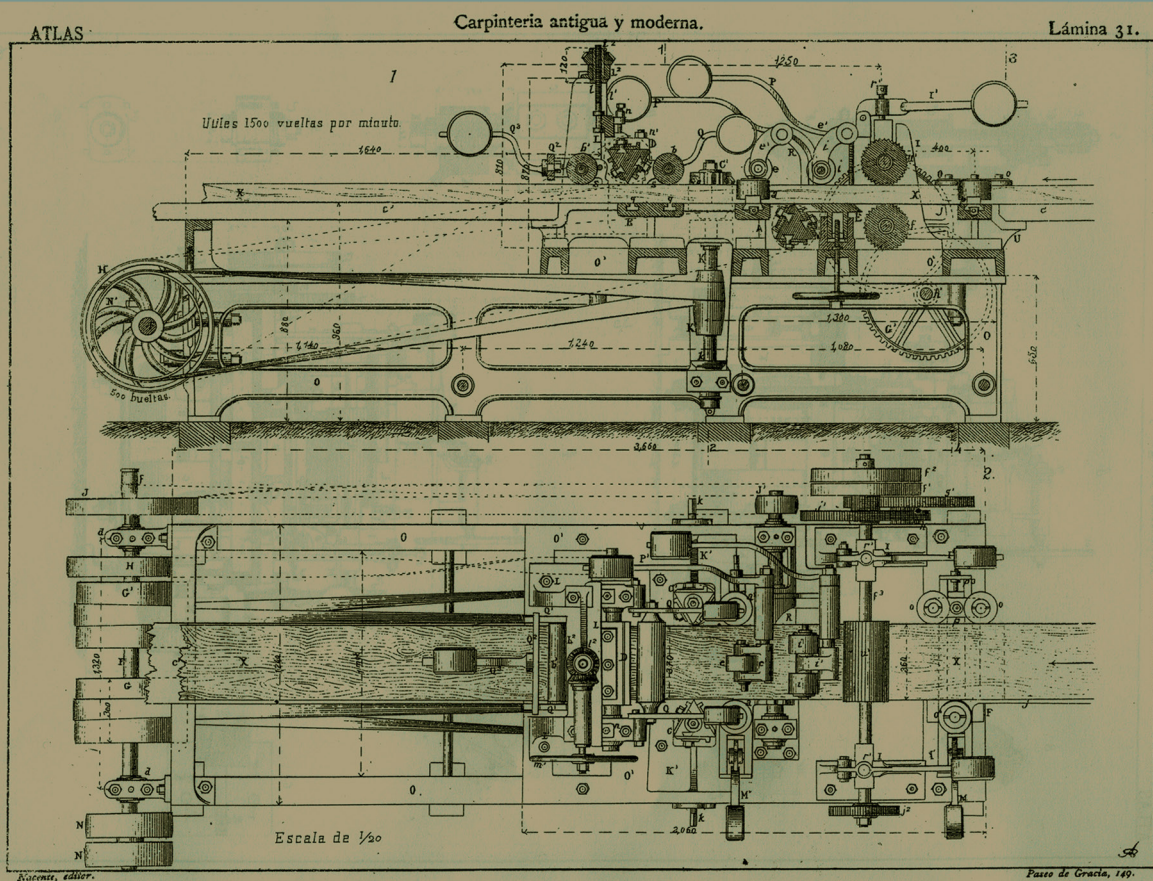
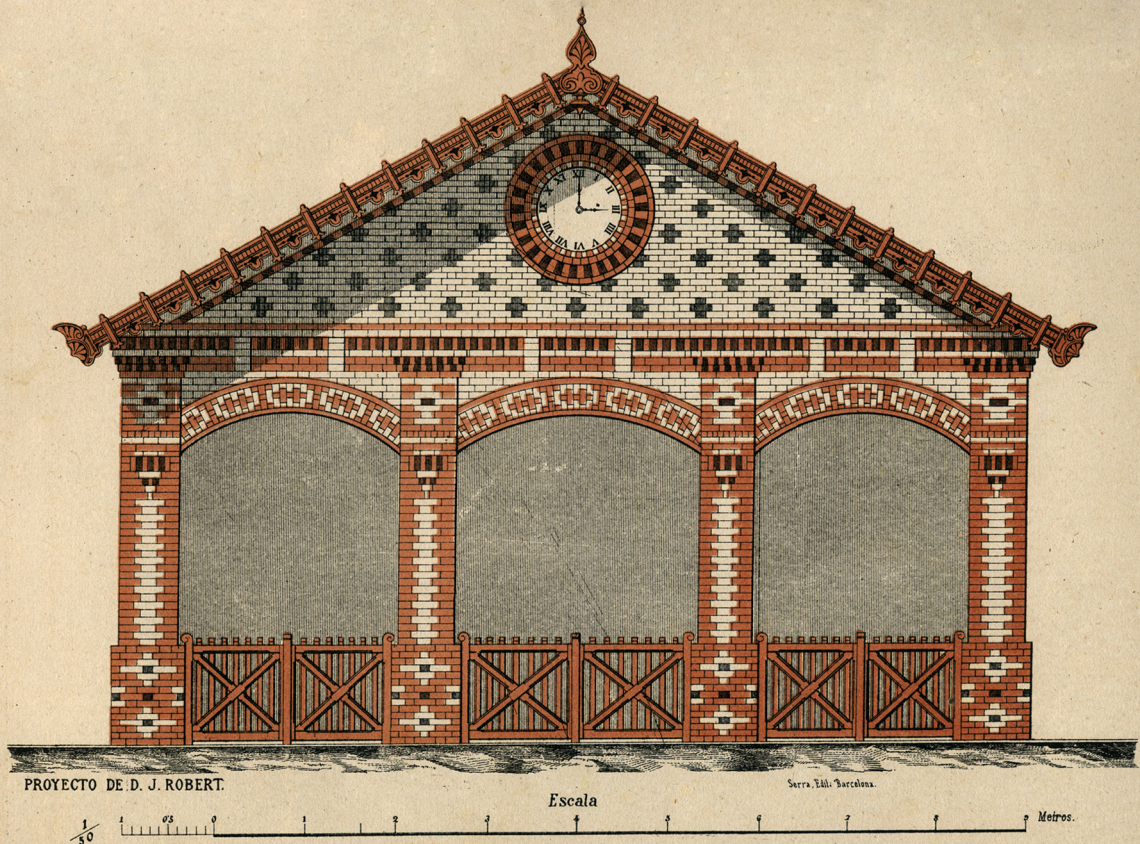


DEBUXO TÉCNICO I

Senén Olano Alvarez



MANUAL DE DEBUXO TÉCNICO PARA 1º DE BACHARELATO

© do texto.- Senén Olano Álvarez
© dos debuxos de páxinas interiores.- Senén Olano Álvarez
Depósito legal.- LU-62-2011
ISBN.- 978-84-615-3813-3
3ª Edición - Agosto 2013

Reservados todos los derechos. Queda prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio físico o analógico sin la autorización del autor.

Adquisición de ejemplares de esta obra: <http://www.senenolano.com>

ÍNDICE

XEOMETRÍA PLANA

11

1 - TRAZADOS BÁSICOS

13

PARALELISMO

13

- 1.1.-Trazar a paralela a unha recta por un punto dado
- 1.2.-Trazar a paralela a unha recta a unha distancia dada
- 1.3.-Trazar paralelas coa escuadra e o cartabón

PERPENDICULARIDADE

14

- 1.4.-Trazar a perpendicular a unha recta por un dos seus extremos
- 1.5.-Trazar a mediatriz dun segmento
- 1.6.-Trazar a perpendicular a un segmento por un punto dado
- 1.7.-Trazar perpendiculares coa escuadra e o cartabón

SEGMENTOS

15

- 1.8.-Teorema de Tales
- 1.9.-Dividir un segmento en varias partes iguais
- 1.10.-Dividir un segmento en partes proporcionais a outros dados
- 1.11.-Produto de dous segmentos
- 1.12.- División de dous segmentos
- 1.13.- Raíz cadrada de un segmento

ÁNGULOS

16

- 1.14.- Copiar un ángulo
- 1.15.- Bisectriz de un ángulo
- 1.16.- Bisectriz dun ángulo formado por dúas rectas cuxo punto de intersección non é accesible
- 1.17.- Recta concorrente (que vaia cortar no mesmo punto) con outras dúas pasando por un punto dado
- 1.18.- Trazado de ángulos co compás
- 1.19.- Trazado de ángulos coa escuadra e o cartabón

CIRCUNFERENCIA

18

- 1.20.- Circunferencia. Definicións
- 1.21.- Ángulos da circunferencia
- 1.22.- Arco capaz

2 - POLÍGONOS

21

TRIANGULOS

21

- 2.1.- Triángulos. Definicións
- 2.2.- Rectas e puntos natábeis dos triángulos
- 2.3.- Trazado do triángulo coñecidos os tres lados
- 2.4.- Trazado dun triángulo equilátero coñecida a altura
- 2.5.- Trazado dun triángulo isósceles coñecidas a base e a altura
- 2.6.- Trazado dun triángulo isósceles coñecidos os lados iguais e a altura
- 2.7.- Trazado dun triángulo isósceles coñecidos á base e o ángulo oposto a ela
- 2.8.- Trazado dun triángulo rectángulo coñecidos un cateto e a hipotenusa
- 2.9.- Trazado dun triángulo rectángulo coñecidos un cateto e o ángulo oposto

CUADRILÁTEROS

23

- 2.10.-Cuadriláteros. Definicións
- 2.11.- Trazado dun cadrado dado o lado
- 2.12.- Trazado dun cadrado dada a diagonal
- 2.13.- Trazado dun rectángulo dados os lados
- 2.14.- Trazado dun rectángulo dados o lado e a diagonal
- 2.15.- Trazado dun rectángulo dados a suma dos lados e a diagonal
- 2.16.- Trazado dun rectángulo dados a diferenza dos lados e a diagonal
- 2.17.- Trazado dun rombo dados o lado e unha diagonal
- 2.18.- Trazado dun rombo dados un ángulo e unha diagonal
- 2.19.- Trazado dun trapezio escaleno dados os lados
- 2.20.- Trazado dun trapezio escaleno dadas as bases e as diagonais

POLÍGONOS REGULARES	25
---------------------	----

2.21.-Polígonos Regulares. Definicións

2.22.- Trazado dun polígono regular dado o radio da circunferencia na que está inscrito. Método xeral aproximado

2.23.- Trazado dun polígono regular dado o lado. Método xeral aproximado

3 - PROPORCIONES	29
-------------------------	-----------

PROPORCIONALIDADE	29
-------------------	----

3.1.- Proporción

3.2.- Segmento cuarto proporcional de outros tres

3.3.- Segmento terceiro proporcional de outros dous

3.4.- Segmento medio proporcional de outros dous

3.5.- A proporción áurea

3.6.- Obter a parte aurea dun segmento

3.7.- Dada a parte aurea dun segmento obter o segmento. O rectángulo aureo

SEMELLANZA	31
------------	----

3.8.- Semellanza - Conceptos

3.9.- Semellanza directa

3.10.- Semellanza inversa

ESCALAS	32
---------	----

3.11.- Escalas - Conceptos

3.12.- Escala gráfica

3.13.- Escala transversal

3.14.- Triángulo de escalas

4 - TRANSFORMACIÓNS	35
----------------------------	-----------

TRANSFORMACIÓN XEOMÉTRICA	35
---------------------------	----

4.1.- Concepto

TRANSLACIÓN	35
-------------	----

4.2.- Concepto

SIMETRÍA	35
----------	----

4.3.- Simetría polar ou central

4.4.- Simetría axial

XIRO	36
------	----

4.5.- Xiro ou rotación

5 - TANXENCIAS	37
-----------------------	-----------

DEFINICIÓNS E CONCEPTOS BÁSICOS	37
---------------------------------	----

5.1.- Tanxencia

TRAZADO DE TANXENCIAS	37
-----------------------	----

5.2.- Rectas tanxentes a unha circunferencia dende un punto exterior a ela

5.3.- Recta tanxente a un arco de circunferencia de centro descoñecido por un punto do mesmo

5.4.- Rectas tanxentes exteriores a dúas circunferencias

5.5.- Rectas tanxentes interiores a dúas circunferencias

5.6.- Circunferencias de radio dado que pasan por dous puntos

5.7.- Circunferencias de radio dado que pasan por un punto e son tanxentes a unha recta

5.8.- Circunferencias de radio dado que pasan por un punto e son tanxentes a unha circunferencia

5.9.- Circunferencias tanxentes a dúas rectas que se cortan

5.10.- Circunferencias tanxentes a unha recta e a unha circunferencia

5.11.- Circunferencias de radio dado tanxentes a dúas circunferencias

5.12.- Enlazar dúas rectas paralelas con dous arcos de circunferencia do mesmo radio, coñecendo os puntos de tanxencia

5.13.- Envolvente dunha poligonal

6 - CURVAS TÉCNICAS

43

OVALOS

43

- 6.1.- Trazado do ovalo dado o eixo maior
- 6.2.- Trazado do ovalo dado o eixo menor
- 6.3.- Trazado do ovalo dádolos dous eixos
- 6.4.- Trazado do ovalo isométrico ou inscrito nun rombo

OVOIDES, VOLUTAS E ESPIRAIS

44

- 6.5.- Trazado do ovoide dado o eixo maior
- 6.6.- Trazado do ovoide dado o eixo menor
- 6.7.- Trazado do ovoide dádolos dous eixos
- 6.8.- Trazado de unha voluta de varios centros coñecido o paso
- 6.9.- Trazado da espiral logarítmica ou eapiral aurea
- 6.10.- Trazado da espiral xónica

6 - CURVAS CÓNICAS

49

CONCEPTOS

49

- 7.1.- O cono e as cónicas
- 7.2.- Por que tódalas cónicas son iguais

A ELIPSE

51

- 7.3.- Trazado da elipse por puntos
- 7.4.- Trazado da elipse por afinidade
- 7.5.- Trazado da elipse dados dous diámetros conxugados
- 7.6.- Obter os eixos da elipse a partir de dous diámetros conxugados

A HIPÉRBOLE

52

- 7.7.- Trazado da hipérbole por puntos

A PARÁBOLA

53

- 7.8.- Trazado da parábola por puntos

1 - FUNDAMENTOS

57

O CONCEPTO - SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

57

1.0.- Que é un sistema de representación e por que fai falta

SISTEMA DIÉDRICO

57

1.1.- O Concepto

1.2.- A proxección

O PUNTO

58

1.3.- Representación do punto

1.4.- Posicións do punto

A RECTA

60

1.5.- Representación da recta

1.6.- Dados dous puntos obter a recta

1.7.- Dadas as trazas obter a recta

1.8.- Dadas as proxeccións definir a recta

1.9.- Posicións particulares da recta

O PLANO DE PERFIL E A 3ª PROXECCIÓN

63

1.10.- A terceira proxección

1.11.- O punto na terceira proxección

1.12.- A terceira proxección para a representación da recta

O PLANO

65

1.13.- Representación do plano

1.14.- Obter o plano dadas dúas rectas que se cortan

1.15.- Obter o plano dada unha recta e un punto

1.16.- Obter o plano dados tres puntos

1.17.- Posicións particulares do plano

1.18.- Rectas particulares do plano

2 - FERRAMENTAS DE TRABAJO

69

INTERSECCIÓN

69

2.1.- Intersección entre dúas rectas

2.2.- Intersección entre dous planos

2.3.- Intersección de recta e plano

2.4.- Intersección de dous planos que pasan polo mesmo punto de LT

PARALELISMO

71

2.5.- Paralelismo entre rectas

2.6.- Paralelismo entre planos

2.7.- Paralelismo entre recta e plano

2.8.- O paralelismo no plano de perfil

PERPENDICULARIDADE

73

2.9.- Perpendicularidade entre recta e plano

2.10.- Perpendicularidade entre planos

2.11.- Perpendicularidade entre rectas

2.12.- Recta perpendicular a outra pasando por un punto

DISTANCIAS

75

2.13.- Distancia entre dous puntos

2.14.- Distancia entre un punto e un plano

2.15.- Distancia entre un punto e unha recta

2.16.- Distancia entre dúas rectas paralelas

2.17.- Distancia entre dous planos paralelos

ABATEMENTOS

77

- 2.18.- Abatemento dun plano sobre o PH
- 2.19.- Abatemento dun plano sobre o PV
- 2.20.- Abatemento dunha recta
- 2.21.- Abatemento dunha figura plana
- 2.22.- Desabatemento dunha figura plana
- 2.23.- Proxeccións da circunferencia por desabatemento

3 - REPRESENTACIÓN DE VOLUMES

81

VOLUMES

81

- 3.1.- PRISMA
- 3.2.- PIRÁMIDE
- 3.3.- CILINDRO
- 3.4.- CONO

POLIEDROS

83

- 3.5.- CUBO
- 3.6.- OCTAEDRO
- 3.7.- TETRAEDRO

VISTAS DE PEZAS

84

- 3.8.- Representación dun volume calquera polas súas vistas

SISTEMA AXONOMÉTRICO 87

1 - FUNDAMENTOS 89

OS ELEMENTOS DE TRABALLO 89

- 1.1.- Unidades de medida
- 1.2.- Tipos de axonometrías
- 1.3.- Obtención das escalas axonométricas

2 - PERSPECTIVA AXONOMÉTRICA 91

TRIMETRÍA 91

- 2.1.- Abatemento dunha figura plana
- 2.2.- Desabatemento dunha figura plana
- 2.3.- Proxección axonométrica dunha circunferencia
- 2.4.- Proxección axonométrica dun volume

PERSPECTIVA CABALEIRA 93

- 2.5.- Abatemento dunha figura plana
- 2.6.- Perspectiva cabaleira dunha circunferencia
- 2.7.- Perspectiva cabaleira dun volume

PERSPECTIVA ISOMÉTRICA OU ISOMETRÍA 94

- 2.8.- Debuxo de figuras planas nunha isometría
- 2.9.- Debuxo da circunferencia na isometría
- 2.10.- Debuxo dun volume na isometría

1 - FUNDAMENTOS

99

O CONCEPTO

99

O PUNTO

99

1.1.- Representación do punto

1.2.- Posicións do punto

A RECTA

100

1.3.- Representación da recta

1.4.- Posicións particulares da recta

O PLANO

101

1.5.- Representación do plano

1.6.- Rectas particulares do plano

1.7.- Dados tres puntos, obter o plano que forman

1.8.- Dada unha recta e un punto, obter o plano que forman

1.9.- Dadas dúas rectas que se cortan, obter o plano que forman

1.10.- Intersección entre dous planos

1.11.- Intersección entre recta e plano

1.12.- Intersección de dous planos de trazas paralelas

2 - TELLADOS

105

CONCEPTOS BÁSICOS

105

RESOLUCIÓN DE TELLADOS

105

2.1.- Tellados con vertentes de igual pendente

2.2.- Tellados con vertentes de distinta pendente

2.3.- Tellados con patio

3 - TERREOS

113

CONCEPTOS BÁSICOS

113

PERFÍS DE TERREOS

114

NORMALIZACIÓN E ANOTACIÓN 115

1 - NORMALIZACIÓN 117

CONCEPTOS BÁSICOS 117

FORMATOS 117

LIÑAS NORMALIZADAS 118

O BOSQUEJO ACOUTADO 119

CORTES E SECCIONES 120

1.1.- Representación de pezas simétricas

1.2.- Vistas parciais ou de detalle

1.3.- Raiados

1.4.- Diferencia entre corte e sección

1.5.- Tipos de CORTE

1.6.- Tipos de SECCIÓN

2 - ANOTACIÓN 125

CONCEPTOS BÁSICOS 125

2.1.- Principios de anotación

ELEMENTOS DE ANOTACIÓN 125

2.2.- Definicións

2.3.- Liñas de cota

2.4.- Liñas auxiliares de cota

2.5.- Extremos das liñas de cota

2.6.- Números de cota

TIPOS DE ANOTACIÓN 128

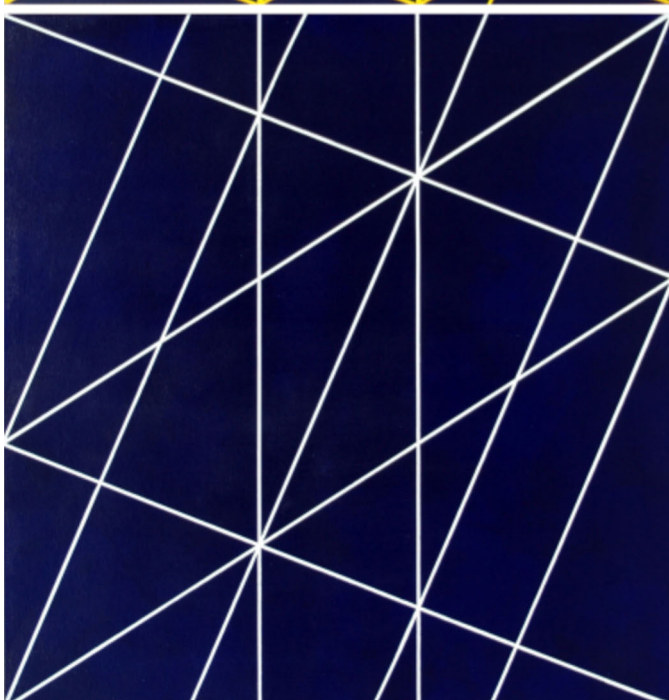
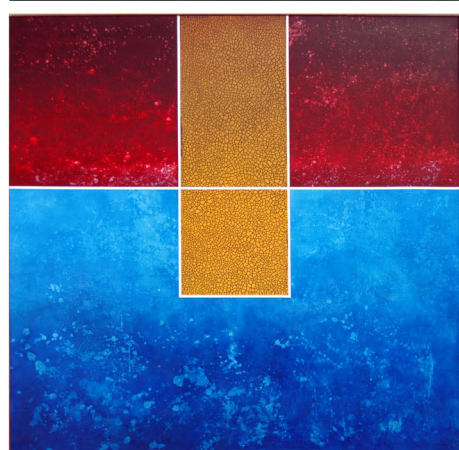
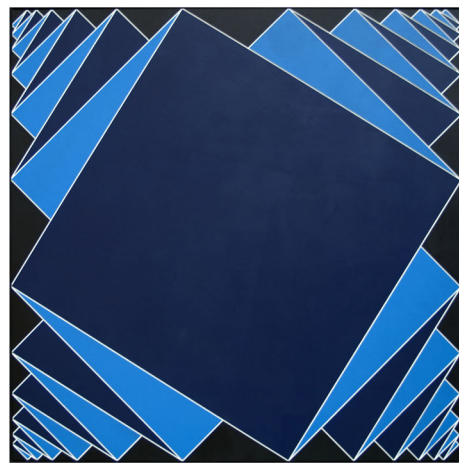
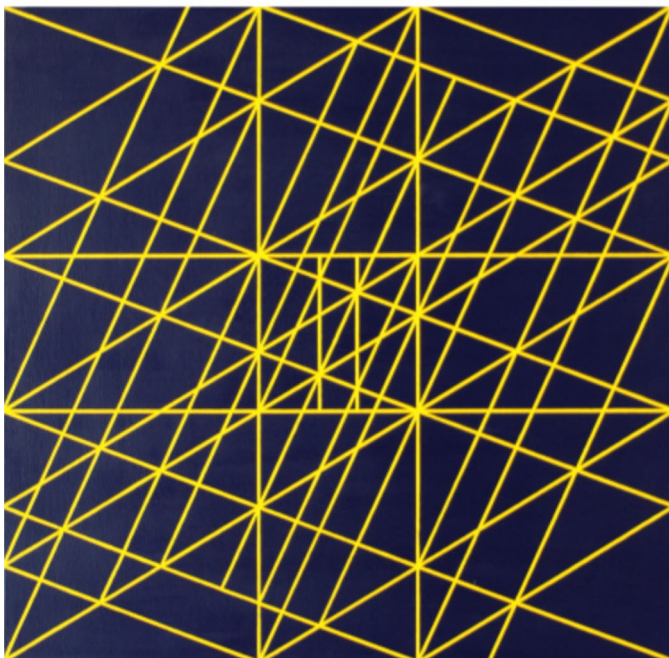
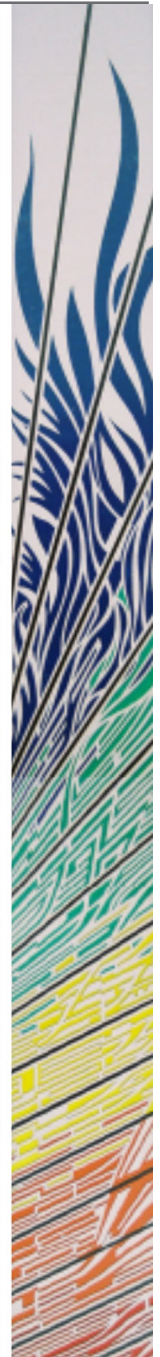
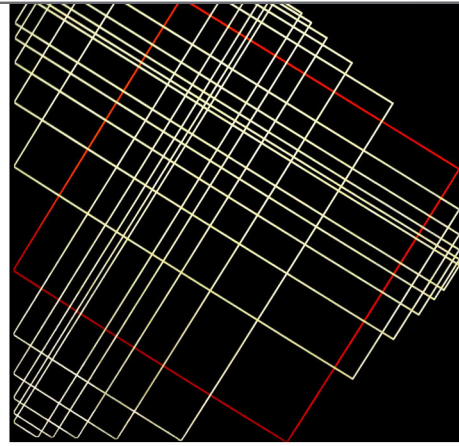
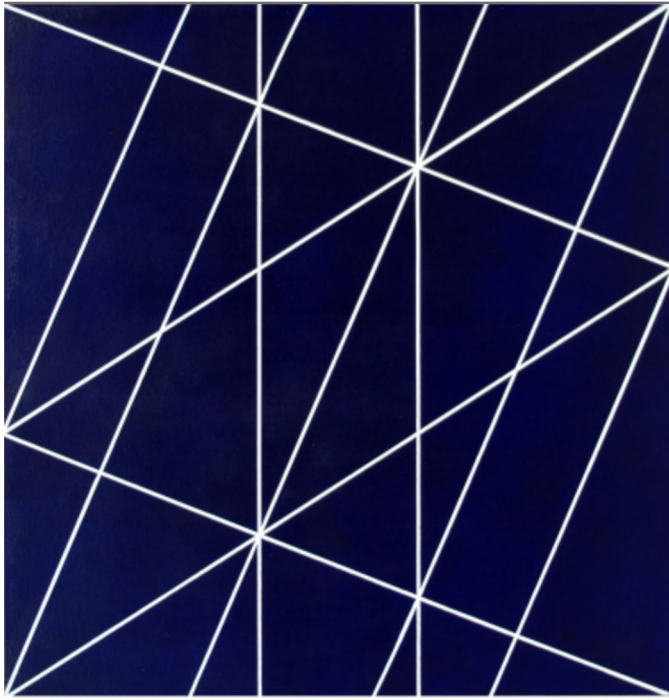
2.7.- Anotación en serie

2.8.- Anotación en paralelo

2.9.- Anotación combinada

2.10.- Anotación progresiva

2.11.- Anotación por coordenadas



**XEOMETRÍA
P L A N A**

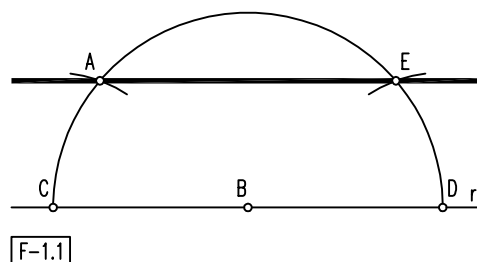
1 - TRAZADOS BÁSICOS

PARALELISMO

1.1.-Trazar a paralela a unha recta por un punto dado - F-1.1

Dada a recta r e o punto A .

- 1.- Collemos o compás e dende un punto calquera B de r (mais ou menos no medio) trazamos un arco que pase polo punto A e que corte á recta en outros dous, C e D .
- 2.- Collemos co compás a distancia CA .
- 3.- Con centro en D cortamos o arco no punto E .
- 4.- Unimos A con E e teremos a **recta paralela a r** .

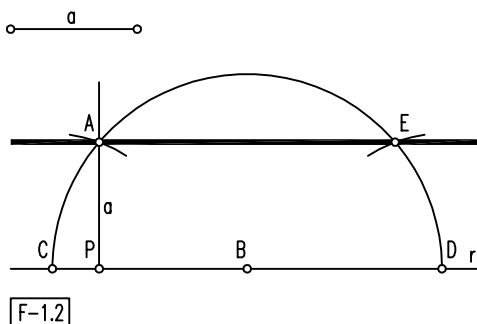


F-1.1

1.2.-Trazar a paralela a unha recta a unha distancia dada - F-1.2

Dada a recta r e a distancia a .

- 1.- Dende un punto P calquera de r (a un lado da recta) levantamos unha perpendicular a ela.
- 2.- Levamos, co compás, a distancia a dende o punto P e obtemos o punto A .
- 3.- Aplicamos o procedemento explicado no apartado anterior (1.1) e teremos a **recta paralela a r á distancia a** .



F-1.2

1.3.-Trazar paralelas coa escuadra e o cartabón - F-1.3

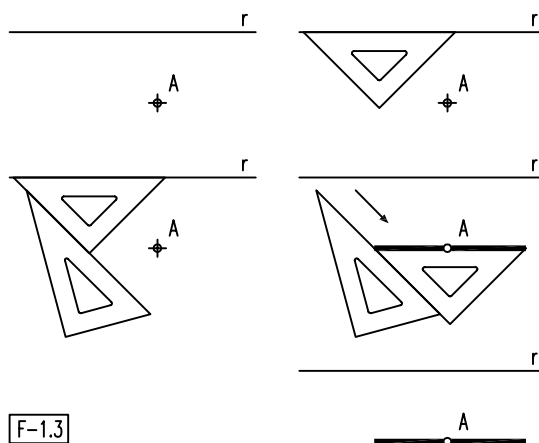
NOTA.- Cando o obxecto do exercicio sexa trazar unha paralela a unha recta dada, deberemos usar o procedemento xeométricamente correcto (usando o compás tal e como vimos nos apartados 1.1 e 1.2).

Cando teñamos que trazar unha paralela na resolución de calquera outro trazado utilizaremos **sempre** a escuadra e o cartabón.

Dada a recta r e o punto A .

- 1.- Colocamos a **escuadra** de xeito que o lado máis longo (a hipotenusa) coincida coa recta dada r .
- 2.- Suxeitando a **escuadra** coa man dereita, collemos o **cartabón** coa esquerda e o poñemos a carón dela.
- 3.- Suxeitando o **cartabón** coa man esquerda, deslizamos a **escuadra** e a facemos coincidir co punto A .
- 4.- Suxeitando **ambalas-dúas plantillas** coa man esquerda trazamos a **recta paralela a r polo punto A** .

NOTA: O procedemento anterior está referido ás persoas destrás. Os zurdos deberán facer o mesmo pero onde di man dereita ou esquerda deberán utilizar a outra.



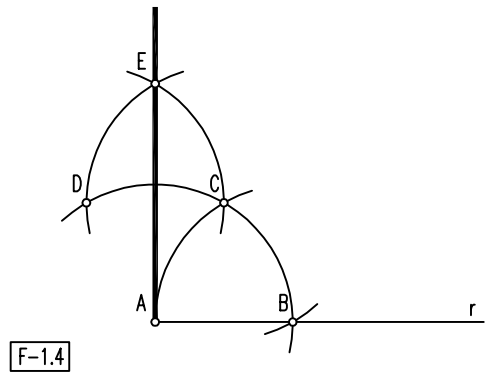
F-1.3

PERPENDICULARIDADE

1.4.-Trazar a perpendicular a unha recta por un dos seus extremos - F-1.4

Dada a recta r e o extremo A .

- 1.- Facendo centro en A e, con un radio calquera, trazamos un arco que cortará á recta no punto B .
- 2.- Facendo centro en B e, co mesmo radio, trazamos outro arco que cortará o anterior en C . Facemos o mesmo con centro en C e obtemos D . Facemos centro en D e obtemos E .
- 3.- Unindo E con A teremos a **recta perpendicular a r polo extremo esquerdo**.

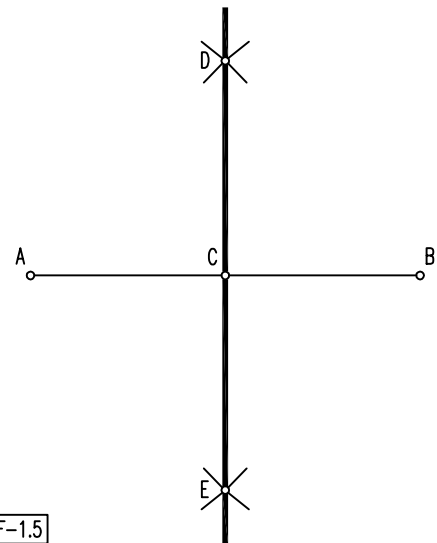


F-1.4

1.5.-Trazar a mediatriz dun segmento - F-1.5

Dado o segmento AB .

- 1.- Collemos o compás e, facendo centro en A con un radio calquera, trazamos dous arcos a ambos lados do segmento.
- 2.- Sen variar o arco facemos o mesmo con centro no extremo B e cortamos os arcos anteriores nos puntos D e E .
- 3.- Unindo D con E teremos a **mediatriz do segmento AB** , sendo C o seu punto medio.



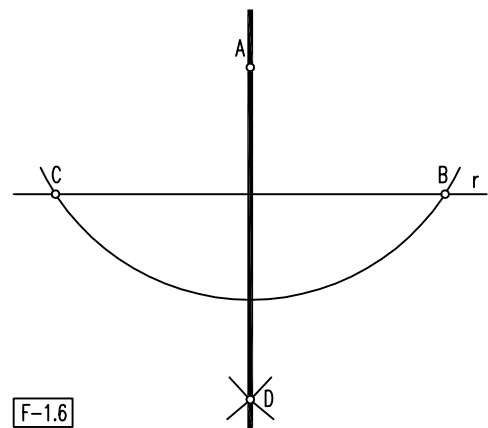
F-1.5

1.6.-Trazar a perpendicular a un segmento por un punto dado - F-1.6

Dada a recta r e o punto A .

- 1.- Collemos o compás e, facendo centro en A con un radio calquera, trazamos un arco que cortará á recta r nos puntos B e C .
- 2.- Facendo centro en C e, con un radio calquera, trazamos un arco (do lado do segmento contrario ó punto A). Sen variar o arco facemos o mesmo con centro no extremo B e cortamos o arco anterior no punto D .
- 3.- Unindo D con A teremos a **perpendicular á recta r pasando polo punto A** .

NOTA.- Tanto neste trazado como nos dous anteriores, cando usamos un arco de calquera radio (o que queiramos), convén que sexa o máis amplo posible para ter un maior grao de exactitude na recta final.



F-1.6

1.7.-Trazar perpendiculares coa escuadra e o cartabón - F-1.7

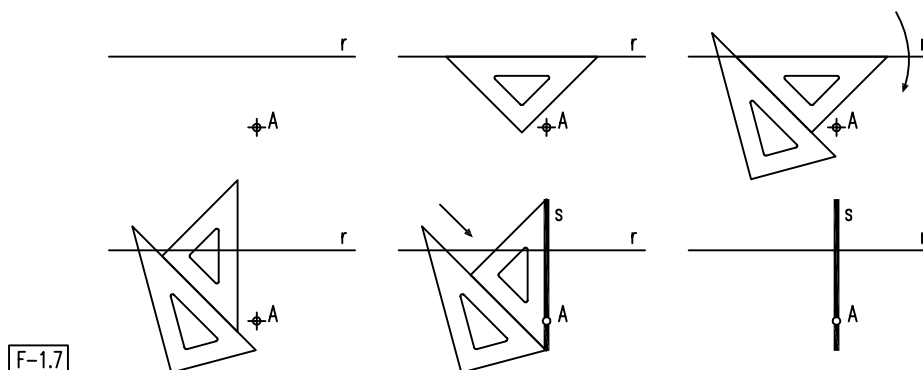
NOTA.- Do mesmo xeito que para as paralelas, cando o obxecto do exercicio sexa trazar unha perpendicular a unha recta dada, deberemos usar o procedemento xeométricamente correcto (usando o compás tal e como vimos nos apartados 1.5, 1.6 e 1.7).

Cando teñamos que trazar unha perpendicular na resolución de calquera outro trazado, utilizaremos **sempre** a escuadra e o cartabón.

Dada a recta r e o punto A .

- 1.- Colocamos a **escuadra** de xeito que o lado máis longo (a hipotenusa) coincida coa recta dada r .
- 2.- Suxeitando a **escuadra** coa man dereita, collemos o **cartabón** coa esquerda e o poñemos a carón dela.
- 3.- Suxeitando o **cartabón** coa man esquerda, xiramos a escuadra de xeito que a hipotenusa quede perpendicular á recta r .
- 4.- Deslizamos a **escuadra** e a facemos coincidir co punto A .
- 4.- Suxeitando **as dúas plantillas** coa man esquerda trazamos a **recta perpendicular a r polo punto A** .

NOTA: O procedemento anterior está referido ás persoas destros. Os zurdos deberán facer o mesmo pero onde di man dereita ou esquerda deberán utilizar a outra.



F-1.7

SEGMENTOS

1.8.-Teorema de Tales - F-1.8

Tales de Mileto (639-547 a.C.) filósofo, matemático, astrónomo, xeómetra e un dos sete sabios de Grecia. Titor e mestre de Pitágoras.

Formulou un dos máis importantes teoremas da xeometría (xunto co teorema do seu discípulo Pitágoras), que leva o seu nome.

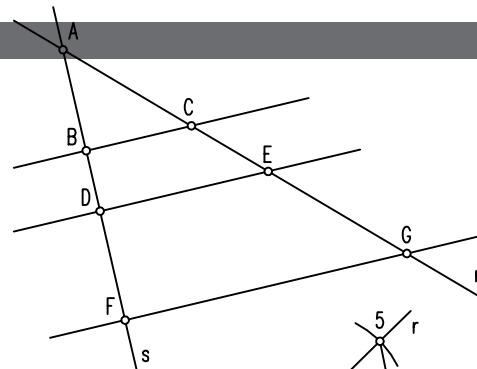
Teorema de Tales:

“Se temos dúas rectas (r , s) que se cortan, formando un ángulo calquera, e as cortamos por un feixe de rectas paralelas entre si, dividirán ás dúas primeiras (r , s) en segmentos proporcionais”.

De tal xeito cumprírase:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD} = \frac{EG}{DF} = \dots$$

Isto terá, como veremos máis adiante, moitas aplicacións en tódala xeometría plana.

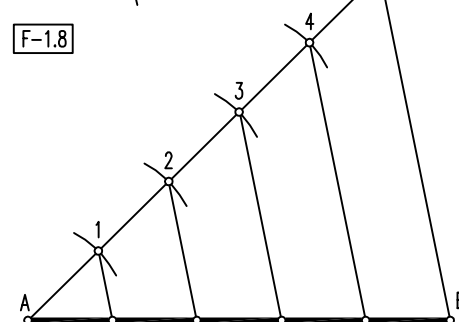


F-1.8

1.9.-Dividir un segmento en varias partes iguais F-1.9

Dado o segmento **AB**.

- 1.- Dende o extremo **A** do segmento trazamos unha recta que forme con él un ángulo calquera.
- 2.- Marcamos a partir de **A** a mesma medida tantas veces como divisións vaia a ter o segmento (neste caso cinco).
- 3.- Unimos a última medida co extremo **B** do segmento e, coa escuadra e o cartabón, trazamos paralelas polas demais medidas e teremos o **segmento AB dividido en tantas partes iguais como divisións collimos ó principio**.

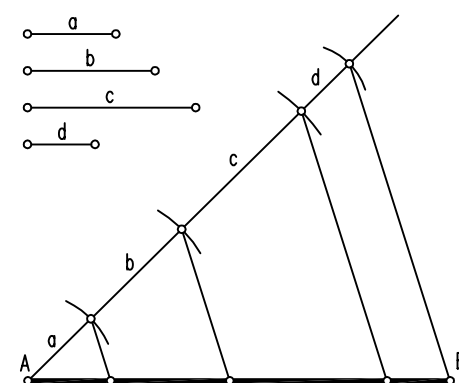


F-1.9

1.10.-Dividir un segmento en partes proporcionais a outros dados - F-1.10

Dado o segmento **AB**, o queros dividir en partes proporcionais ós segmentos **a**, **b**, **c** e **d**.

- 1.- Dende o extremo **A** do segmento trazamos unha recta que forme con él un ángulo calquera.
- 2.- Levamos a partir de **A** as medidas consecutivas dos segmentos dados (**a**, **b**, **c**, **d**).
- 3.- Unimos a última medida co extremo **B** do segmento e, coa escuadra e o cartabón, trazamos paralelas polas demais medidas e teremos o **segmento AB dividido en partes proporcionais ós segmentos dados**.

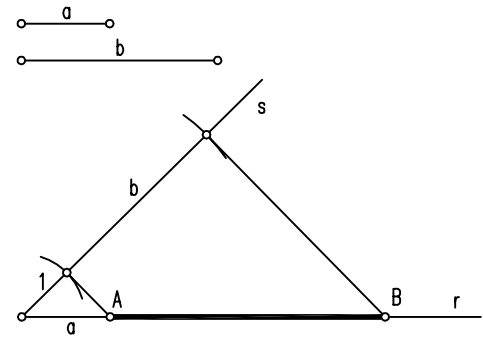


F-1.10

1.11.- Produto de dous segmentos - F-1.11

Dados os segmentos **a** e **b**.

- 1.- Trazamos dúas rectas **r** e **s**, formando un ángulo calquera entre elas.
- 2.- Sobre unha das rectas (**r**) levamos a medida de un dos segmentos (**a**), obtendo o punto **A**.
- 3.- Sobre a outra recta (**s**) levamos a medida da **unidade** (1cm. se traballamos en centímetros). A continuación da unidade levamos a medida do outro segmento (**b**).
- 5.- Unimos o extremo da unidade co punto **A** e, polo extremo do segmento **b**, trazamos unha paralela que nos cortará á recta **r** en **B**. O segmento **AB** será o produto de "**a**" por "**b**".

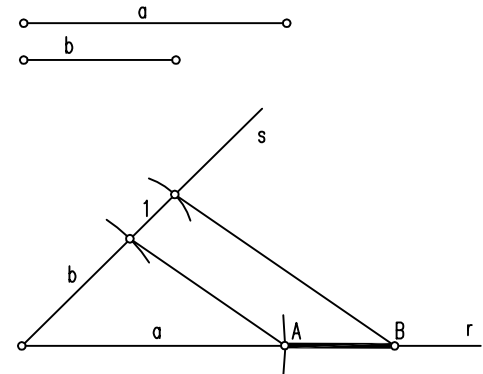


F-1.11

1.12.- División de dous segmentos - F-1.12

Dados os segmentos **a** e **b**.

- 1.- Trazamos dúas rectas **r** e **s**, formando un ángulo calquera entre elas.
- 2.- Sobre unha das rectas (**r**) levamos a medida de un dos segmentos (**a**), obtendo o punto **A**.
- 3.- Sobre a outra recta (**s**) levamos a medida do outro segmento, o divisor (**b**). A continuación de **b** levamos a **unidade** (1cm. se traballamos en centímetros).
- 5.- Unimos o extremo de **b** co extremo de **a** e, polo extremo da unidade, trazamos unha paralela que nos cortará á recta **r** en **B**. O segmento **AB** será o cociente ou división entre "**a**" e "**b**".

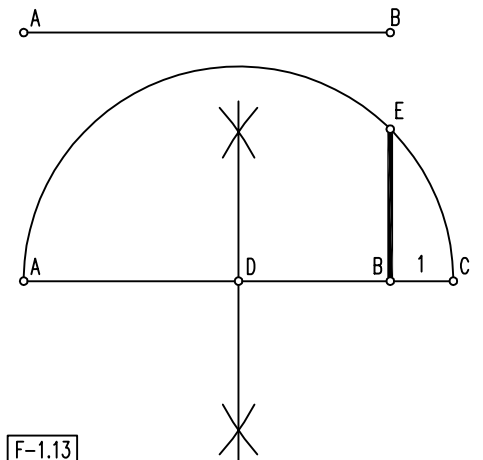


F-1.12

1.13.- Raíz cadrada dun segmento - F-1.13

Dado o segmento **AB**.

- 1.- Trazamos o segmento **AB** e, a partir de un dos extremos, levamos a **unidade**, obtendo o punto **C**.
- 2.- Facemos a mediatriz do segmento AC, obtendo o punto medio D.
- 3.- Con centro en D tramos a semicircunferencia de diámetro AC.
- 4.- Levantando (coa escuadra e o cartabón) a perpendicular ó segmento de partida polo punto **B**, onde corte á circunferencia, obteremos o segmento **BE**, cuxa medida será a **raíz cadrada do segmento AB**.



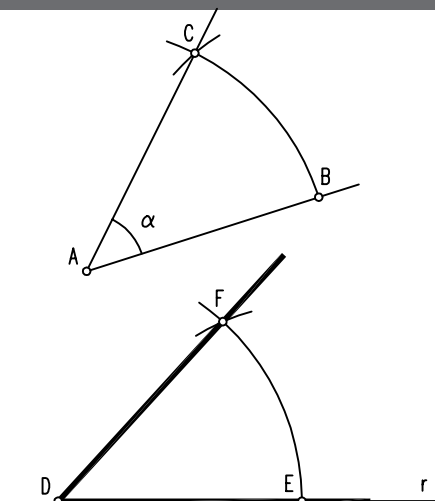
F-1.13

ÁNGULOS

1.14.- Copiar un ángulo - F-1.14

Dado o ángulo α .

- 1.- Con centro no vértice do ángulo (**A**) trazamos un arco (o máis amplo posible para ter maior exactitude. Obtemos os puntos **B** e **C**.
- 2.- Trazamos unha recta **r**, a partir da que imos copiar o ángulo.
- 3.- Con centro no punto **D** (extremo de **r**) trazamos un arco de radio **AB** que cortará a recta **r** en **E**.
- 4.- Collemos, co compás, a distancia **BC** e, con centro en **E**, cortamos ó arco anterior en **F**.
- 5.- Unindo **D** con **F** teremos a recta que **formará con r un ángulo igual a α** .

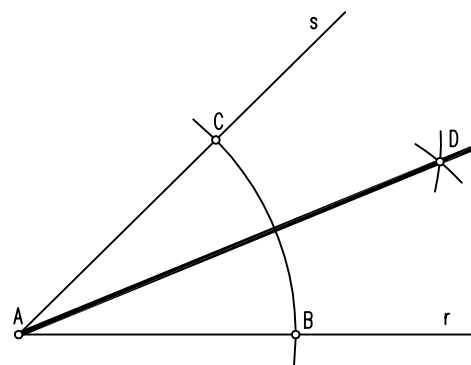


F-1.14

1.15.- Bisectriz dun ángulo - F-1.15

Dadas as rectas r e s .

- 1.- Con centro no punto onde se cortan as rectas (A) trazamos un arco que as cortará en dous puntos B e C . Este arco debe ser o máis amplo posible para ter maior exactitude no trazado.
- 2.- Con un radio calquera e centro en B e C trazamos dous arcos que se cortarán no punto D .
- 3.- Unindo D con A obtémola **bisectriz do ángulo** que forman r e s .

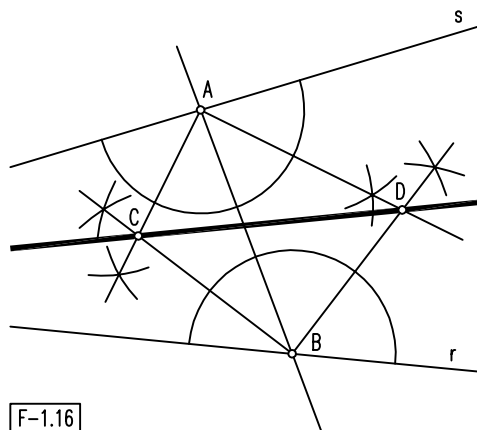


F-1.15

1.16.- Bisectriz dun ángulo formado por dúas rectas cuxo punto de intersección non é accesible - F-1.16

Dadas as rectas r e s .

- 1.- Trazamos unha recta calquera que cortará ás dúas dadas en dous puntos A e B . Temos agora catro ángulos.
- 2.- Aplicando o indicado no punto anterior obtémolas bisectrices dos catro ángulos que ó se cortar dúas a dúas darannos os puntos C e D .
- 3.- Unindo C con D obterémola **bisectriz do ángulo** formado por r e s .

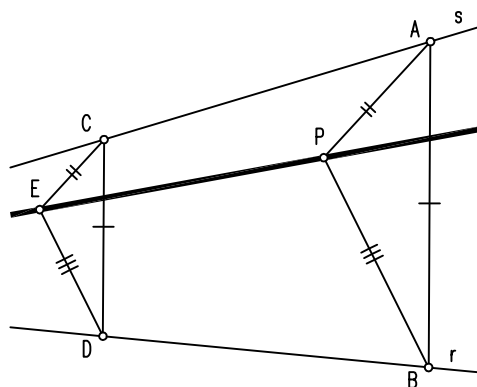


F-1.16

1.17.- Recta concorrente (que se vai cortar no mesmo punto) con outras dúas pasando por un punto dado - F-1.17

Dadas as rectas r e s e o punto P .

- 1.- No lateral das rectas máis cercano ó punto dado P , trazamos unha recta calquera que cortará a r e s en dous puntos (A e B).
- 2.- Unimos os puntos A e B con P .
- 3.- Polo extremo contrario das rectas r e s trazamos unha recta paralela á AB que cortará ás dadas nos puntos C e D .
- 4.- Por C trazamos unha paralela á recta AP e por D outra paralela á recta BP . Ámba-las dúas rectas cortaranse no punto E .
- 5.- Unindo E con P teremos a **recta concorrente con r e s** .



F-1.17

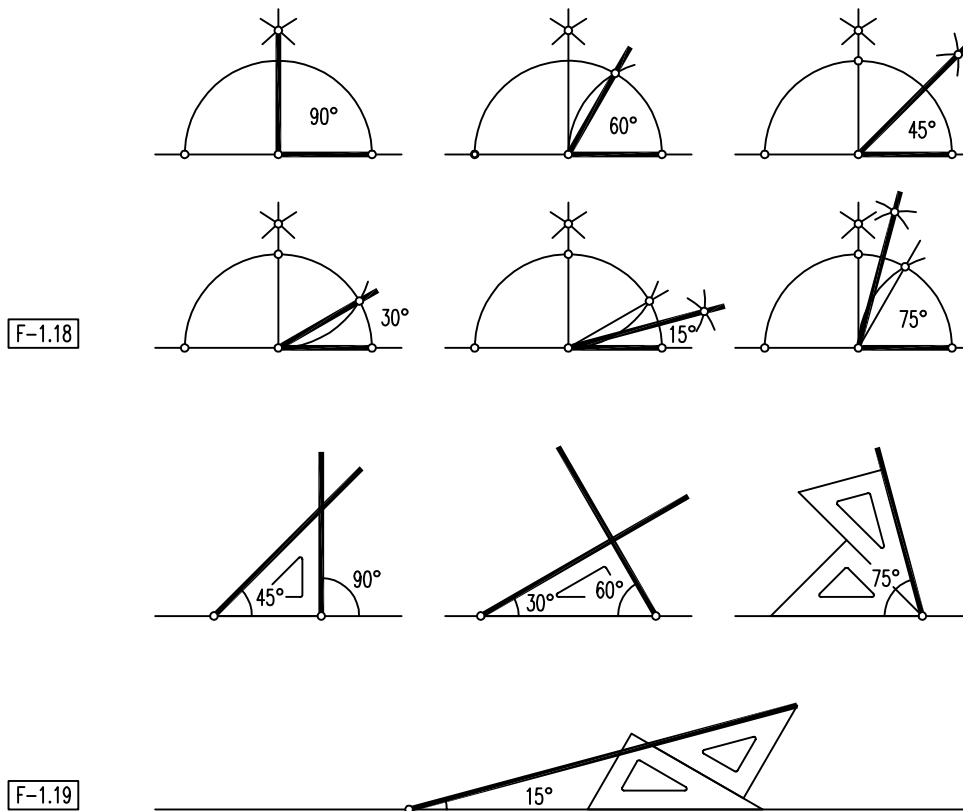
1.18.- Trazado de ángulos co compás - F-1.18

Cando a finalidade do exercicio sexa o trazado dun ángulo, o trazaremos co compás, que é o xeito xeometricamente ortodoxo de facelo. Cando, na resolución de outro trazado calquera, necesitemos trazar un ángulo poderemos facelo co compás, coa escuadra e o cartabón ou co transportador de ángulos. Podemos trazar calquera ángulo con variacións de 15° . Os ángulos de 30° , 60° e 90° os podemos trazar directamente co compás. Os ángulos de 15° , 45° e 75° os trazaremos a partir dos anteriores e facendo a súa bisectriz.

Tódolos ángulos restantes (105° , 120° , 135° , etc.) son variacións dos anteriores e os trazaremos do mesmo xeito.

1.19.- Trazado de ángulos coa escuadra e o cartabón - F-1.19

É aconsellable usar a escuadra e o cartabón, cando sexa posible, para trazar os ángulos que necesitemos (sempre múltiplos de 15°) posto que acadaremos máis exactitude no trazado. Deixaremos o aparello transportador para os ángulos específicos que non sexan múltiplos de 15° .



CIRCUNFERENCIA

1.20.- Circunferencia. Definicións - F-1.20

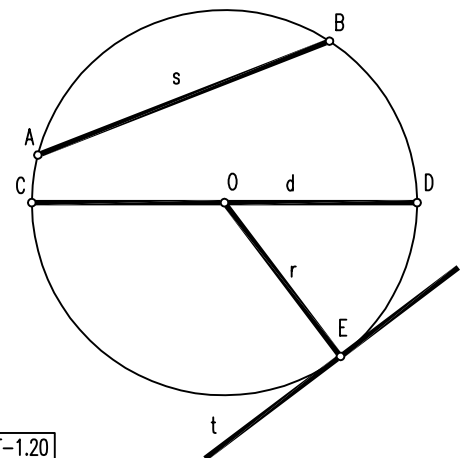
Circunferencia: O lugar xeométrico dos puntos cuxa distancia a outro fixo (o centro) é constante.

Corda: Calquera liña que une dous puntos da circunferencia sen pasar polo centro. (AB).

Diámetro: Calquera liña que une dous puntos da circunferencia pasando polo centro. (CD).

Radio: Calquera liña que une un punto da circunferencia co centro. (EO).

Tanxente: Calquera liña que teña un só punto común (E) coa circunferencia. (t).



1.21.- Ángulos da circunferencia - F-1.21/1.26

Ángulo central: O que ten o seu vértice no centro da circunferencia. F-1.21.

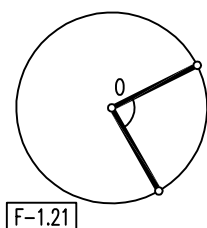
Ángulo inscrito: O que ten o seu vértice nun punto da circunferencia e os lados son cordas. F-1.22.

Ángulo semiinscrito: O que ten o seu vértice nun punto da circunferencia e un lado é unha corda e outro unha tanxente á circunferencia. F-1.23.

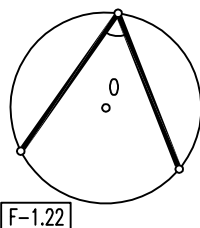
Ángulo interior: O que ten o seu vértice dentro da circunferencia. F-1.24.

Ángulo exterior: O que ten o seu vértice fora da circunferencia e os lados son rectas secantes á circunferencia. F-1.25.

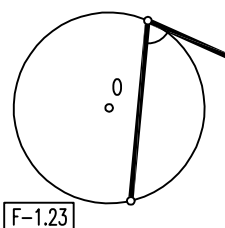
Ángulo circunscrito: O que ten o seu vértice fora da circunferencia e os lados son rectas tanxentes á mesma. F-1.26.



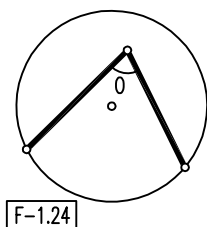
F-1.21



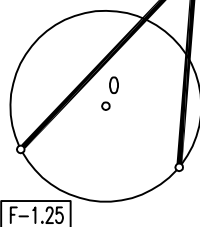
F-1.22



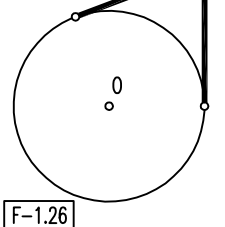
F-1.23



F-1.24



F-1.25



F-1.26

1.22.- Arco capaz - F-1.27

Chamamos **arco capaz** dun ángulo e un segmento ó lugar xeométrico dos puntos desde os cales abarcamos o segmento baixo a cobertura do ángulo. O arco capaz é un arco de circunferencia.

Dados o ángulo α e o segmento **AB**.

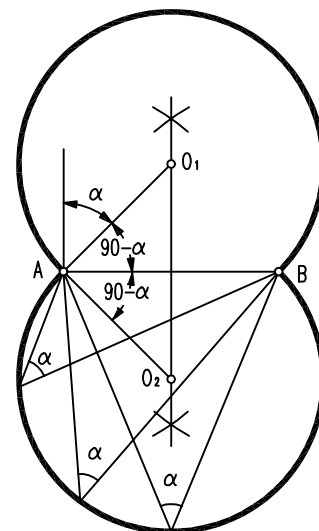
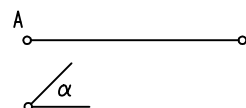
Trazamos a **mediatriz** do segmento **AB**.

Polo extremo **A** do segmento levantamos unha perpendicular e lle restamos o ángulo α . Onde corte á mediatriz do segmento será o centro do arco capaz. (O_1).

Facendo centro en O_1 e radio hasta un dos extremos do segmento dado, trazamos o **arco capaz**.

Tamén podemos trazar o arco capaz simétrico ó de centro O_1 e teremos outro arco capaz que cumprirá as mesmas condicións e con centro O_2 .

Se unimos calquera punto do arco capaz cos extremos **A** e **B** do segmento, o ángulo baixo o cal o vemos será igual ó ángulo α .



F-1.27

2 - POLÍGONOS

TRIÁNGULOS

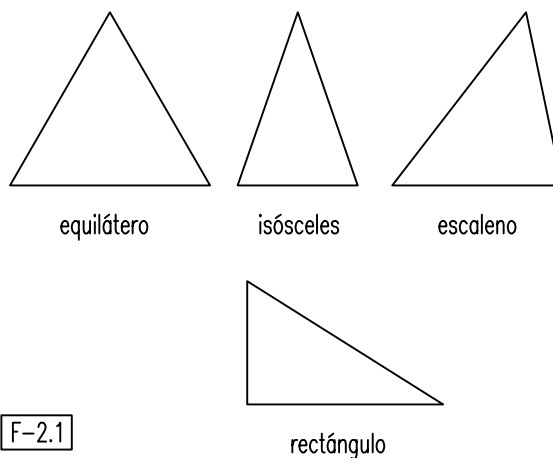
2.1.- Triángulos. Definicións - F-2.1

Triángulo: Polígono de tres lados.

A suma dos tres **ángulos** interiores dun triángulo sempre é de 180° .

Clasificación dos triángulos:

- **Equilátero:** Ten os tres lados iguais.
- **Isósceles:** Ten dous lados iguais e outro desigual.
- **Escaleno:** Ten os tres lados desiguais.
- **Rectángulo:** Unha variante do triángulo escaleno. Un dos ángulos interiores é de 90° .



2.2.- Rectas e puntos natábeis dos triángulos. - F-2.2

Altura.- Recta perpendicular a un lado trazada dende o vértice oposto. O punto de intersección das alturas chámase **ORTOCENTRO**.

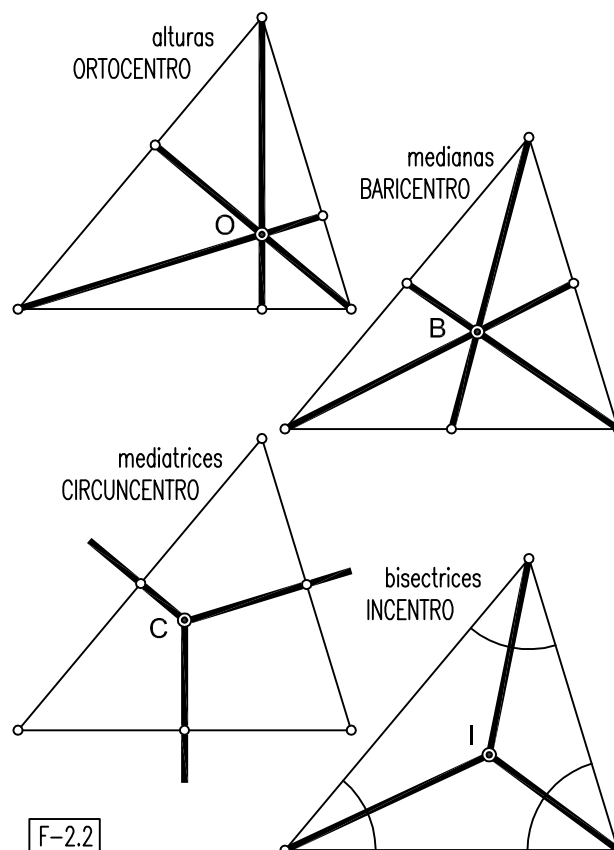
Mediana.- Recta que une un vértice co punto medio do lado oposto. O punto de intersección das medianas chámase **BARICENTRO**; tamén coñecido en Física como **centro de gravidade** que é o punto de equilibrio no que podemos considerar concentrada toda a masa dun obxecto.

Mediatriz.- Recta perpendicular a un lado no punto medio. O punto de intersección das mediatrices chámase **CIRCUNCENTRO**.

Bisectriz.- Recta que divide un ángulo en dous partes iguais. O punto de intersección das bisectrices chámase **INCENTRO**.

NOTA XERAL.- Para o trazado dos polígonos en xeral (triángulos, cuadriláteros, etc) veremos unha serie de procedementos gráficos que, aparentemente, deberíamos saber de memoria. Nada máis lonxe da realidade.

En xeral (e no caso dos triángulos e dos cuadriláteros especialmente) os procedementos de trazado os poderemos deducir de forma sinxela se marcamos os datos de partida por riba do debuxo esquemático do polígono a debuxar: A súa xeometría indicaranos, visualmente, cal é o procedemento de trazado.



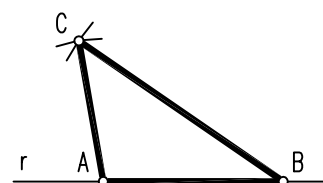
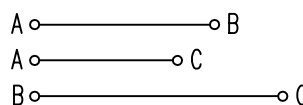
2.3.- Trazado do triángulo coñecidos os tres lados. - F-2.3

Dados os lados **AB**, **AC** e **BC**.

Levamos o segmento **AB** (base do triángulo) sobre unha recta calquera **r**.

Con centro en **A** e radio **AC** trazamos un arco. Con centro en **B** e radio **BC** cortamos o arco anterior e obteremos o vértice **C**.

Unimos **A** e **B** con **C** e temos o triángulo.



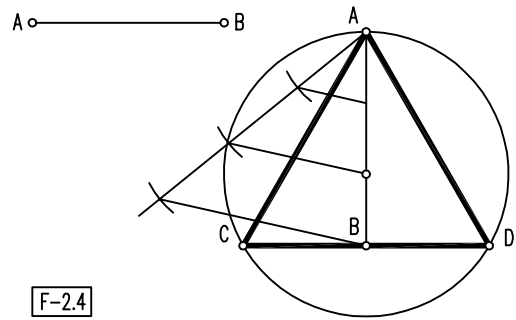
2.4.- Trazado dun triángulo equilátero coñecida a altura. - F-2.4

Dada a altura **AB**.

Dividimos o segmento **AB** en tres partes iguais.

Facendo centro na primeira división (contando desde abaixo) con radio até o punto **A**, trazamos unha circunferencia (na que estará inscrito o triángulo equilátero).

Trazamos unha perpendicular ó segmento **AB** polo punto inferior **B**; onde corte á circunferencia obterémolos vértices **C** e **D**. Unindo **C** e **B** con **A** obterémolo triángulo equilátero buscado.



F-2.4

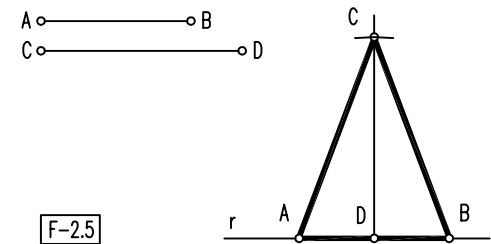
2.5.- Trazado dun triángulo isósceles coñecidas a base e a altura. - F-2.5

Dadas a base **AB** e a altura **CD**.

Levamos a medida da base **AB** sobre unha recta calquera **r**.

Facemos a mediatriz de **AB** e obtemos o seu punto medio **D**.

Levamos a altura **BC** sobre a mediatriz e unimos con **A** e **B**.



F-2.5

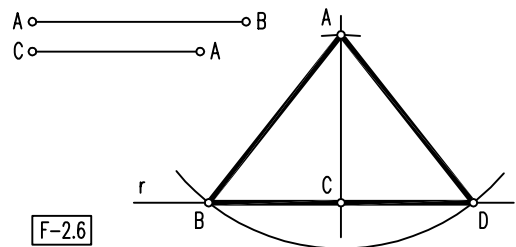
2.6.- Trazado dun triángulo isósceles coñecidos os lados iguais e a altura. - F-2.6

Dados o lado **AB** e a altura **CA**.

Sobre unha recta **r** calquera marcamos o punto **C** e levantamos unha recta perpendicular a **r** dende ese punto **C**.

Levamos a medida **CA** a partir do punto **C**, obtendo o vértice superior **A**.

Con centro en **A** e radio **AB** cortamos á recta **r** nos puntos **B** e **D**, os vértices ba base do triángulo isósceles buscado.



F-2.6

2.7.- Trazado dun triángulo isósceles coñecidos á base e o ángulo oposto a ela. - F-2.7

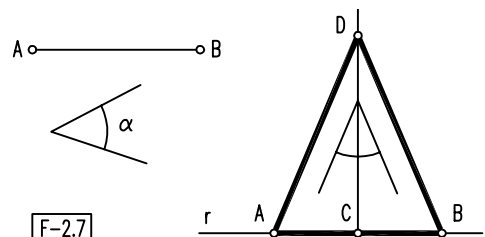
Dados a base **AB** e o ángulo α .

Sobre unha recta **r** calquera levamos a base **AB**.

Facemos a mediatriz do segmento **AB** e obtémolo punto medio **C**. Levantamos unha perpendicular á **r** a partir de **C**.

A partir de calquera punto da perpendicular copiamos o ángulo α de xeito que a perpendicular trazada sexa a súa bisectriz (ver o trazado no apartado 1.14).

Por **A** e **B** trazamos paralelas ós lados do ángulo e obteremos o vértice superior **D** do triángulo isósceles.



F-2.7

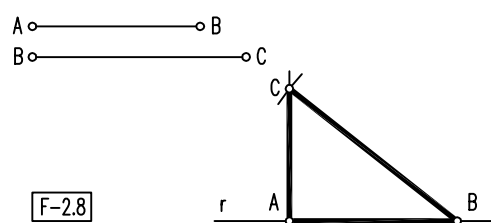
2.8.- Trazado dun triángulo rectángulo coñecidos un cateto e a hipotenusa. - F-2.8

Dados o cateto **AB** e a hipotenusa **BC**.

Sobre unha recta calquera **r** levamos a medida do cateto **AB**.

Polo extremo **A** levantamos unha perpendicular á recta **r**.

Con centro en **B** e radio **BC** tramos un arco que cortará á perpendicular no punto **C**, vértice superior do triángulo rectángulo.



F-2.8

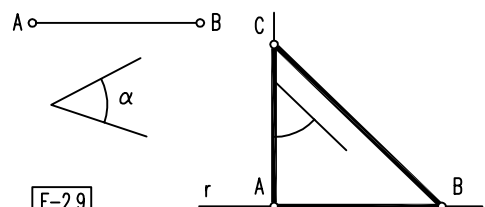
2.9.- Trazado dun triángulo rectángulo coñecidos un cateto e o ángulo oposto. - F-2.9

Dados o cateto **AB** e o ángulo α .

Sobre unha recta calquera **r** levamos a medida do cateto **AB**. Polo extremo **A** levantamos unha perpendicular á recta **r**.

A partir dun punto calquera da perpendicular copiamos o ángulo α .

Polo extremo **B** trazamos unha recta paralela ó lado do ángulo, que cortará á perpendicular no vértice **C** do triángulo rectángulo.



F-2.9

CUADRILÁTEROS

2.10.-Cuadriláteros. Definicións. - F-2.10

Cuadrilátero: Polígono de catro lados.

Clasificación dos cuadriláteros:

PARALELOGRAMOS.- Polígonos de catro lados paralelos.

- **Cadrado:** Polígono de catro lados iguais. Ten os lados paralelos dous a dous. Ten catro ángulos iguais de 90°

- **Rectángulo:** Polígono de catro lados iguais dous a dous. Ten os lados paralelos dous a dous. Ten catro ángulos iguais de 90° .

- **Rombo:** Polígono de catro lados iguais. Ten os lados paralelos dous a dous.

- **Romboide:** Polígono de catro lados iguais dous a dous. Ten os lados paralelos dous a dous.

TRAPECIOS.- Polígonos de catro lados. Dous lados (as bases) paralelos e outros dous non paralelos.

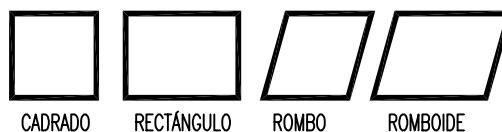
- **Trapezio isósceles:** Os lados non paralelos son iguais e simétricos, de xeito que se os continuamos darían (xunto coa base inferior) un triángulo isósceles.

- **Trapezio rectángulo:** Un dos lados non paralelos forma 90° cos lados paralelos.

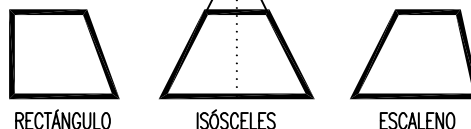
- **Trapezio escaleno** (ou oblicuo): O resto.

TRAPEZOIDES.- Polígonos de catro lados non paralelos.

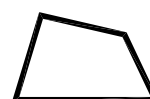
PARALELOGRAMOS



TRAPECIOS



TRAPEZOIDE



F-2.10

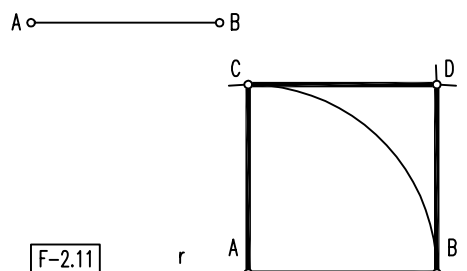
2.11.- Trazado dun cadrado dado o lado - F-2.11

Dado o lado **AB**.

Sobre unha recta **r** levamos a medida do lado **AB**.

Polo extremo **A** levantamos unha perpendicular á **r**. Con centro en **A** e radio **AB** cortamos á perpendicular no punto **C**.

De novo, con radio **AB** e centro en **C** e **B** trazamos dous arcos que se han cortar no punto **D**. Unimos os catro vértices obtidos e terémolo cadrado.



F-2.11

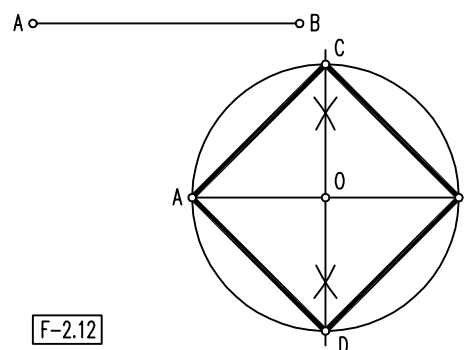
2.12.- Trazado dun cadrado dada a diagonal F-2.12

Dada a diagonal **AB**.

Trazamos a mediatriz de **AB** e obtémolo punto medio **O**.

Con centro en **O** e radio **OA** trazamos a circunferencia que ten por diámetro a diagonal e que será por tanto a circunferencia na que está inscrito o cadrado buscado.

A circunferencia cortará á perpendicular ó segmento **AB** nos puntos **C** e **D** que serán os vértices que faltaban do cadrado.



F-2.12

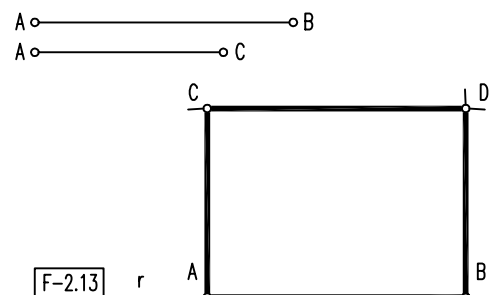
2.13.- Trazado dun rectángulo dados os lados F-2.13

Dados os lados **AB** e **AC**.

Sobre unha recta calquera **r** levamos a medida de un dos lados (no noso caso o **AB**).

Polo extremo **A** levantamos unha perpendicular e levamos, a partir de **A**, a medida do outro lado **AC**.

Con centro en **C** e radio **AB** trazamos un arco. Con centro en **B** e radio **AC** o cortamos, obtendo o punto **D** que é o vértice que faltaba do rectángulo.



F-2.13

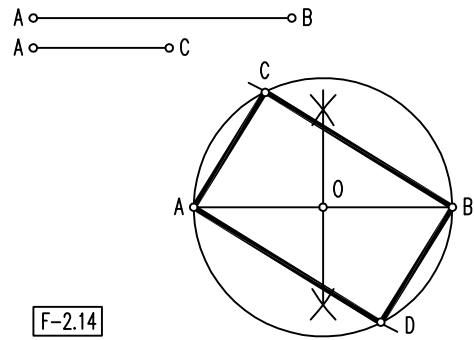
2.14.- Trazado dun rectángulo dados o lado e a diagonal - F-2.14

Dados a diagonal **AB** e o lado **AC**.

Partindo da diagonal **AB** obtemos o seu punto medio **O** (trazamos a mediatriz).

Con centro en **O** e radio **OA** trazamos unha circunferencia.

Con centro en **A** e radio o lado, cortamos á circunferencia no punto **C**. Con centro en **B** e o mesmo radio anterior cortamos á circunferencia no punto **D**, obtendo así os catro vértices do rectángulo.



F-2.14

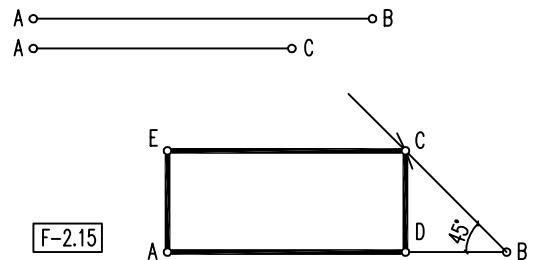
2.15.- Trazado dun rectángulo dados a suma dos lados e a diagonal - F-2.15

Dados a suma dos lados **AB** e a diagonal **AC**.

Partindo da suma dos lados **AB**, trazamos por un dos extremos (no noso caso o **B**) un ángulo de 45° con respecto o segmento suma. Con centro no outro extremo (o punto **A**) e radio a diagonal, cortamos o ángulo anterior no punto **C**.

Polo punto **C** trazamos unha perpendicular a **AB** e obtemos o punto **D**.

Polo punto **C** trazamos unha paralela a **AB**. Polo punto **A** levantamos unha perpendicular a **AB** e obtemos o punto **E** que era o vértice que nos faltaba.



F-2.15

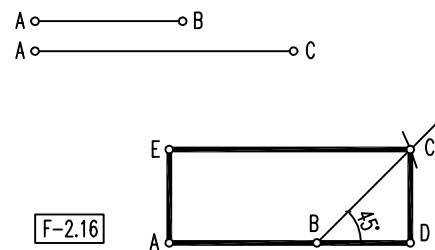
2.16.- Trazado dun rectángulo dados a diferencia dos lados e a diagonal - F-2.16

Dados a diferencia dos lados **AB** e a diagonal **AC**.

Partindo da diferencia dos lados **AB**, trazamos por un dos extremos (no noso caso o **B**) un ángulo de 135° con respecto o segmento suma ($180^\circ - 45^\circ$). Con centro no outro extremo (o punto **A**) e radio a diagonal, cortamos o ángulo anterior no punto **C**.

Polo punto **C** trazamos unha perpendicular a **AB** e obtemos o punto **D**.

Polo punto **C** trazamos unha paralela a **AB**. Polo punto **A** levantamos unha perpendicular a **AB** e obtemos o punto **E** que era o vértice que nos faltaba.



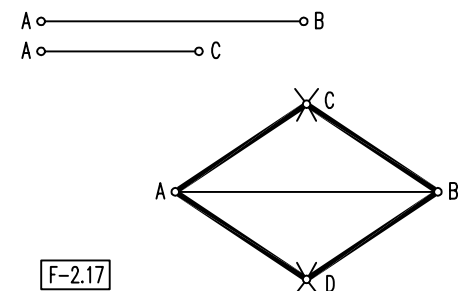
F-2.16

2.17.- Trazado dun rombo dados o lado e unha diagonal - F-2.17

Dados a diagonal **AB** e o lado **AC**.

Debuxamos a diagonal **AB**.

Con radio o lado e facendo centro en **A** e **B**, trazamos dous pares de arcos que se han cortar nos puntos **C** e **D**, que son os dous vértices que faltaban do rombo.



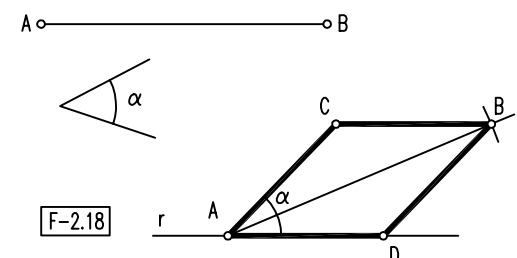
F-2.17

2.18.- Trazado dun rombo dados un ángulo e unha diagonal - F-2.18

Dados a diagonal **AB** e o ángulo α .

Con un dos lados nunha recta calquera **r** copiamos o ángulo α . Debuxamos a **bisectriz** do ángulo e marcamos sobre ela a distancia **AB**.

Polo extremo **B** trazamos rectas paralelas ós lados do ángulo que se han cortar con aqueles en **C** e **D**, os vértices que faltaban do rombo.



F-2.18

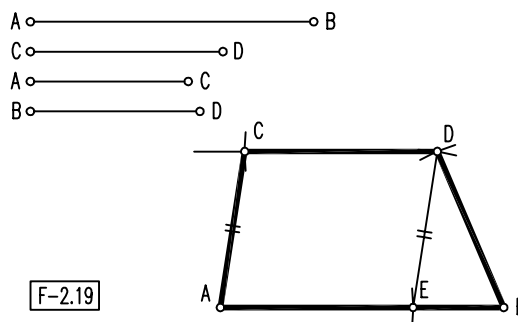
2.19.- Trazado dun trapezio escaleno dados os lados - F-2.19

Dadas as bases **AB** e **CD** e os lados **AC** e **BD**.

Collemos o lado da base inferior **AB**. A partir do extremo esquerdo **A** levamos a medida da base superior **CD**, obtendo o punto **E**.

Con centro en **E** e radio a medida dun lado lateral (**AC**) trazamos un arco e o cortamos con outro de centro **B** e radio a medida do outro lado lateral (**BD**). Obtemos deste xeito o vértice superior **D**.

Trazamos por **D** unha paralela á base inferior **AB** e levamos sobre ela a medida **DC** para obter o vértice **C** que era o que nos faltaba para completar o trapezio.



F-2.19

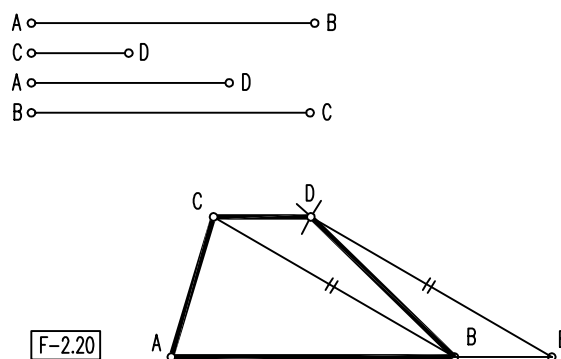
2.20.- Trazado dun trapezio escaleno dadas as bases e as diagonais - F-2.20

Dadas as bases **AB** e **CD** e as diagonais **AD** e **BC**.

Collemos o lado da base inferior **AB**. A partir do extremo dereito engadímoslle a medida da base superior **CD**, obtendo o punto **E**.

Con centro en **E** e radio a medida de unha das diagonais (**BC**) trazamos un arco e o cortamos con outro de centro **A** e radio a medida da outra diagonal (**AD**). Obtemos deste xeito o vértice superior **D**.

Trazamos por **D** unha paralela á base inferior **AB** e levamos sobre ela a medida **CD** para obter o vértice **C** que era o que nos faltaba para completar o trapezio.



F-2.20

POLÍGONOS REGULARES

2.21.-Polígonos Regulares. Definicións.

Polígono regular: Figura xeométrica pechada e plana na que tódolos lados son iguais e tódolos angulos tamén son iguais.

CLASIFICACIÓN

- **Triángulo equilátero.**- Polígono regular de 3 lados.
- **Cadrado.**- Polígono regular de 4 lados.
- **Pentágono.**- Polígono regular de 5 lados.
- **Hexágono.**- Polígono regular de 6 lados.
- **Heptágono.**- Polígono regular de 7 lados.
- **Octógono.**- Polígono regular de 8 lados.
- **Nonágono.**- Polígono regular de 9 lados.
- **Decágono, undecágono, dodecágono,** etc.

DEFINICIÓNS

- **Radio:** A recta que une o centro do polígono con un vértice calquera. Coincide co radio da circunferencia circunscrita ó polígono.
- **Apotema:** A recta que une o centro do polígono co punto medio de calquera lado. Coincide co radio da circunferencia inscrita no polígono.
- **Altura:** A recta que une o punto medio dun lado co vértice oposto (no caso de ter un número impar de lados). A recta que une os puntos medios de lados opostos (no caso de ter un número par de lados).
- **Diagonal:** A recta que une dous vértices non consecutivos.
- **Diagonal principal:** A recta que une dous vértices opostos nos polígonos con un número par de lados.
- **Perímetro:** A suma das lonxitudes de tódolos lados.

2.22.- Trazado dun polígono regular dado o radio da circunferencia na que está inscrito. Método xeral aproximado - F-2.21

Dado o radio da circunferencia **OA**.

Calquera método de división dunha circunferencia en varias partes iguais é, necesariamente, aproximado posto que, na lonxitude da circunferencia, entra o número π (xa sabedes $2\pi r$) que é irracional e non permite obter unha lonxitude exacta dela.

Trazado:

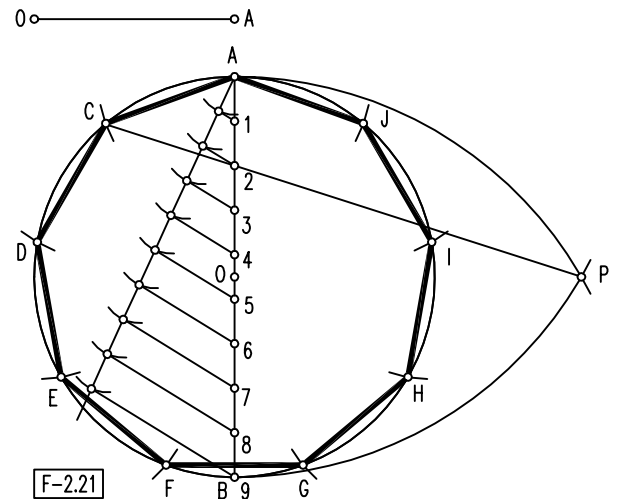
Con centro en **O** e radio **OA** trazamos unha circunferencia, na que vai estar inscrito o noso polígono (que vai ser, neste caso, de 9 lados).

Trazamos un diámetro **AB** calquera pasando polo centro **O**. Dividimos o diámetro **AB** en tantas partes iguais como lados vaia ter o polígono (no noso caso 9).

Con radio **AB** e centros en **A** e en **B** tramos dous arcos que se cortarán no punto **P**. Unimos **P** coa segunda división do diámetro (sempre coa segunda) e continuamos a liña ata cortar á circunferencia no punto **C**. O segmento **AC** vai ser o lado do polígono.

Con radio **AC** e facendo centros sucesivos nos puntos da circunferencia xa obtidos, imos marcando os vértices do noso polígono.

Poderemos comprobar que ó final, o derradeiro lado é un pouco máis pequeno ou un pouco máis grande que os demais (isto é porque, como xa dixen, o método é aproximado e porque o trazado manual ten pequenos erros). Axustamos a medida do lado e corriximos de novo todos eles ata conseguir que midan o mesmo.



F-2.21

2.23.- Trazado dun polígono regular dado o lado. Método xeral aproximado.

Primeiro método - F-2.22/F-2.23

Dado o lado **AB**.

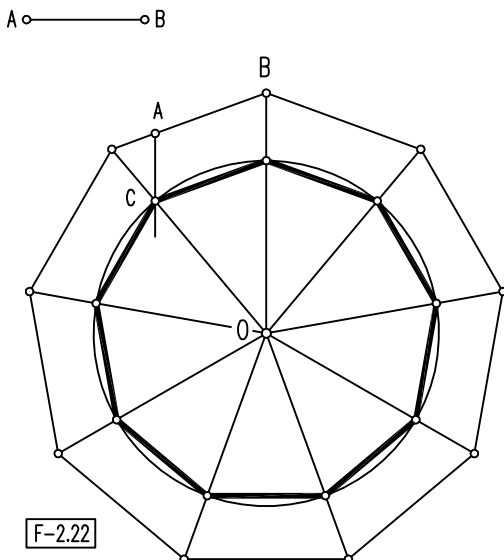
Utilizando o método do punto anterior debuxamos un polígono regular de tantos lados como vaia ter o noso (9 lados). Convén debuxar a circunferencia o mais grande posible para ter mais exactitude.

Unimos os vértices do polígono co centro **O** da circunferencia.

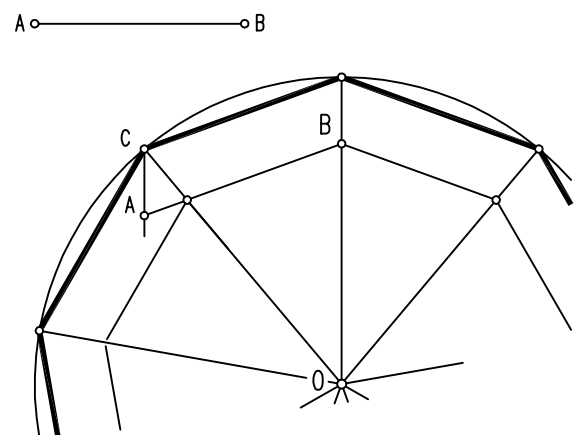
Sobre un dos lados do polígono levamos a medida do lado **AB** e, polo punto **A**, trazamos unha paralela ó radio da circunferencia que pasa polo vértice **B**, que cortará no punto **C** ó radio da circunferencia adxacente.

Con centro en **O** e radio **OC** trazamos unha circunferencia que será na que está inscrito o noso polígono. Como xa temos os radios trazados só temos que unir os vértices respectivos.

Se o lado do noso polígono é maior que o que resulta do polígono que trazamos inicialmente, o trazado é similar, coa diferenza de que o polígono que buscamos vai quedar paralelo ó primeiro polo exterior (F-2.23)



F-2.22



F-2.23

Segundo método - F-2.24

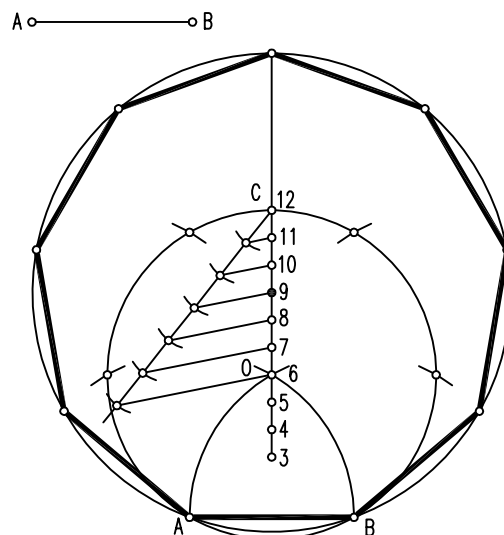
Dado o lado **AB**.

Con radio **AB** e centro en **A** e en **B** trazamos dous arcos que se cortan no punto **O**. Con centro en **O** e radio **OA** trazamos unha circunferencia na que estaría inscrito un hexágono de lado **AB** (se levamos o lado **AB** sucesivas veces sobre ela vemos que a divide en seis partes iguais).

Collemos un radio vertical de esta circunferencia (**OC**) e o dividimos en seis partes iguais. Cada unha de estas partes vai ser o centro de unha circunferencia na que estará inscrito un polígono regular de lado **AB** e determinado número de lados. O punto **O** (coincidente co punto **6**) será, como xa vimos, o centro de unha circunferencia na que estará inscrito un **hexágono**. O punto **7** será o centro de unha circunferencia na que estará inscrito un **heptágono** de lado **AB**, e así sucesivamente.

Como nós queremos facer un **nonágono**, facemos centro no punto **9** e, con radio **9A**, trazamos unha circunferencia. Levando o lado **AB** sucesivas veces dividiremos a circunferencia (cos axustes necesarios dado que o trazado non é exacto) en **nove** partes iguais á medida do lado **AB**.

Tamén podemos obter os centros das circunferencias nas que estarán inscritos un **pentágono**, un **cadrado** ou un **triángulo equilátero** de lado **AB**; soamente temos que levar as distancias do radio cara abaixo e obteremos os centros das circunferencia correspondentes.



F-2.24

3 - PROPORCIÓNS

PROPORCIONALIDADE

3.1.- Proporción

Proporción: Unha proporción é unha relación entre dous ou máis elementos. En xeometría analítica á proporción entre dous números lle chamamos **cociente** ou **división**.

No apartado 1.8 falabamos do **Teorema de thales** que establece unha relación ou proporción entre segmentos de rectas.

Unha proporción sinxela é a que podemos establecer entre **catro segmentos**, de tal xeito que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Cada un destes segmentos será **cuarto proporcional** dos outros tres.

Se facemos que un dos segmentos apareza dúas veces, a proporción quedará do seguinte xeito:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Os segmentos **a** e **c** serán **terceiros proporcionais** con respecto os outros e o segmento que está repetido, o **b**, será **medio proporcional** con respecto os outros dous.

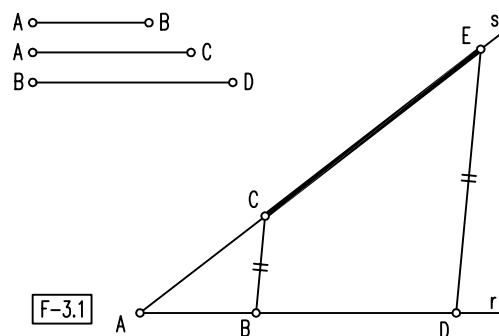
3.2.- Segmento cuarto proporcional de outros tres - F-3.1

Dados os segmentos **AB**, **AC** e **BD**.

Collemos dúas rectas **r** e **s** que se cortan formando un ángulo calquera. Sobre a recta **r** levamos o segmento **AB** e, a continuación, o segmento **BD**.

Sobre a recta **s** levamos o segmento **AC** e unimos o punto **C** co punto **B**. Polo extremo **D** tramos unha paralela á recta **CB** que nos dará o punto **E** na recta **s**. O segmento **CE** será o segmento **cuarto proporcional** con respecto ós outros tres, de tal xeito que se cumprirá a seguinte relación:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$$



3.3.- Segmento terceiro proporcional de outros dous - F-3.2

Dados os segmentos **AB** e **AC** (éste é o segmento medio).

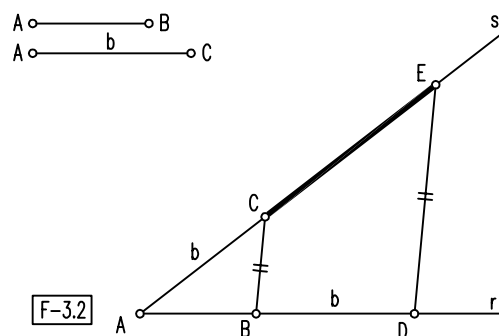
Collemos dúas rectas **r** e **s** que se cortan formando un ángulo calquera.

Sobre a recta **r** levamos o segmento **AB** e, a continuación, unha medida **b** igual á do segmento **AC**, que será o segmento **medio proporcional**.

Sobre a recta **s** levamos o segmento **AC** e unimos o punto **C** co punto **B**.

Polo extremo **D** tramos unha paralela á recta **CB** que nos dará o punto **E** na recta **s**. O segmento **CE** será o segmento **terceiro proporcional** con respecto ós outros dous, de tal xeito que se cumprirá a seguinte relación:

$$\frac{AB}{b} = \frac{b}{CE}$$



3.4.- Segmento medio proporcional de outros dous

TEOREMA DO CATETO - F-3.3.

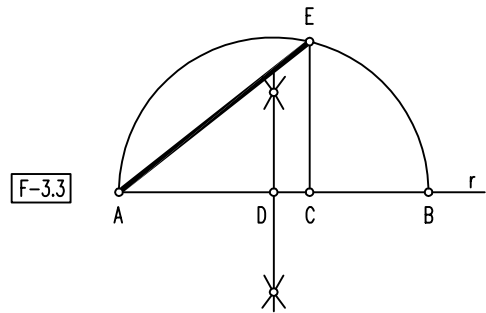
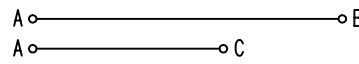
Dados os segmentos **AB** e **AC**

Sobre unha recta **r** calquera levamos o segmento **AB** e, de novo dende o punto **A**, o segmento **AC**.

Facemos a mediatriz de **AB** e, dende o punto medio **D**, facemos unha semicircunferencia de diámetro **AB**.

Levantamos unha perpendicular á recta **r** dende o punto **C**, que cortará á semicircunferencia en **E**. O segmento **AE** será o segmento **medio proporcional** buscado e se cumprirá a seguinte relación:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AC}$$



TEOREMA DA ALTURA - F-3.4.

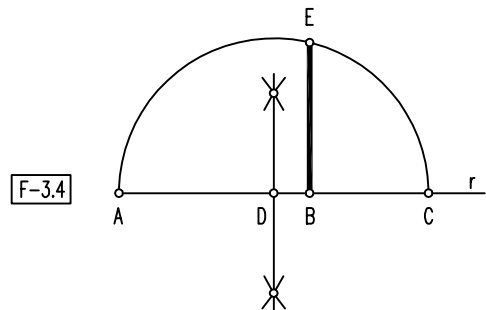
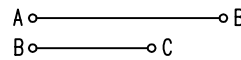
Dados os segmentos **AB** e **BC**

Sobre unha recta **r** calquera levamos o segmento **AB** e, a continuación, o segmento **BC**.

Facemos a mediatriz de **AC** e, dende o punto medio **D**, facemos unha semicircunferencia de diámetro **AB**.

Levantamos unha perpendicular á recta **r** dende o punto **B**, que cortará á semicircunferencia en **E**. O segmento **BE** será o segmento **medio proporcional** buscado e se cumprirá a seguinte relación:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{BC}$$



3.5.- A proporción áurea

Atopámonos aquí co que poderíamos chamar a **proporción das proporcións**.

A proporción áurea é a que se fai co mínimo número de elementos; de feito a facemos coun segmento nada máis. É a proporción que existe entre un segmento e unha parte del.

Se collemos un segmento **AC** e o dividimos en dous **AB** e **BC**, a situación do punto **B** determinará a proporción áurea cando se cumpra a seguinte relación:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AC} = 1,618...$$

A natureza (as plantas, as árbores, etc.) medra en proporción áurea, o noso corpo ten entre as diferentes partes medidas en proporción áurea.

A proporción áurea é coñecida (e utilizada) dende as culturas máis antigas. Aparece nas construcións asirias, exipcias e precolombinas. Os gregos e os romanos construíron a súa arquitectura coa proporción áurea. O gótico está baseado, en grande medida, en esta proporción. Os artistas de tódalas épocas (pintores, escultores, gravadores, fotógrafos) a teñen usado nas súas composicións... e aínda é usada no día de hoxe.

O número resultante da proporción áurea, tamén chamado **número de ouro** é un número irracional

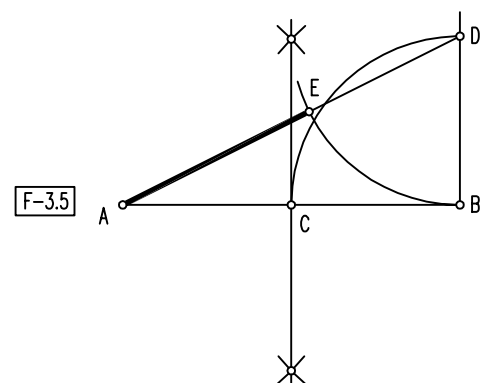
3.6.- Obter a parte aurea dun segmento - F-3.5

Dado o segmento **AB**.

Facemos a mediatriz de **AB** e obtemos o punto medio **C**.

Levantamos unha perpendicular ó segmento **AB** polo extremo **B** e levamos sobre ela a medida **BC**, obtendo o punto **D**.

Unimos **A** con **D** e, con centro en **D**, tramos un arco de radio **DB**, que cortará ó segmento **AD** no punto **E**. A parte áurea do segmento **AB** será o segmento **AE**.



3.7.- Dada a parte aurea dun segmento obter o segmento. O rectángulo aureo - F-3.6

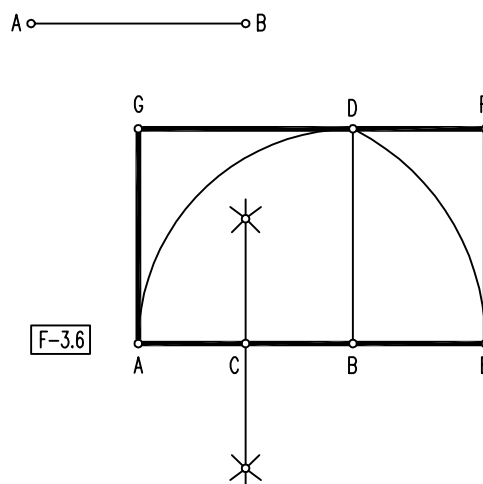
Dado o segmento **AB**.

Partindo do segmento **AB**, trazamos o **cadrado** que teña como lado este segmento: **ABDG**.

Facemos a mediatriz de **AB** e obtemos o punto medio **C**.

Con centro en **C** e radio **CD** trazamos un arco que cortará á prolongación de **AB** no punto **E**. O segmento **AE** será o segmento do cal **AB** é a súa parte áurea.

O **rectángulo áureo** é aquel que ten por lado maior un segmento (**AE**) e por lado menor outro (**AG**), cuxa medida é a parte aurea do primeiro.



SEMELLANZA

3.8.- Semellanza - Conceptos

Semellanza: Dous polígonos son semellantes cando teñen os ángulos respectivos iguais e os lados proporcionais.

A **semellanza** e a **escala** son o mesmo. Unha figura semellante a outra e igual a ela pero de distinto tamaño e a diferenza de tamaño ven definida, como xa veremos, pola escala.

A **razón de semellanza** é a que determina a relación de tamaño entre unha figura e a súa semellante. Se o cociente é maior que 1 a figura semellante á dada será maior; se é menor que 1 será menor.

O **centro de semellanza** é o punto no que conflúen as liñas trazadas unindo tódolos puntos e os seus seme-llantes.

3.9.- Semellanza directa - F-3.7

Unha figura e a súa directamente semellante son **iguais pero de diferente tamaño**.

Dado o polígono **ABCDE** e a razón de semellanza **3/2**.

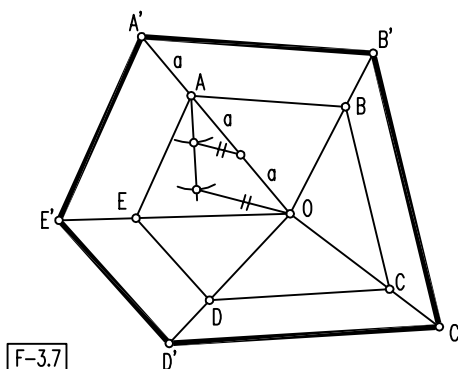
A figura semellante á dada será maior ca ela posto que o cociente de $3/2$ é maior ca 1.

Collemos un punto **O** calquera (que chamaremos centro de semellanza). E conveniente, para ter maior exactitude no trazado, coller o centro de semellanza o máis centrado posible no polígono.

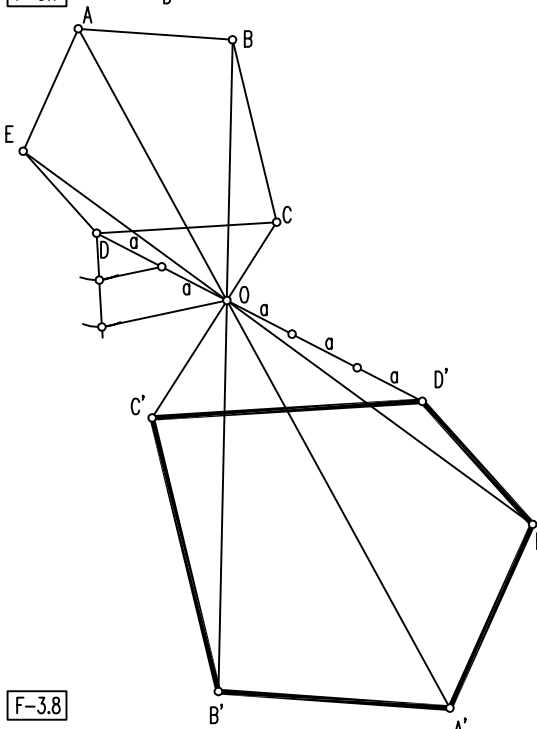
Unimos tódolos vértices do polígono **ABCDE** co centro **O** e continuamos tódalas liñas cara a fora.

Dividimos un dos segmentos obtidos (por exemplo o **OA**) en tantas partes iguais como indica o denominador da razón de semellanza (ou sexa dúas). Collemos unha de estas partes e a engadimos a partir do punto **A**, posto que deberemos coller tantas partes como indica o numerador da razón de semellanza (ou sexa tres). Deste xeito obtemos o vértice **A'**, semellante o vértice **A**.

Trazamos, a partir do vértice **A** rectas paralelas ós lados do polígono orixinal que nos darán o resto dos vértices do polígono semellante ó dado a medida que corten os radios trazados con centro en **O**.



F-3.7



F-3.8

3.10.- Semellanza inversa - F-3.8

Unha figura e a súa inversamente semellante son **simétricas** (con respecto o centro de semellanza, que será tamén o centro de simetría) e **de diferente tamaño**.

Dado o polígono **ABCDE** e a razón de semellanza **-3/2**.

Collemos un centro de semellanza **O** calquera.

Unimos tódolos vértices do polígono **ABCDE** co centro **O** e continuamos tódalas liñas cara o lado contrario.

Dividimos un dos segmentos obtidos (por exemplo o **OD**) en tantas partes iguais como indica o denominador da razón de semellanza (ou sexa dúas) e levamos dende **O**, cara o outro lado, tantas destas partes como indica o numerador da razón de semellanza (ou sexa, tres). Deste xeito obtemos o vértice **A'**, inversamente semellante o vértice **A**.

Trazamos, a partir do vértice **A** rectas paralelas ós lados respectivos do polígono orixinal, que nos darán o resto dos vértices do polígono semellante ó dado a medida que corten os radios trazados con centro en **O**.

ESCALAS

3.11.- Escalas - Conceptos

Escala: É a relación ou proporción que existe entre dous elementos. É un cociente onde o **numerador representa o noso debuxo e o denominador a realidade**. Como xa dixemos, escala é sinónimo de semellanza directa, polo que un debuxo a escala é igual ó elemento debuxado pero de diferente tamaño.

Escala de redución: É a máis usual, na que o debuxo é máis pequeno que o elemento real representado. 1/50, 2/7, 1/10.000, etc. Úsanse en debuxos de arquitectura, urbanismo, enxeñería, etc.

Escala de ampliación: É aquela na que o debuxo é máis grande que o elemento real representado. 10/1, 10.000/1, etc. Úsanse en debuxos de microprocesadores, circuítos impresos, relojería, nanotecnoloxía, etc.

3.12.- Escala gráfica - F-3.9

Unha **escala gráfica** é unha regra debuxada coa que poderemos poñer as medidas en un debuxo a determinada escala. No obxecto real tomaremos as medidas con unha regra normal ou con un calibre e, no noso debuxo, as poñeremos coa nosa escala gráfica debuxada.

Unha escala gráfica debera permitírnos medir en **décimas** de unidade (con un decimal) polo que deberemos debuxar a “**contraescala**” para ter a unidade de medida dividida en dez partes iguais.

Construción de unha escala gráfica:

Supoñamos que queremos facer a escala gráfica **1:75**. Poderíamos dividir 1 centímetro en 75 partes iguais e cada unha de esas partes sería 1cm a escala 1:75; obviamente isto non é posible, máxime tendo en conta que deberemos facer a contraescala. É necesario chegar a unha unidade de medida que poidamos manexar con exactitude.

Para chegar á unidade axeitada facemos unha táboa: Á esquerda poñemos a unidade de partida no debuxo (1cm) e, a dereita, a unidade na realidade. 75cm son o mesmo que 7,2dm, e o mesmo que 0,75m. Deberemos entón dividir 1cm en 0,75 partes, para o cal tomamos (utilizando o teorema de Thales) 7,5cm que o unimos co extremo do centímetro de partida e trazamos unha paralela pola medida de 10cm que corresponde a unidade na nosa escala gráfica.

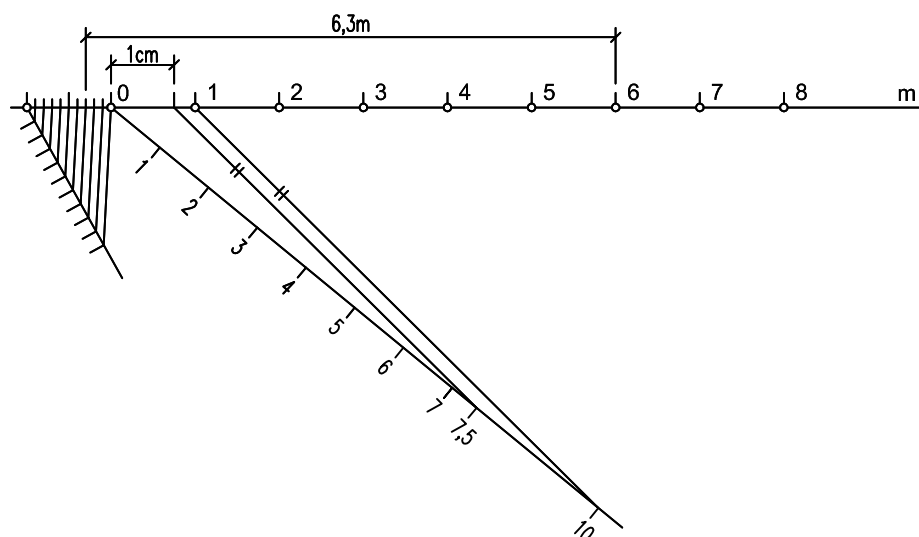
Levamos varias veces a medida da unidade cara a dereita (as que entren na folia de debuxo) e unha á esquerda que é a que dividiremos en 10 partes iguais para facer a contraescala.

Para medir coa nosa escala gráfica deberemos facelo do revés de cómo o facemos normalmente: Para medir 6,3 metros, poñemos o inicio na unidade enteira 6 e o final na 3ª división da contraescala.

É fundamental non esquecer poñer a unidade na nosa escala gráfica (no noso caso metros) porque do contrario non saberíamos en qué estamos a medir.

$$\text{Escala} = \frac{\text{debuxo}}{\text{realidade}} = \frac{1}{75}$$

D	R
1 cm	75 cm
1 cm	7,5 dm
1 cm	0,75 m



F-3.9

3.13.- Escala transversal - F-3.10

Unha **escala transversal** é unha escala gráfica na que poderemos medir con dous decimais, ou sexa mediremos coa precisión de **centésimas** da unidade.

Construción de unha escala transversal:

Supoñamos que queremos facer a escala transversal **2:5**.

Facemos primeiro a **escala gráfica 2:5** (tal e como quedou explicado no punto anterior) coa súa correspondente contraescala e sen esquecer a unidade de medida que, no noso caso será en **dm**.

Polas unidades e polas divisións da contraescala levantamos perpendiculares á liña base da nosa regra e levamos sobre elas dez medidas iguais (do tamaño que queiramos), e trazamos as paralelas correspondentes.

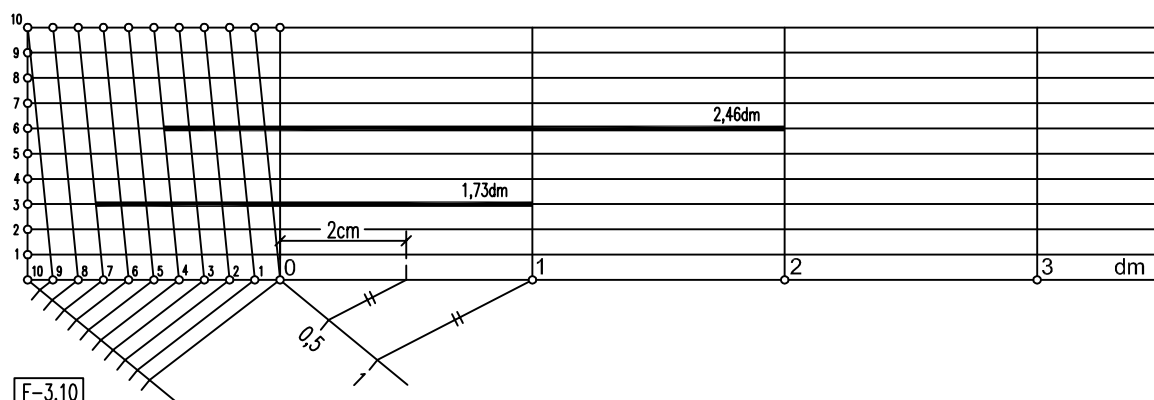
Unimos as divisións da contraescala coas correspondentes da parte superior pero desprazando unha (ou sexa, unimos a do 0 de abaixo coa primeira de arriba e así sucesivamente).

Numeramos as divisións e xa teremos a nosa **escala transversal 2:5**.

Para tomar unha medida de 2,46dm eliximos a liña horizontal da centésima (a do 6), empezamos a medida na liña oblicua das décimas (a do 4) e rematamos a medida na vertical das unidades (no noso caso a do 2). Fariamos o mesmo con calquera outra.

Escala transversal $\frac{2}{5}$

D	R
2 cm	5 cm
2 cm	0,5 dm



F-3.10

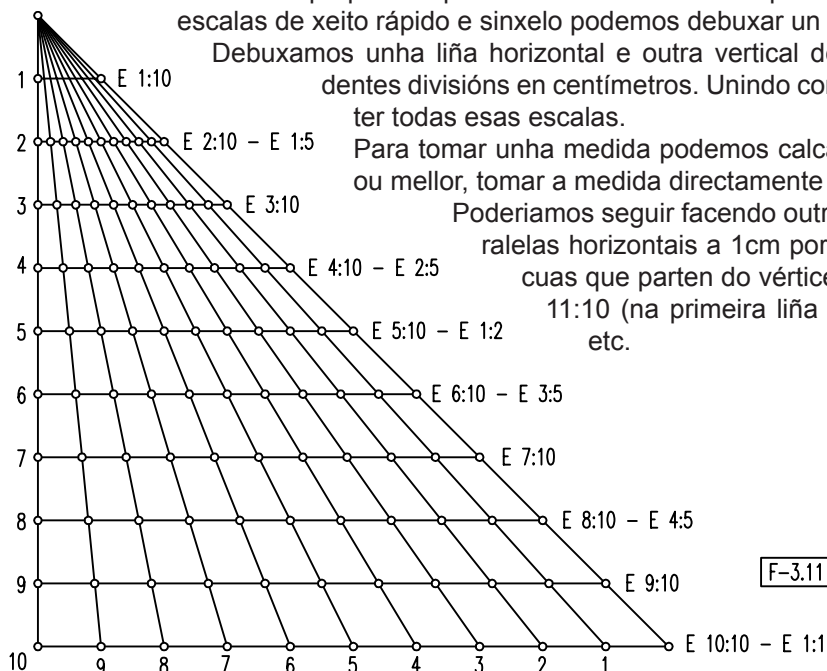
3.14.- Triángulo de escalas - F-3.11

Para facer escalas pequenas que non excedan de 9:10 e poder facer, con un esquema base, varias escalas de xeito rápido e sinxelo podemos debuxar un triángulo de escalas.

Debuxamos unha liña horizontal e outra vertical de 10cm cada unha, coas correspondentes divisións en centímetros. Unindo como aparece na figura 3.11 poderemos ter todas esas escalas.

Para tomar unha medida podemos calcar a escala respectiva en outro papel ou mellor, tomar a medida directamente co compás.

Poderíamos seguir facendo outras escalas simplemente trazando paralelas horizontais a 1cm por debaixo e prolongando as liñas oblicuas que parten do vértice superior. Obteríamos así as escalas 11:10 (na primeira liña horizontal), 12:10 = 6:5 na seguinte, etc.



F-3.11

4 - TRANSFORMACIÓNS

TRANSFORMACIÓN XEOMÉTRICA

4.1.- Concepto

Como xa sabedes, estamos en XEOMETRÍA PLANA, unha parte da xeometría que desenrola os seus contidos traballando co plano (aparte poderíamos falar de xeometría tridimensional ou espacial pero iso será obxecto doutro libro).

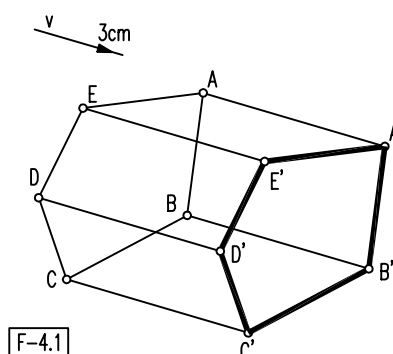
Unha **transformación xeométrica** é calqueira operación ou aplicación que fai que a un punto do plano lle corresponda outro punto do plano.

TRANSLACIÓN

4.2.- Concepto - F-4.1

A **traslación** é unha **transformación xeométrica** que fai que un punto do plano se transforme en outro por medio dun vector orientado, ou sexa:

- A un punto **A** lle fai corresponder outro **A'** situado en unha dirección e sentido concretos e a unha distancia concreta.
- A recta que une **A** con **A'** é paralela ó vector que define a traslación.
- Unha recta e a recta resultante da traslación son **paralelas**.
- Un polígono ou figura é **idéntica** á resultante da traslación pero **desprazada**.



Dado o polígono **ABCDE**, o vector orientado **v** e a medida de **3cm**.

A partir do punto **A** trazamos un segmento paralelo a **v** que mida 3cm e por cada un dos outros vértices do polígono (**B, C, D, E**) levamos paralelas a ela coa mesma medida.

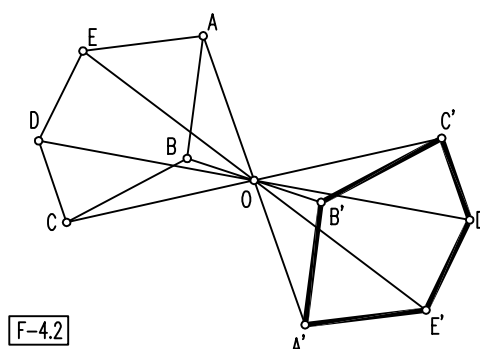
Unindo os puntos obtidos teremos o polígono **A'B'C'D'E'**, resultado da traslación do **ABCDE**.

SIMETRÍA

4.3.- Simetría polar ou central - F-4.2

A **simetría polar** é unha **transformación xeométrica** que fai que a un punto **A** lle corresponda outro **A'** de tal xeito que:

- **A** e **A'** están aliñados con un punto fixo **O** chamado **centro de simetría**.
- As distancias **AO** e **OA'** son iguais.
- **A** e **A'** están en posicións opostas con respecto ó centro de simetría **O**.
- Unha figura e a súa correspondente nunha simetría polar non son iguais.



Dado o polígono **ABCDE** e o centro de simetría **O**.

Unimos tódolos vértices do polígono con **O** e continuamos as rectas cara ó lado contrario.

Con centro en **O** levamos a distancia **OA** cara ó outro lado, obtendo **A'**. Facemos o mesmo cos demais puntos e obteremos o polígono **A'B'C'D'E'** simétrico polar do **ABCDE** con respecto o centro **O**.

4.4.- Simetría axial - F-4.3

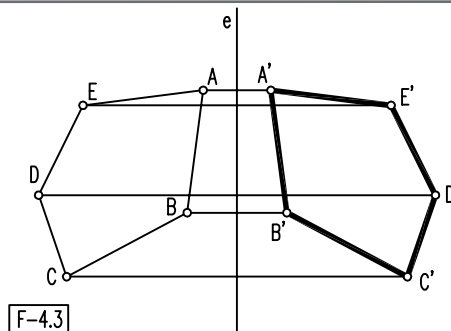
A **simetría axial** é unha **transformación xeométrica** que fai que a un punto **A** lle corresponda outro **A'** de tal xeito que:

- **A** e **A'** están aliñados nunha recta perpendicular a outra fixa chamada **eixo de simetría**.
- As distancias **AO** e **OA'** son iguais.
- **A** e **A'** están en situacións opostas con respecto ó eixo de simetría **e**.
- Unha figura e a súa correspondente nunha simetría axial non son iguais.

Dado o polígono **ABCDE** e o eixo de simetría **e**.

Por cada vértice trazamos rectas perpendiculares ó eixo de simetría **e**.

Levamos cara ó outro lado as distancias existentes entre cada un dos vértices do polígono de partida (**A, B, C, D, E**) e o eixo **e**, obtendo os puntos simétricos a eles (**A', B', C', D', E'**).



XIRO

4.5.- Xiro ou rotación - F-4.4

O **xiro** é unha **transformación xeométrica** que fai que a un punto **A** lle corresponda outro **A'** de tal xeito que:

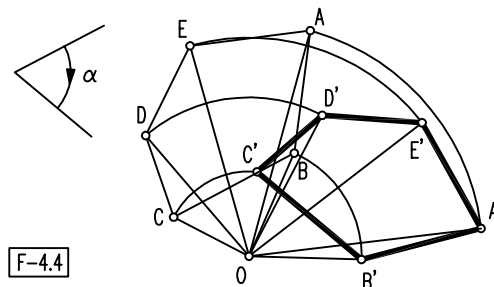
- **A** e **A'** están no mesmo arco dunha circunferencia con centro en un punto fixo **O** chamado **centro de xiro**.
- As distancias **AO** e **OA'** son iguais.
- Unha figura e a súa correspondente nun xiro son iguais.

Dado o polígono **ABCDE**, o ángulo α e o centro de xiro **O**.

Por cada vértice **A, B, C, D, E**, trazamos cadanseu arco con centro no punto **O**.

Unimos os vértices anteriores con **O** e levamos, sobre cada unha das liñas obtidas, o ángulo α .

Nas interseccións entre as liñas obtidas e os arcos correspondentes obteremos os puntos **A', B', C', D', E'** que, unidos, darán a figura xirada.



5 - TANXENCIAS

DEFINIÇÕES E CONCEPTOS BÁSICOS

5.1.- Tanxencia

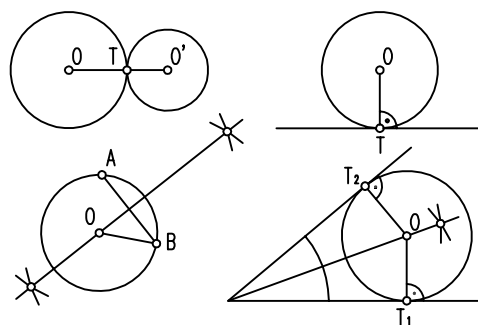
Falamos de **tanxencia** entre dúas curvas, ou entre unha recta e unha curva, cando teñen un punto común e soamente un.

Veremos a continuación diferentes casos de **tanxencias entre circunferencias e rectas** (nas súas diferentes combinacións, circunferencia con circunferencia ou circunferencia con recta). Tamén poden existir tanxencias entre calquera outro tipo de curvas, como as cónicas, pero iso será obxecto de outro tema.

Para **resolver unha tanxencia** deberemos **SEMPRE obter primeiro os puntos de tanxencia e, despois, o elemento ou elementos tanxentes**. Unha tanxencia sen definir o punto de tanxencia non está resolta.

Para resolver as tanxencias que imos ver neste curso soamente debemos ter en conta catro conceptos básicos que, polo xeral, xa son coñecidos (F-5.1).

- 1.- Cando dúas **circunferencias** son tanxentes, o punto de tanxencia está na recta que une os centros delas.
- 2.- Cando unha **recta** é tanxente a unha **circunferencia**, o radio da circunferencia no punto de tanxencia é perpendicular á recta.
- 3.- Cando unha **circunferencia** pasa por dous puntos, o centro dela está na **mediatriz** do segmento que os une.
- 4.- Cando unha **circunferencia** é tanxente a dúas **rectas** que se cortan, o centro da circunferencia estará na **bisectriz** do ángulo que forman as rectas.



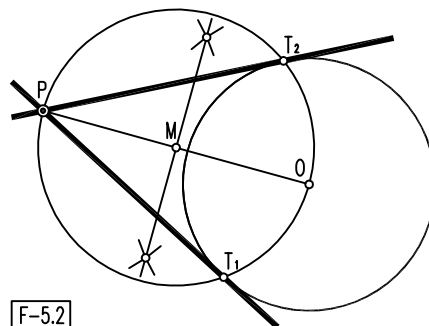
F-5.1

TRAZADO DE TANXENCIAS

5.2.- Rectas tanxentes a unha circunferencia dende un punto exterior a ela - F-5.2

Dada a **circunferencia** de centro **O** e o punto exterior **P**.
Unimos o punto **P** co centro da circunferencia **O**. Facemos a mediatriz de **PO** e obtemos o punto medio **M**.
Con centro en **M** e radio **MP** trazamos unha circunferencia que nos dará os puntos de tanxencia (**T₁** e **T₂**) onde corte á circunferencia dada.

Unindo **P** con **T₁** e **T₂** obteremos as **dúas rectas tanxentes**.

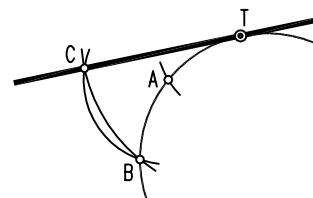


F-5.2

5.3.- Recta tanxente a un arco de circunferencia de centro descoñecido por un punto do mesmo F-5.3

Dado o **arco de circunferencia** e o punto de tanxencia **T**.
Con un radio calquera e centro en **T**, trazamos un arco que cortará ó dado no punto **A**. Con centro en **A** e o mesmo radio trazamos outro, que cortará ó arco dado en **B**.
Con centro en **T** e radio **TB** trazamos outro arco que cortará ó arco anterior en **C**.

A recta que obtemos unindo **T** con **C** será a **tanxente** buscada.



F-5.3

5.4.- Rectas tanxentes exteriores a dúas circunferencias - F-5.4

Para resolver este problema usaremos un método (ó que recorreremos con frecuencia) que consiste en **reducir un problema complexo a outro máis sinxelo** ou que saibamos resolver.

Nos xa sabemos resolver o trazado de rectas tanxentes a unha circunferencia dende un punto exterior. Se collemos as circunferencias dadas e lles reducimos o radio na medida do radio da pequena, qué nos queda?

Quedaranos un punto (o centro da circunferencia pequena) e outra circunferencia de centro o da maior e radio a diferenza de radios entre o da maior e o da menor. O problema redúcese agora a trazar as rectas tanxentes a unha circunferencia dende un punto exterior (resolto no punto 5.2) posto que, as tanxentes que estamos a buscar, serán paralelas a elas.

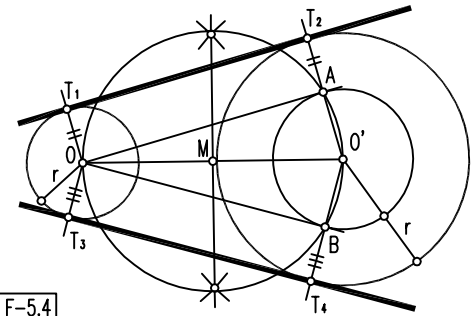
Dadas as **circunferencias** de centros **O** e **O'**.

Dende **O'** (centro da circunferencia de maior radio) trazamos un radio calquera e, dende o punto onde corte á circunferencia levamos, cara o interior, o radio **r** da circunferencia menor. Con centro en **O'** trazamos a circunferencia correspondente á **diferenza de radios** entre a maior e a menor.

Trazamos as rectas tanxentes á circunferencia anterior dende o punto **O** (ver punto 5.2) e obtemos os puntos de tanxencia **A** e **B**.

Os puntos de tanxencia na circunferencia de maior radio os obteremos unindo **O'** con **A** e **B** e continuando as liñas ata que corten á circunferencia en **T₂** e **T₄**; trazando paralelas a estas liñas polo punto **O'** obteremos os puntos de tanxencia **T₁** e **T₃** coa circunferencia de menor radio.

Podemos trazar, agora, as **rectas tanxentes exteriores** unindo **T₁** con **T₂** e **T₃** con **T₄**, comprobando ademais que son paralelas ás que pasan por **OA** e **OB**.



F-5.4

5.5.- Rectas tanxentes interiores a dúas circunferencias - F-5.5

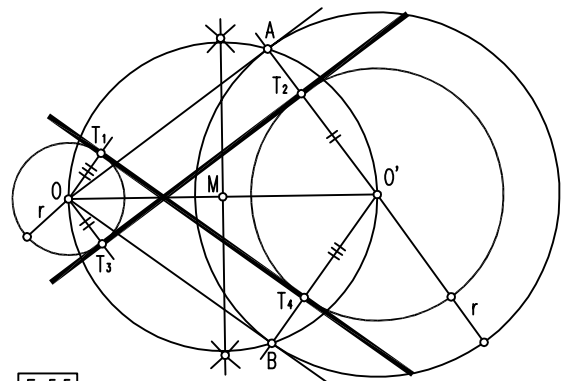
Aquí utilizaremos a mesma estratexia que no caso anterior (en realidade é o mesmo problema) coa diferenza de que agora en lugar de restar os radios das circunferencias os sumaremos.

Dadas as **circunferencias** de centros **O** e **O'**.

Dende **O'** (centro da circunferencia de maior radio) trazamos un radio calquera e, dende o punto onde corte á circunferencia levamos, cara o exterior, o radio **r** da circunferencia menor. Con centro en **O'** trazamos a circunferencia correspondente á **suma de radios** da maior e a menor. Trazamos as rectas tanxentes á circunferencia anterior dende o punto **O** (ver punto 5.2) e obtemos os puntos de tanxencia **A** e **B**.

Os puntos de tanxencia na circunferencia de maior radio os obteremos unindo **O'** con **A** e **B** que nos darán **T₂** e **T₄**; trazando paralelas a estas liñas polo punto **O'** (pero deberemos trazalas en sentido inverso, ou sexa, unha paralela ó radio superior cara abaixo e unha paralela ó inferior cara arriba) obteremos os puntos de tanxencia **T₁** e **T₃** coa circunferencia de menor radio.

Podemos trazar, agora, as **rectas tanxentes interiores** unindo **T₁** con **T₄** e **T₂** con **T₃**, comprobando ademais que son paralelas ás que pasan por **OA** e **OB**.



F-5.5

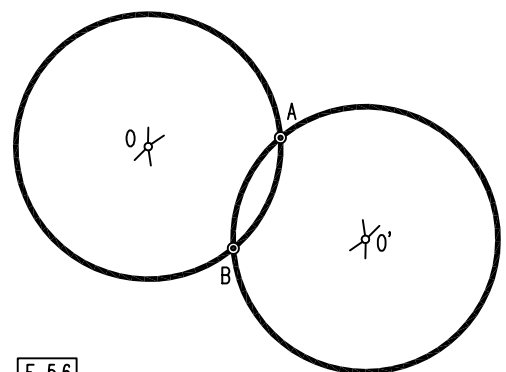
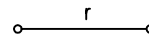
5.6.- Circunferencias de radio dado que pasan por dous puntos - F-5.6

Cando unha circunferencia pasa por un punto, o centro da circunferencia estará a unha distancia do punto igual ó radio dela. Este principio elemental é no que baseamos a resolución deste problema.

Dado o radio **r** e os puntos **A** e **B**.

Con centro en **A** e radio **r** trazamos dous arcos e, con centro en **B** e o mesmo radio, os cortamos. Deste xeito obtemos os puntos **O** e **O'**, centros das **dúas circunferencias** solución.

De novo co radio **r** e centro en **O** e **O'** trazamos as circunferencias que pasarán polos puntos **A** e **B** dados.



F-5.6

5.7.- Circunferencias de radio dado que pasan por un punto e son tanxentes a unha recta - F-5.7

Aparte do principio plantexado no punto anterior, temos que utilizar aquí o concepto número 2 plantexado no punto 5.1.

Dado o radio r , o punto A e a recta s .

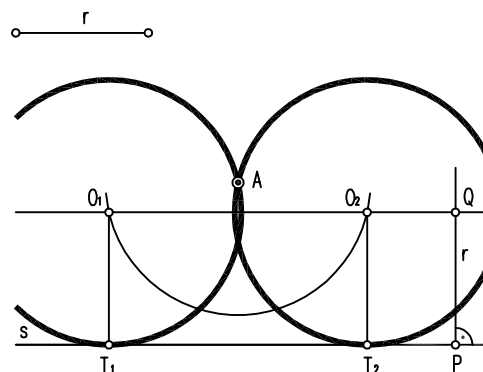
Collemos un punto P calquera da recta s e levantamos nel unha perpendicular á recta. Levamos a partir de P a distancia do radio r , obtendo o punto Q .

Trazamos polo punto Q unha recta paralela a s . Esta recta será o lugar xeométrico dos infinitos centros das circunferencias que, con radio r , sexan tanxentes á recta s . Agora deberemos atopar cales deses puntos cumpren, ademais, a condición de estar a unha distancia r do punto A .

Con centro en A e radio r trazamos un arco que cortará á recta paralela nos puntos O_1 e O_2 , centros das circunferencias solución.

Por O_1 e O_2 trazamos rectas perpendiculares á recta s , obtendo os puntos de tanxencia T_1 e T_2 .

Con centro en O_1 e O_2 e radio r trazamos as dúas circunferencias que pasan polo punto A e son tanxentes á recta s .



F-5.7

5.8.- Circunferencias de radio dado que pasan por un punto e son tanxentes a unha circunferencia

Este exercicio ten ate 4 solucións: Dúas circunferencias **tanxentes exteriores** á dada e outras dúas **tanxentes interiores**.

Tanxentes exteriores - F-5.8

Dado o radio r , o punto A e a circunferencia de centro O .

Por un punto calquera B da circunferencia trazamos un radio da mesma e o continuamos cara a fora. A partir do punto B levamos a distancia do radio r , obtendo o punto C .

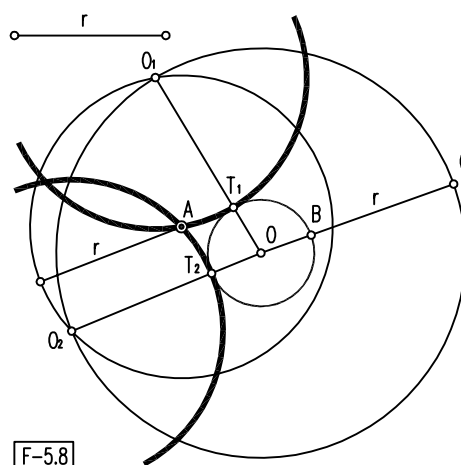
Con centro en O e radio OC trazamos unha circunferencia que será o lugar xeométrico dos centros das infinitas circunferencias que, con radio r , son tanxentes exteriores á de centro O .

Con centro en A e radio r trazamos unha circunferencia que será o lugar xeométrico dos centros das infinitas circunferencias que, con radio r , pasan polo punto A .

Como as circunferencias solución deben cumprir as dúas condicións anteriores (pasar polo punto A e seren tanxentes á circunferencia dada), os centros das mesmas serán os puntos de intersección de ámbalas dúas circunferencias trazadas, ou sexa, os puntos O_1 e O_2 .

Unimos O_1 e O_2 con O para obter os puntos de tanxencia T_1 e T_2 .

Con centro en O_1 e O_2 e radio r trazamos as dúas circunferencias que pasan polo punto A e son tanxentes á circunferencia dada.



F-5.8

Tanxentes interiores - F-5.9

Dado o radio r , o punto A e a circunferencia de centro O .

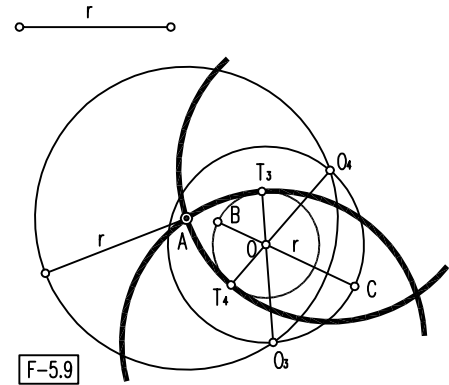
Por un punto calquera B da circunferencia trazamos un radio da mesma e o continuamos cara ó interior da circunferencia. A partir do punto B levamos a distancia do radio r , obtendo o punto C . Con centro en O e radio OC trazamos unha circunferencia que será o lugar xeométrico dos centros das infinitas circunferencias que, con radio r , son tanxentes interiores á de centro O .

Con centro en A e radio r trazamos unha circunferencia que será o lugar xeométrico dos centros das infinitas circunferencias que, con radio r , pasan polo punto A .

Como as circunferencias solución deben cumprir as dúas condicións anteriores (pasar polo punto A e seren tanxentes á circunferencia dada), os centros das mesmas serán os puntos de intersección de ambas dúas circunferencias trazadas, ou sexa, os puntos O_3 e O_4 .

Unimos O_3 e O_4 con O para obter os puntos de tanxencia T_3 e T_4 .

Con centro en O_3 e O_4 e radio r trazamos as dúas circunferencias que pasan polo punto A e son tanxentes á circunferencia dada.



F-5.9

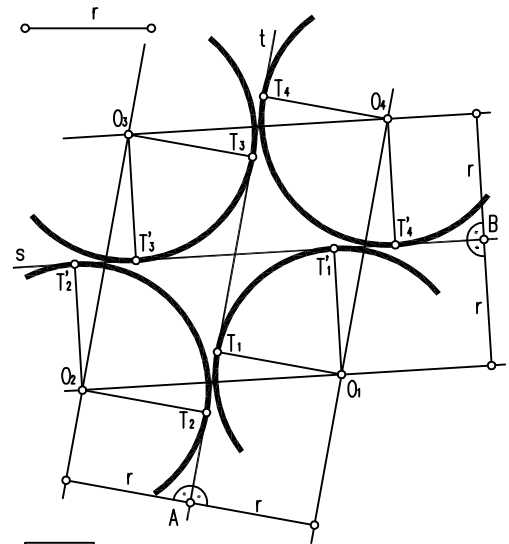
5.9.- Circunferencias de radio dado tanxentes a dúas rectas que se cortan - F-5.10

Dado o radio r e as rectas s e t .

Por un punto calquera de cada unha das rectas (eliximos A e B) levantamos cadansúa perpendicular á recta correspondente. Levamos a medida de r a partir de A e B e trazamos por eses puntos rectas paralelas a s e t . Estas rectas serán os lugares xeométricos dos centros das infinitas circunferencias de radio r tanxentes a cada unha das rectas dadas. Como as solucións deberán cumprir as dúas condicións (seren tanxentes a unha recta e á outra), os centros serán os puntos onde se corten as rectas paralelas ás dúas rectas dadas, ou sexa os puntos O_1 , O_2 , O_3 e O_4 .

Por O_1 , O_2 , O_3 e O_4 trazamos perpendiculares a r e s e obtemos os puntos de tanxencia de cada circunferencia coas rectas dadas (os puntos T_1 , T'_1 , T_2 , T'_2 , T_3 , T'_3 , T_4 e T'_4).

Con radio r e centro en O_1 , O_2 , O_3 e O_4 trazamos as **catro circunferencias** solución.



F-5.10

5.10.- Circunferencias de radio dado tanxentes a unha recta e a unha circunferencia

Este exercicio ten ate 4 solucións: Dúas circunferencias **tanxentes exteriores** á circunferencia dada e outras dúas **tanxentes interiores**.

Tanxentes exteriores - F-5.11

Dado o radio r , a recta s e a circunferencia de centro O .

Por un punto B calquera da circunferencia trazamos un radio da mesma e o continuamos cara a fora. A partir do punto B levamos a distancia do radio r , obtendo o punto C .

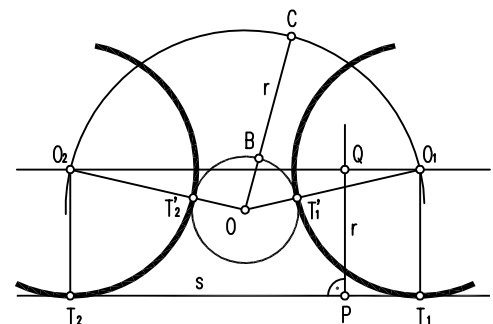
Con centro en O e radio OC trazamos un arco de circunferencia.

Por un punto P calquera da recta s levantamos unha perpendicular á mesma. Levamos a partir de P a medida do radio r , obtendo o punto Q . Polo punto Q trazamos unha paralela á recta s .

Os puntos de intersección entre o arco trazado previamente e a paralela serán O_1 e O_2 , os centros das circunferencias tanxentes á dada e á recta s .

Para obter os puntos de tanxencia coa circunferencia dada, unimos O_1 e O_2 con O (obteremos así T'_1 e T'_2).

Para obter os puntos de tanxencia coa recta s trazamos perpendiculares a ela dende O_1 e O_2 (obteremos así T_1 e T_2). Unha vez obtidos os puntos de tanxencia trazamos as circunferencias con centro en O_1 e O_2 .



F-5.11

Tanxentes interiores - F-5.12

Dado o radio r , a recta s e a circunferencia de centro O .

Por un punto B calquera da circunferencia trazamos un radio da mesma e o continuamos cara a dentro. A partir do punto B levamos a distancia do radio r , obtendo o punto C .

Con centro en O e radio OC trazamos un arco de circunferencia.

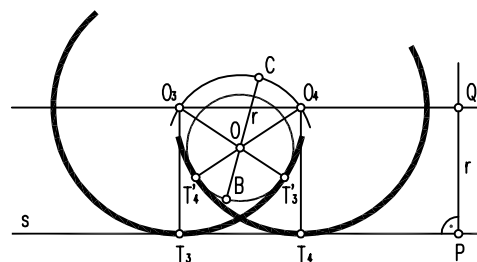
Por un punto P calquera da recta s levantamos unha perpendicular á mesma. Levamos a partir de P a medida do radio r , obtendo o punto Q . Polo punto Q trazamos unha paralela á recta s .

Os puntos de intersección entre o arco trazado previamente e a paralela serán O_3 e O_4 , os centros das circunferencias tanxentes á dada e á recta s .

Para obter os puntos de tanxencia coa circunferencia dada, unimos O_3 e O_4 con O (obteremos así T'_3 e T'_4).

Para obter os puntos de tanxencia coa recta s trazamos perpendiculares a ela dende O_3 e O_4 (obteremos así T_3 e T_4).

Unha vez obtidos os puntos de tanxencia trazamos as circunferencias con centro en O_3 e O_4 .



F-5.12

5.11.- Circunferencias de radio dado tanxentes a dúas circunferencias - F-5.13/14/15

Este exercicio ten ate 8 solucións: Dúas circunferencias **tanxentes exteriores** ás dadas, dúas **tanxentes interiores** e catro **tanxentes interiores a unha e exteriores á outra**.

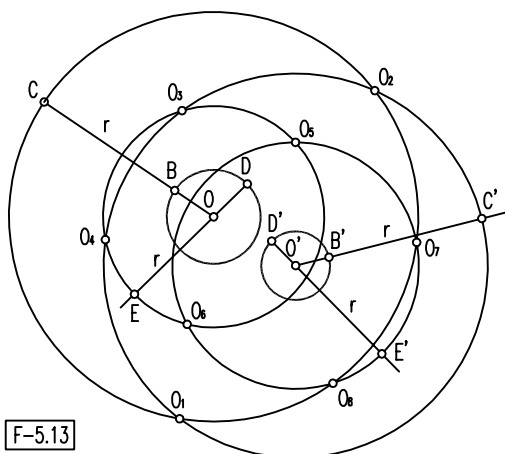
Dado o radio r e as circunferencias de centros O e O' .

O procedemento de resolución de este exercicio xa foi visto nos trazados anteriores.

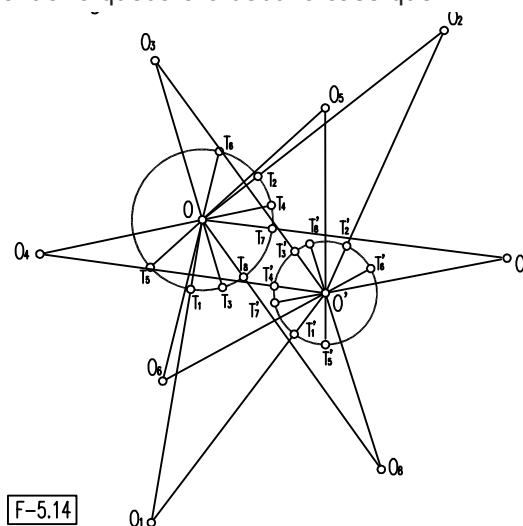
Para obter os **centros das circunferencias** solución trazaremos, con centro en O e O' , circunferencias que teñan por radio o de elas máis o radio r dado e o de elas menos o radio r dado (F-5.13). Obtemos $O_1 - O_8$.

Para obter os **puntos de tanxencia** unimos os centros obtidos anteriormente cos das circunferencias dadas (F-5.14). Obtemos $T_1 - T_8$ e $T'_1 - T'_8$.

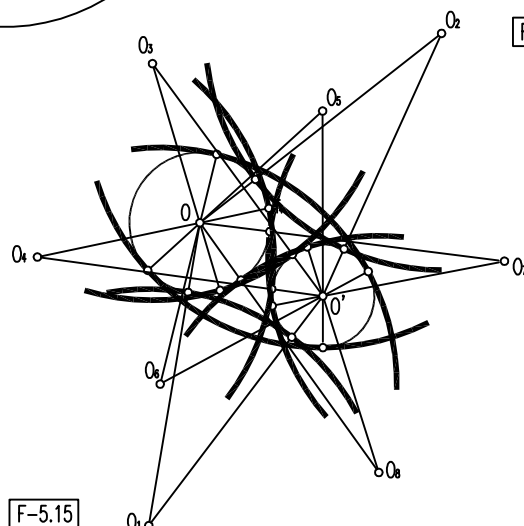
Unha vez obtidos os centros e os puntos de tanxencia podemos trazar as circunferencias solución (F-5.15). Este exercicio convén resolvelo en dous ou tres diferentes ou do contrario quedará o debuxo case que inintelixible.



F-5.13



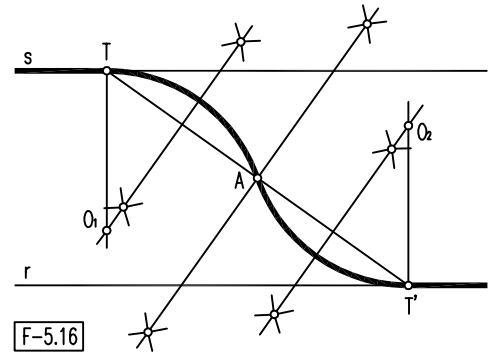
F-5.14



F-5.15

5.12.- Enlazar dúas rectas paralelas con dous arcos de circunferencia do mesmo radio, coñecendo os puntos de tanxencia - F-5.16

Dadas as rectas r e s e os puntos de tanxencia T e T' .
 Trazamos rectas perpendiculares a r e s polos puntos T e T' .
 Unimos T e T' e trazamos a **mediatriz**, o que nos dará o punto medio A (os arcos deberán ser tanxentes entre si neste punto).
 Facemos as mediatrices de TA e $T'A$; onde estas mediatrices corten ás rectas perpendiculares ás dadas que trazamos inicialmente, teremos os centros O_1 e O_2 dos arcos solución. Con centro en O_1 e O_2 trazamos os arcos solución.



F-5.16

5.13.- Envolverte dunha poligonal - F-5.17

Este trazado ten por obxecto unir puntos ou vértices de unha recta poligonal mediante arcos de circunferencia tanxentes entre si nos puntos dados.

Dada a poligonal **ABCDEFGH** e o radio de inicio r .

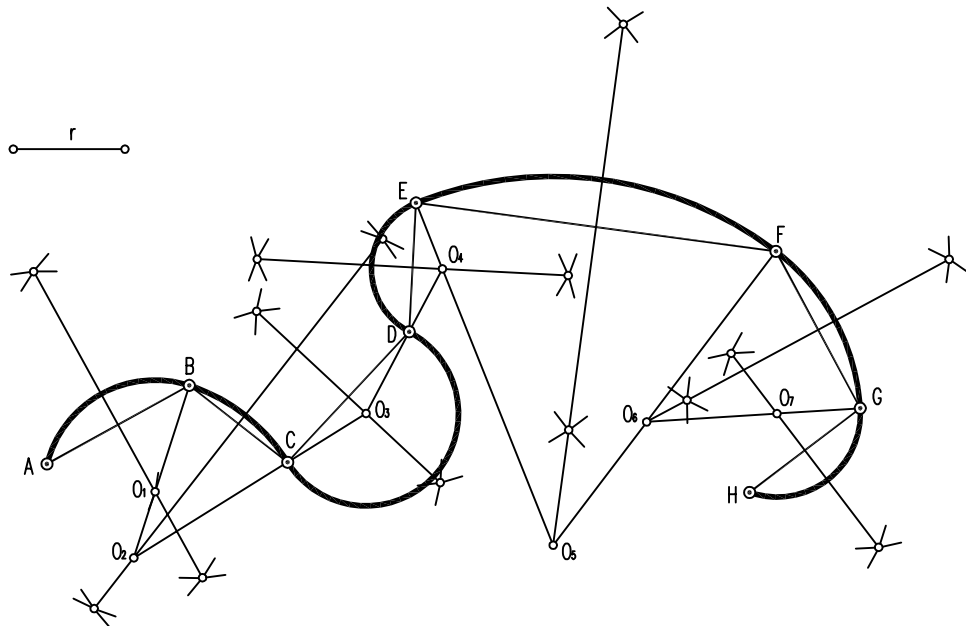
Facemos a **mediatriz** do segmento **AB**. Con centro en A e radio r trazamos un arco que cortará á mediatriz en O_1 , centro do primeiro arco.

Con centro en O_1 e radio O_1A trazamos un arco que una os puntos A e B .

A partir de agora faremos sempre o mesmo cos demais segmentos:

- Trazamos a **mediatriz** do segmento seguinte **BC**. Unimos o primeiro punto (**B**) co centro do arco anterior (O_1) e onde corte á mediatriz teremos O_2 , o centro do arco.
- Con centro en O_2 e radio O_2B trazamos un arco que unirá os puntos **B** e **C** e será tanxente ó arco anterior en **B**.

Facemos o mesmos con tódolos demais segmentos e obteremos a envolvente da poligonal dada.



F-5.17

6 - CURVAS TÉCNICAS

ÓVALOS

ÓVALO: Curva pechada e plana, formada por **catro arcos de circunferencia** iguais dous a dous e simétrico con respecto a **dous eixos**.

6.1.- Trazado do óvalo dado o eixo maior - F-6.1

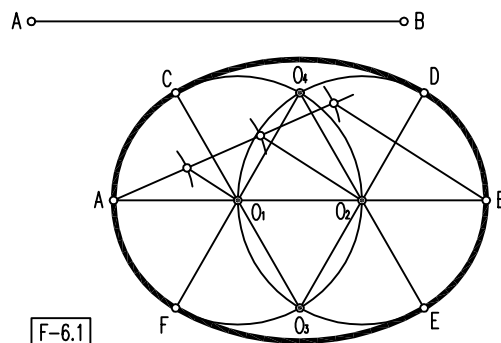
Dado o eixo maior **AB**.

Dividimos o eixo **AB** en tres partes iguais. Os dous puntos así obtidos serán dous dos catro centros dos arcos que conforman o óvalo, **O₁** e **O₂**.

Con centro en **O₁** e **O₂** e radio ate o extremo respectivo do eixo maior, trazamos dúas circunferencias que se han cortar nos outros dous centros, **O₃** e **O₄**.

Unimos os centros entre si para saber ata onde chegará cada arco de circunferencia, obtendo así os puntos de tanxencia entre eles **C**, **D**, **E** e **F**.

Agora podemos trazar os arcos respectivos pois xa coñecemos os **centros**, os **radios** e os **puntos de tanxencia**.



F-6.1

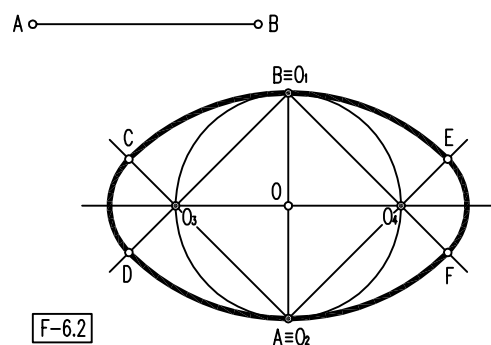
6.2.- Trazado do óvalo dado o eixo menor - F-6.2

Dado o eixo menor **AB**.

Facendo a mediatriz de **AB** obtémolo punto medio **O**. Con centro en **O** e radio **OA** trazamos unha circunferencia. Trazamos o diámetro perpendicular a **AB** e o continuamos cara a ambos lados. Os extremos dos dous diámetros serán os catro centros dos arcos que conforma o ovalo, **O₁**, **O₂**, **O₃** e **O₄**.

Unimos os centros entre si para saber ata onde chegará cada arco de circunferencia, obtendo así os puntos de tanxencia entre eles **C**, **D**, **E** e **F**.

Agora xa podemos trazar os arcos respectivos pois xa coñecemos os **centros**, os **radios** e os **puntos de tanxencia**.



F-6.2

6.3.- Trazado do óvalo dádoos dous eixos - F-6.3

Dados os eixos **AB** e **CD**.

Debuxamos os dous eixos **AB** e **CD** de xeito que sexan perpendiculares no seu punto medio **O**.

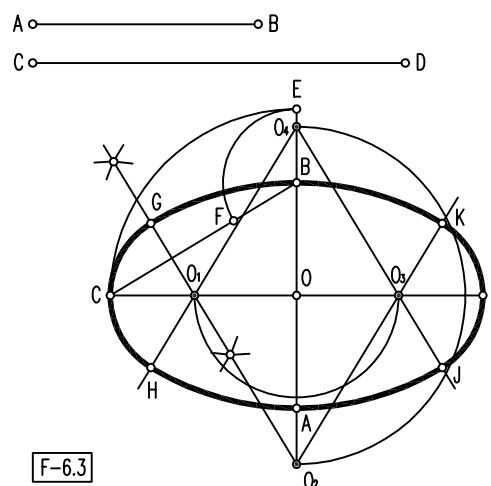
Con centro en **O** levamos, sobre a continuación do eixo menor, a metade do eixo maior **OC** e obtemos o punto **E**. Unimos **C** e **B** e, con centro en **B** e radio **BE**, levamos esta medida sobre **CB**, obtendo o punto **F**.

Facemos a mediatriz de **CF** e, onde esta mediatriz corte ó eixo maior e á prolongación do eixo menor, obteremos dous dos catro centros do óvalo, **O₁** e **O₂**. Con centro en **O** obtémolos puntos simétricos de **O₁** e **O₂** con respecto ós dous eixos de partida, obtendo así **O₃** e **O₄**, os centros que nos faltaban.

Unimos **O₁**, **O₂**, **O₃** e **O₄** entre si e continuamos as liñas cara a fora.

Con centro en **O₁** e radio **O₁C** trazamos o arco que cortará as liñas anteriores nos puntos de tanxencia **G** e **H**. Con centro en **O₂** e radio **O₂G** (igual a **O₂B**) trazamos outro arco ate o punto de tanxencia co seguinte en **K**. Seguimos con **O₃** e **O₄** e rematámolo óvalo.

Cando tracemos un óvalo (este ou calquera dos anteriores) convén trazar os arcos seguidos pois, deste xeito, soamente teremos unha unión delicada de trazado no derradeiro arco.

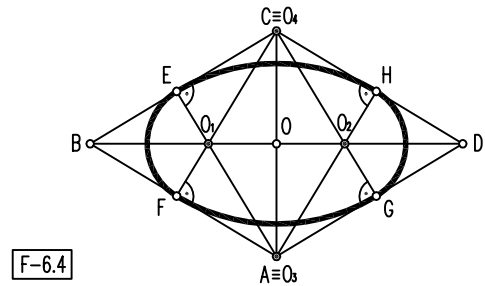


F-6.3

6.4.- Trazado do óvalo isométrico ou inscrito nun rombo - F-6.4

Dado o rombo **ABCD**.

Trazamos as diagonais do rombo unindo os vértices non consecutivos (**A** con **C** e **B** con **D**). Os puntos **A** e **C** serán **O₃** e **O₄**, dous dos catro centros do óvalo; para obter os outros dous centros trazamos dende eles perpendiculares ós lados opostos do rombo: Onde as perpendiculares corten as diagonais do rombo serán os centros **O₁** e **O₂** e, onde as perpendiculares corten os lados do rombo, serán os puntos de tanxencia dos catro arcos do rombo (os puntos **E**, **F**, **G** e **H**).



F-6.4

OVOIDES, VOLUTAS E ESPIRAIS

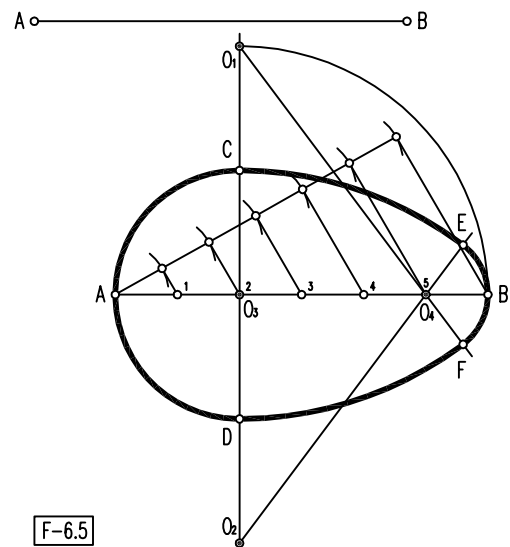
OVOIDE: Curva pechada e plana, formada por **catro arcos de circunferencia**, sendo un deles unha semicircunferencia. Ten **dous eixos** e é simétrico con respecto ó maior.

6.5.- Trazado do ovoide dado o eixo maior - F-6.5

Dado o eixo maior **AB**.

Dividimos o eixo **AB** en **6** partes iguais. As divisións 2ª e 5ª serán dous dos centros do ovoide: Pola 2ª división levantamos unha perpendicular a **AB** para obter o **eixo menor** (o diámetro da semicircunferencia). **O₃** será o centro da semicircunferencia de radio **O₃A**; onde a semicircunferencia corte á perpendicular teremos os puntos de tanxencia **C** e **D**. Con centro en **O₃** e radio **O₃B** trazamos unha semicircunferencia que cortará á prolongación do eixo menor nos puntos **O₁** e **O₂**, os dous centros que faltaban. Unindo **O₁** e **O₂** con **O₄** e continuando as liñas cara a fora obteremos os límites dos tres arcos restantes.

Con centro en **O₁** e radio **O₁D** trazamos o arco **DF** e con centro en **O₂** e radio **O₂C** trazamos o arco simétrico **CE**. Con centro en **O₄** e radio **O₄E** trazamos o arco que falta para completar o ovoide.



F-6.5

6.6.- Trazado do ovoide dado o eixo menor - F-6.6

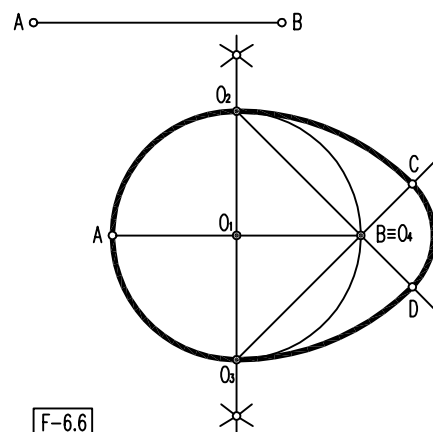
Dado o eixo menor **AB**.

Trazamos unha circunferencia de diámetro **AB** e debuxamos dous diámetros perpendiculares.

O centro da circunferencia será **O₁**, centro da semicircunferencia. Os outros tres centros dos restantes arcos que conforman o ovoide serán **O₂**, **O₃** e **O₄**.

Unindo **O₂** e **O₃** con **O₄** e continuando as liñas cara a fora obteremos os límites dos tres arcos restantes.

Con centro en **O₁** e radio **O₁A** trazamos a semicircunferencia. Con centro en **O₂** e radio **O₂O₃** trazamos o arco **O₃D** e con centro en **O₃** e o mesmo radio trazamos o arco **O₂C**. Con centro en **O₄** e radio **O₄C** trazamos o arco que falta para completar o ovoide.



F-6.6

6.7.- Trazado do ovoide dádoos dous eixos - F-6.7

Dados os eixos **AB** e **CD**.

Trazamos unha circunferencia que teña por diámetro o eixo menor **CD**. O centro da circunferencia será **O₁**, centro da semicircunferencia do ovoide.

Trazamos un diámetro vertical **CD**, que será o eixo menor do ovoide, e trazamos outro perpendicular a el e o continuamos cara a fora da circunferencia. A partir do punto **A** levamos a medida do eixo maior **AB**.

Este trazado ten infinitas solucións xa que debemos tomar aleatoriamente (o que queiramos) o radio do arco menor do ovoide (no noso caso a medida **a**).

Levamos a medida "**a**" a partir dos puntos **B**, **C** e **D** cara ó interior do ovoide, obtendo así os puntos **E**, **F** e **O₂**, este último o centro do radio menor do ovoide.

Unimos **E** con **O₂** e facemos a mediatriz dese segmento que cortará á prolongación do eixo menor no punto **O₃**.

Obtemos o punto simétrico de **O₃** con respecto o eixo maior e obtemos **O₄** o centro do arco que faltaba.

Unimos **O₃** e **O₄** con **O₂** para ter os puntos de tanxencia entre os arcos do ovoide.

Como xa tiñamos a semicircunferencia de centro **O₁** trazada, con centro en **O₃** e radio **O₃D** trazamos o arco **DH**, con centro en **O₄** e o mesmo radio trazamos o arco **CG**. Con centro en **O₂** e radio **O₂B** trazamos o arco de peche **GH**.

6.8.- Trazado de unha voluta de varios centros coñecido o paso - F-6.8

Voluta: Curva aberta e infinita formada por arcos de circunferencia tanxentes entre si.

Paso da voluta: Distancia total entre os centros sucesivos da voluta en unha volta completa (pasando unha vez por cada un deles).

Segundo o número de centros da voluta, a súa posición serán os vértices do polígono regular correspondente do mesmo número de lados.

Exemplo: unha voluta de 5 centros terá eses centros nos vértices de un pentágono regular cuxo lado sexa a 5ª parte do paso da voluta.

Voluta de 5 centros dado o **paso AB**.

Dividimos o segmento **AB** en cinco partes iguais polo teorema de Tales.

Trazamos un **pentágono regular** de lado **AP** (a quinta parte do paso).

Continuamos os lados do polígono cara a fora (sempre no mesmo sentido).

Con centro en **1** e radio **1-5** trazamos o arco **5C**. Con centro en **2** e radio **2C** trazamos o arco **CD**. Con centro en **3** e radio **3D** trazamos o arco **DE**... Continuamos o trazado ate completar os cinco arcos.

Poderíamos continuar indefinidamente coa voluta volvendo a facer centro nos puntos **1, 2, 3...** e radio ate os puntos de remate do arco anterior.

6.9.- Trazado da espiral logarítmica ou espiral aurea - F-6.9

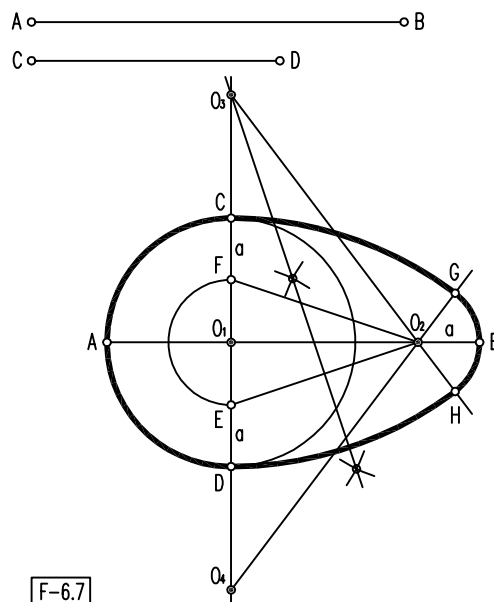
Espiral: Curva que describe un punto que se move sobre unha recta ó tempo que a recta xira arredor de un punto fixo dela.

Temos diferentes tipos de espirais. A máis salientable é a **espiral logarítmica**. Unha boa aproximación á espiral logarítmica é a **espiral áurea** (tamén coñecida coma "espiral de crecemento") pois moitas plantas, animais ou galaxias crecen dese xeito)

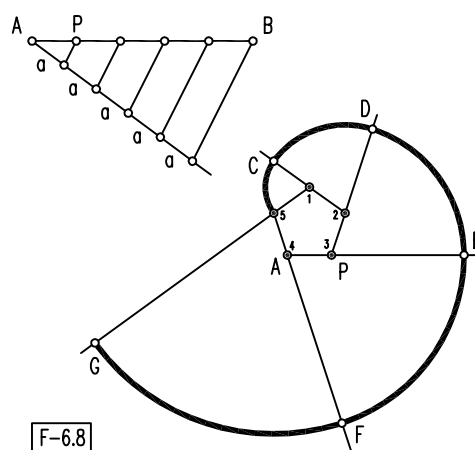
Para trazar a espiral áurea partimos dun **cadrado A**. Facemos o correspondente **rectángulo áureo B** (o lado menor do rectángulo será o lado do cadrado **A** e o lado maior será o segmento do cal o lado do cadrado é a súa parte áurea). O rectángulo áureo **B** o podemos dividir en un cadrado igual ó **A** e en outro rectángulo áureo máis pequeno (**C**). Se trazamos as diagonais dos dous rectángulos áureos segundo o esquema **D** teremos a base do trazado. Podemos continuar este esquema ate o infinito pois a espiral áurea, como tódalas espirais, é infinita.

Cada arco da espiral terá o centro no vértice de un dos cadrados, o radio será o lado do cadrado e ocupará un cuarto de circunferencia.

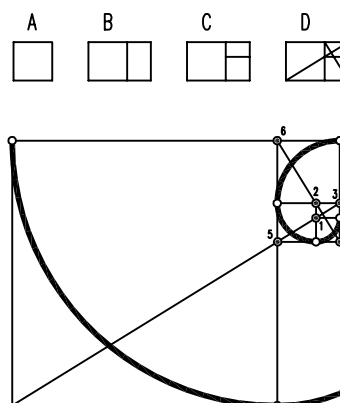
Como se pode ver en **F-6.9**, temos 6 centros sucesivos nos vértices dos cadrados correspondentes e radios os lados dos cadrados. Poderíamos seguir a espiral infinitamente tanto cara ó exterior como cara ó interior mantendo o mesmo esquema.



F-6.7



F-6.8



F-6.9

6.10.- Trazado da espiral xónica - F-6.10/.../18

A **espiral** ou **voluta xónica** é a curva que define as molduras simétricas dos capiteis da orde xónica (lembra: Dórica, xónica e Corintia). O nome correspóndese precisamente co nome da voluta que é o elemento definitorio do capitel da columna clásica.

A diferenza de outras espirais ou volutas, esta ten un final que é precisamente onde a curva da voluta transfórmase nunha recta, tanxente ó último arco de circunferencia, que enlaza coa voluta simétrica do capitel (**F-6.10**).

Cando falamos de **voluta xónica** estámonos a referir, en realidade, a **dúas** volutas: Unha **interior** e outra **exterior**. Debemos ter en conta que a voluta está pensada para facer un relevo tridimensional no capitel xónico.



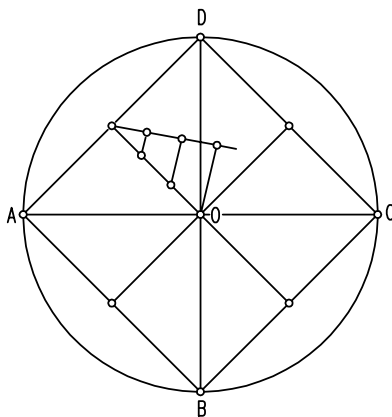
Olo da voluta: O círculo de partida para o trazado da voluta.

Dado o olo da voluta de radio **AO** – **F-6.11**

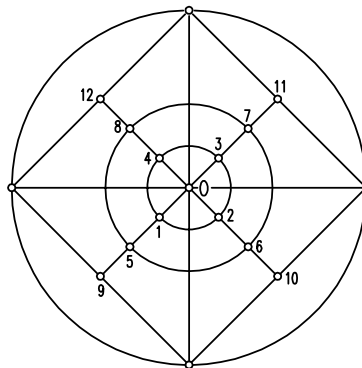
Con centro nun punto **O** trazamos a circunferencia de radio **AO** e debuxamos dous diámetros perpendiculares, un vertical e outro horizontal. Temos os puntos da circunferencia **A**, **B**, **C** e **D**; unindo estes puntos obtemos un cadrado inscrito na circunferencia. Unimos os puntos medios dos lados do cadrado e dividimos a metade de un deles en **3 partes iguais**.

Facendo centro en **O** levamos as divisións anteriores ós demais segmentos e numeramos do **1** ó **12** os puntos así obtidos (**F-6.12**). Estes puntos serán os centros dos **doce arcos de circunferencia** que forman a voluta interior.

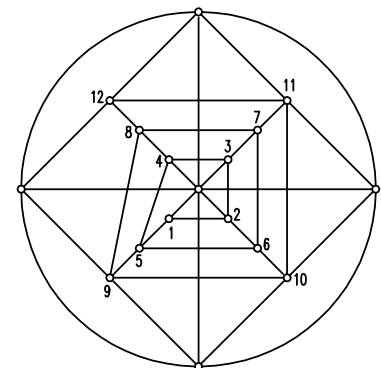
Para obter as liñas entre as que estará cada arco da voluta interior unimos cada centro co inmediato seguinte (**F-6.13**) e continuamos esas liñas cara a fora (**F-6.14**) sempre cara o mesmo lado (segundo o lado cara o que as continuemos nos sairá a voluta esquerda ou dereita do capitel).



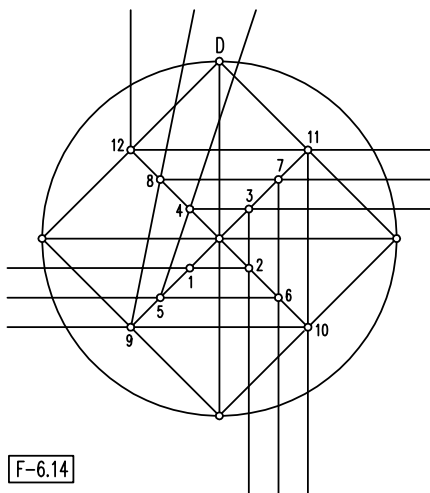
F-6.11



F-6.12

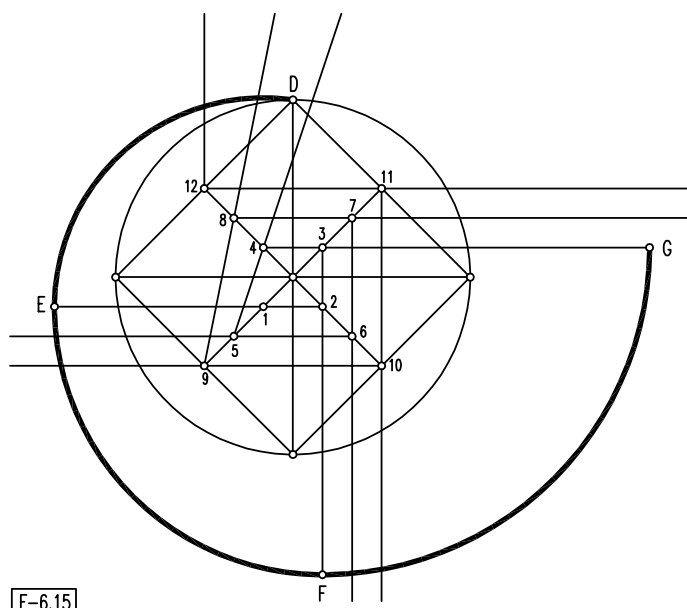


F-6.13

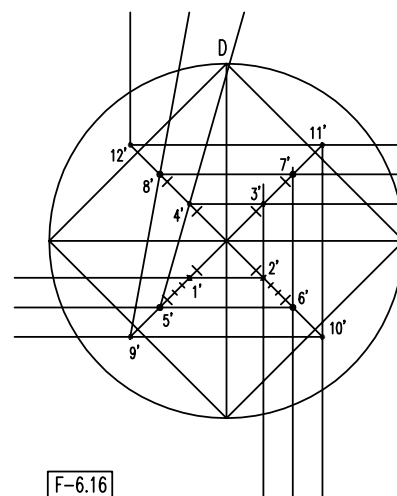


F-6.14

Trazado da voluta interior. - Con centro en **1** e radio **1D** trazámolo arco **DE**. Con centro en **2** e radio **2E** trazámolo arco **EF**. Con centro en **3** e radio **3F** trazámolo arco **FG** (**F-6.15**), e así sucesivamente ate rematar no centro **12** dende onde farémola curva ate a vertical de **12**.



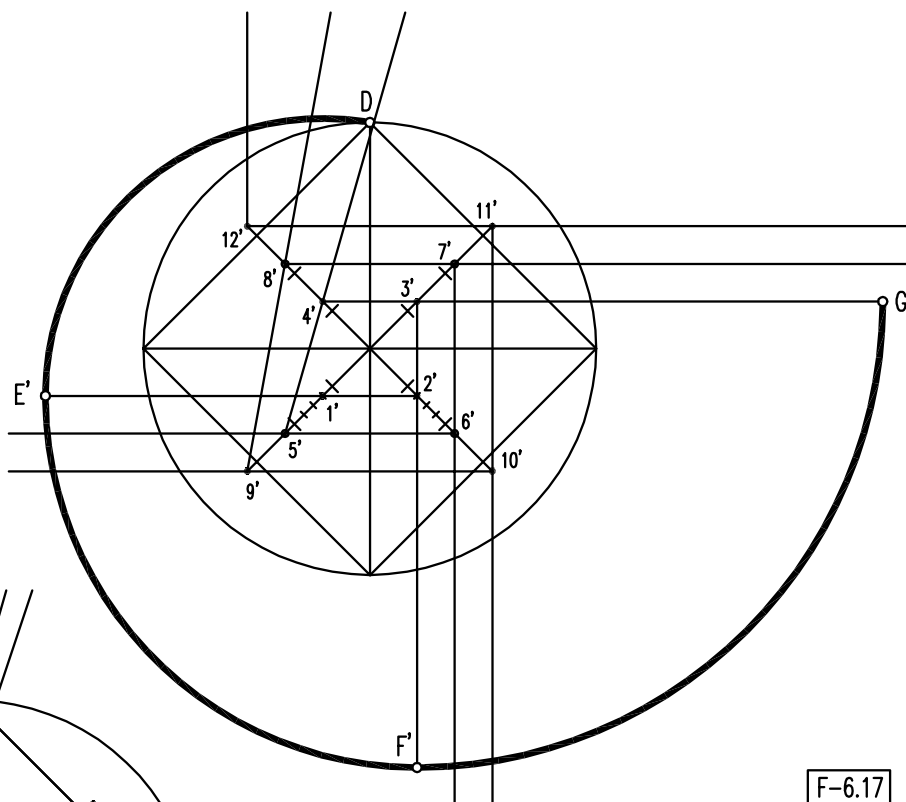
F-6.15



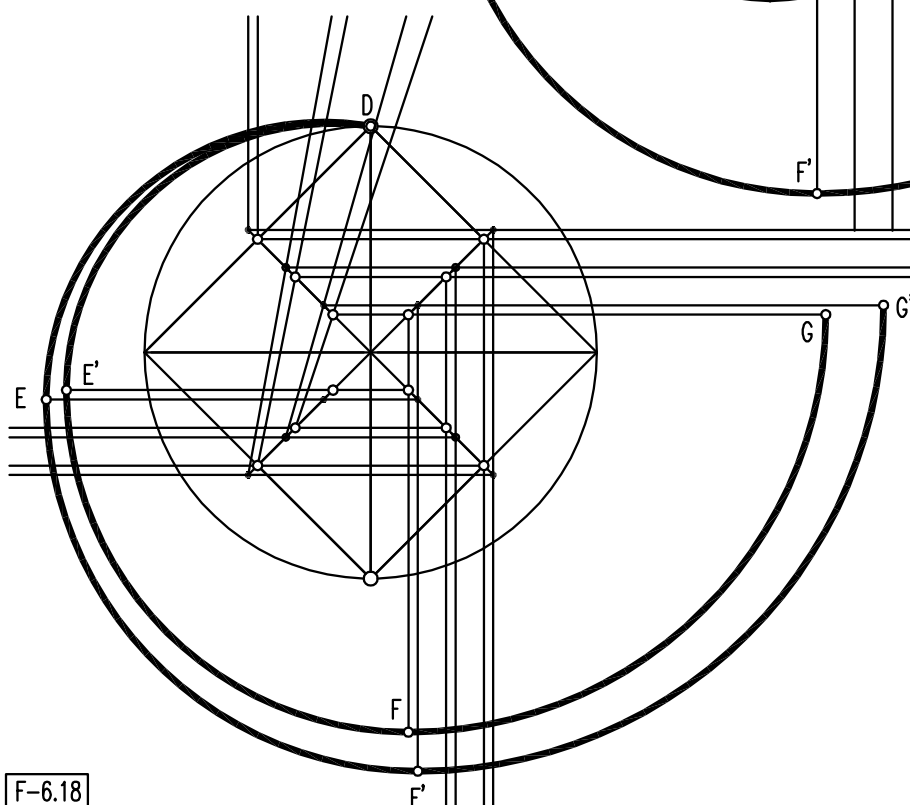
F-6.16

Trazado da voluta exterior.-

Para trazar a voluta exterior (F-6.16) dividimos en 4 partes iguais a distancia que temos entre cada dous centros e teremos os centros da voluta exterior na primeira división; obteremos así os centros 1'-12'. Procedemos a unir os centros e continuar as rectas cara ó exterior igual que fixemos antes e trazamos a voluta interior do mesmo xeito que a exterior (F-6.17).

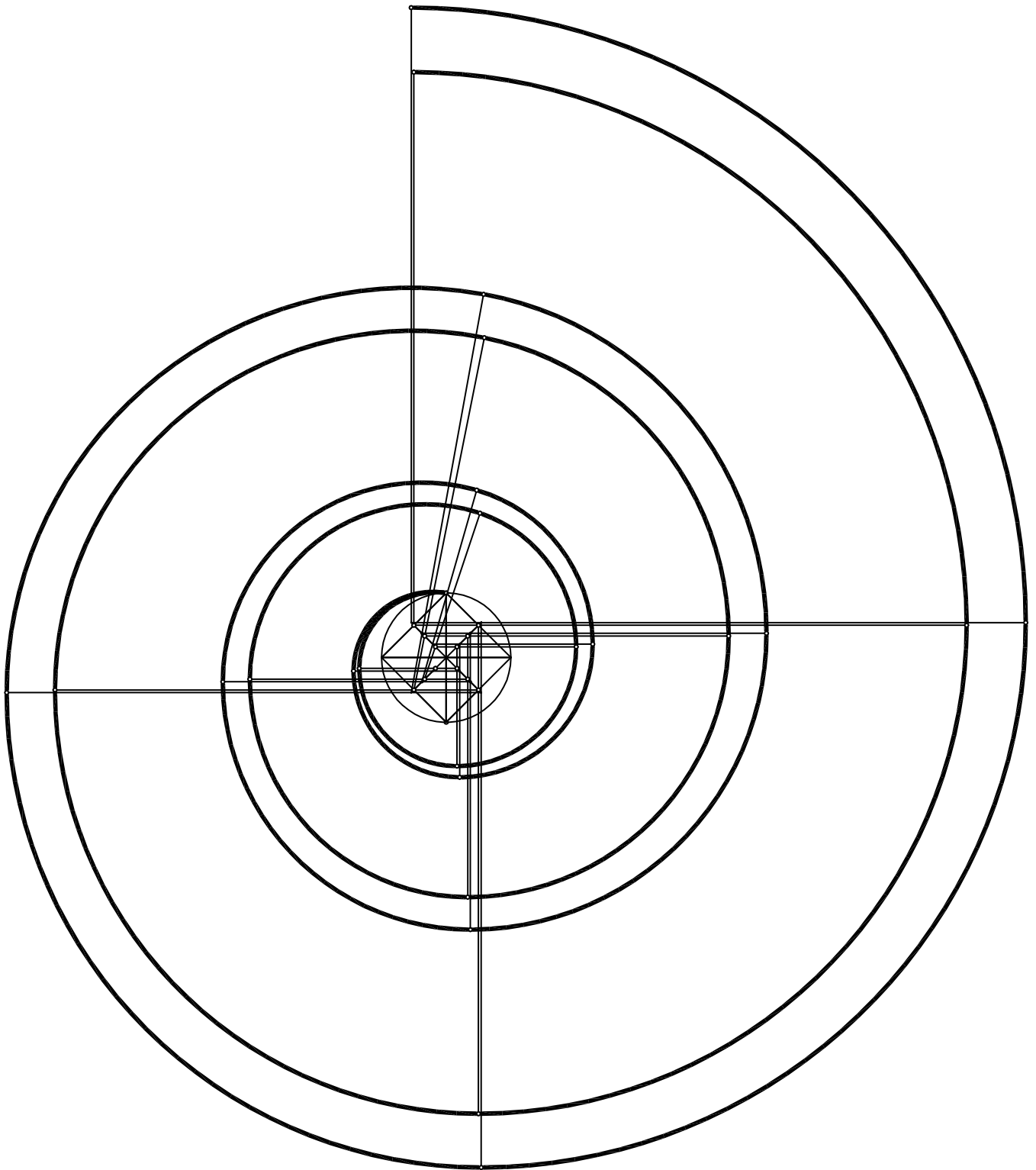


F-6.17



F-6.18

Loxicamente os dous trazados temos que facelos no mesmo debuxo (F-6.18) polo que a precisión e a limpeza son fundamentais. Na F-6.19 podedes ver o resultado final das dúas volutas completas.



F-6.19

7 - CURVAS CÓNICAS

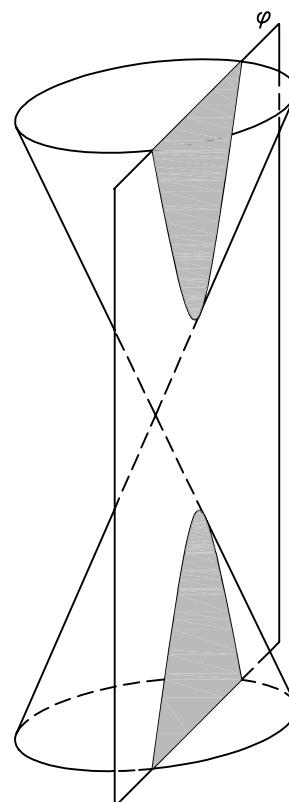
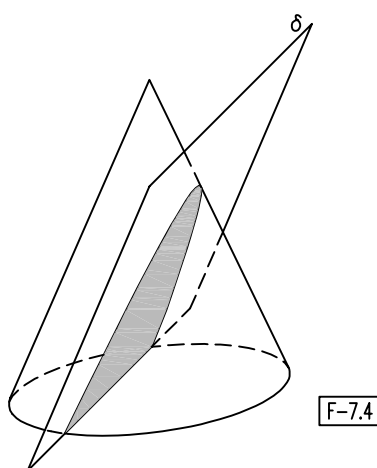
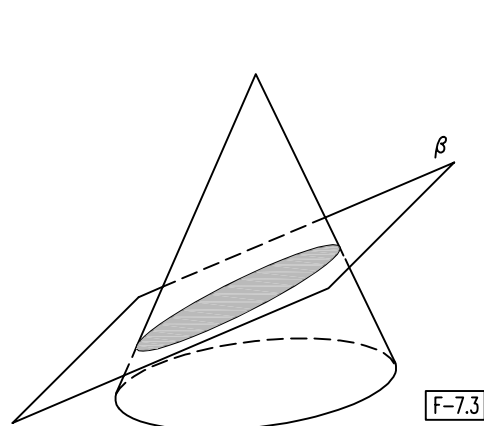
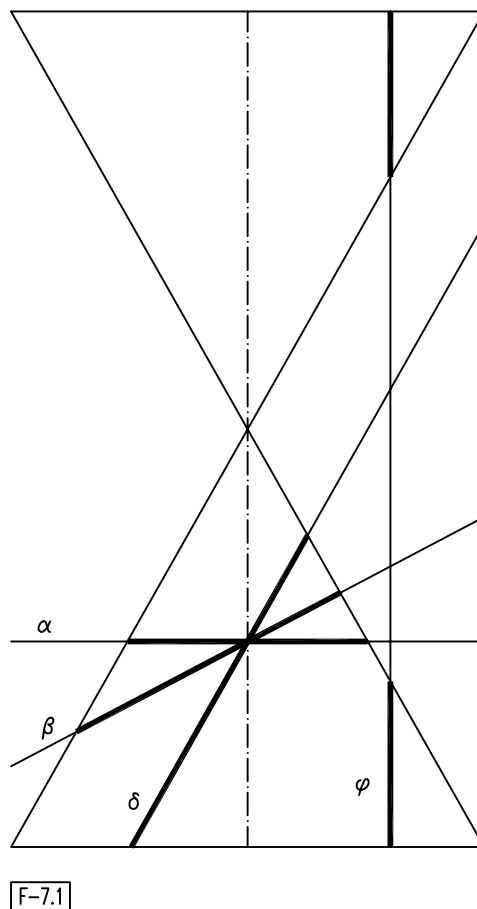
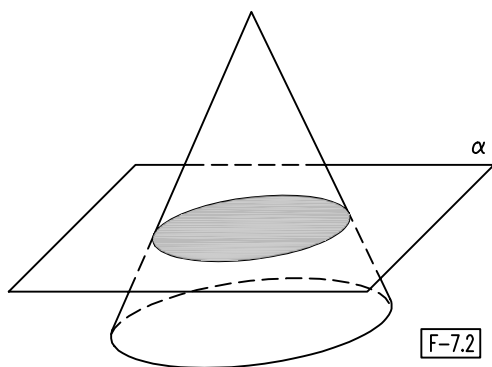
CONCEPTOS

7.1.- O cono e as cónicas.

Superficie cónica: A superficie cónica é a que xera unha recta que se corta con un eixo (formando con el un ángulo calquera) cando xira entorn do.

Curvas cónicas: As curvas orixinadas polo corte de unha superficie cónica por un plano. (F-7.1)

As curvas cónicas son catro: **Circunferencia** (F-7.2), **elipse** (F-7.3), **parábola** (F-7.4) e **hipérbole** (F-7.5).



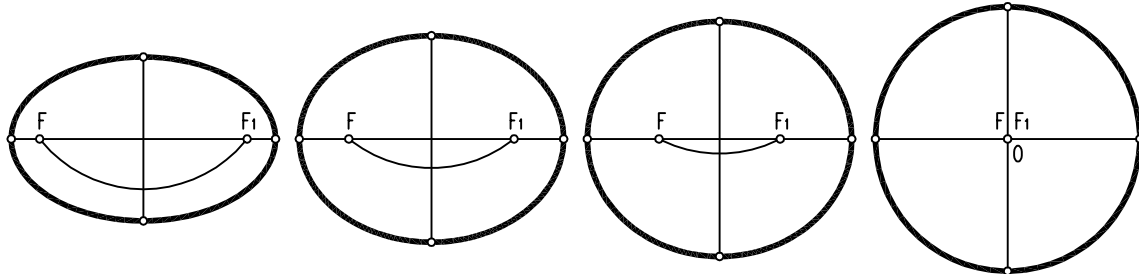
Tódalas cónicas saen do cono o que implica que, no fondo, **todas elas son a mesma curva e teñen por tanto as mesmas características xeométricas**. A conclusión máis interesante disto é que, na súa construción ou na resolución de calquera problema xeométrico relacionado con elas (trazado de rectas tanxentes, intersección con unha recta), usaremos sempre o mesmo método.

7.2.- Por que tódalas cónicas son iguais.

Circunferencia: O lugar xeométrico dos puntos que equidistan de outro fixo (chamado centro) e cuxa distancia ó punto oposto, pasando polo centro, tamén é constante e igual o dobre da distancia ó centro.

Elipse: O lugar xeométrico dos puntos cuxa suma de distancias a outros dous fixos (os focos) é constante e igual ó eixo maior.

Estas dúas definicións son, no fondo, a mesma como podemos ver na imaxe F-7.6.



F-7.6

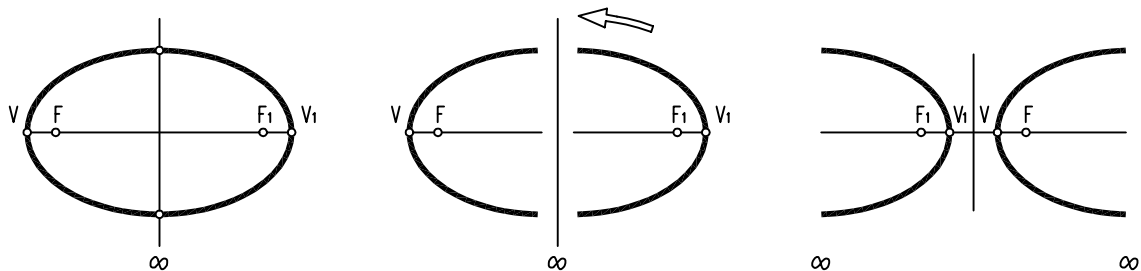
Os **focos da elipse** obtémolos facendo centro nun dos extremos do eixo menor e, cun radio igual á metade do eixo maior, cortamos ó mesmo eixo maior en eses dous puntos.

Se deixamos fixo o eixo maior e imos aumentando o eixo menor da elipse, poderemos comprobar como os focos vanse acercando ó centro da elipse. Cando o eixo menor é igual ó eixo maior, os focos coinciden no mesmo punto (o centro) do eixo maior que é así un punto dobre; os dous eixos iguais serán entón dous diámetros da circunferencia na que se terá transformado a elipse.

Hipérbole: O lugar xeométrico dos puntos cuxa diferenza de distancias a outros dous fixos (os focos) é constante e igual ó eixo.

Aínda que pareza o contrario, **é a mesma definición que a da elipse.**

A hipérbole é unha curva de dúas ramas infinitas. Se imaxinamos unha elipse de tamaño infinito, a partimos polo medio (coincidindo co eixo menor) e lle damos a volta a unha das metades e a enfrontamos coa outra, teremos unha hipérbole. Dado que a unha metade da elipse orixinal lle demos a volta, cambiamos o sentido positivo do eixo "X" e, o que antes era positivo, agora é negativo; deste xeito o que antes era "suma de distancias" converteuse en "diferenza de distancias". A hipérbole tería o eixo menor no infinito polo que soamente falamos do eixo (ten soamente dous vértices). F-7.7.



F-7.7

Parábola: O lugar xeométrico dos puntos que equidistan de outro fixo (o foco) e de unha recta tamén fixa (a directriz).

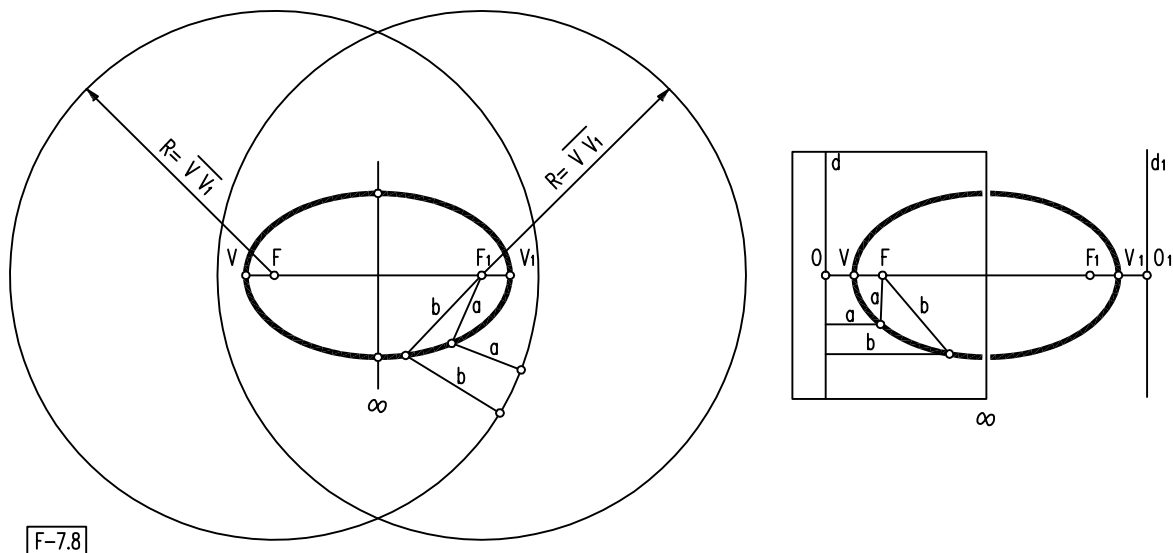
A parábola é unha curva aberta e infinita, de unha soa rama polo que, aparentemente, non ten nada que ver coa elipse. En realidade é, xeométricamente, **media elipse de tamaño infinito.**

Debemos introducir o concepto de "circunferencia focal". A **circunferencia focal** de unha elipse é unha circunferencia que ten por radio o eixo maior e por centro un dos focos, polo que teremos dúas posibles circunferencias focais (F-7.8).

Como se verá máis adiante (cando falemos das rectas tanxentes á elipse e as súas características xeométricas), calquera punto da elipse equidista do foco que non é centro da circunferencia focal e da propia circunferencia focal.

Se imaxinamos unha elipse de tamaño infinito e trazamos as circunferencias focais, teríamos dúas circunferencias de radio infinito, o que faría que, en cada lado do eixo maior tivéramos unha recta, perpendicular a dito eixo maior, a unha distancia do vértice igual á distancia existente entre o vértice e o foco; loxicamente, a distancia entre calquera punto da elipse e o foco do seu lado sería igual á distancia entre ese punto e a circunferencia focal que, agora, é unha recta e lle chamamos "directriz".

En resumo, **unha parábola sería media elipse de tamaño infinito.** F-7.8



A ELIPSE

Elipse: O lugar xeométrico dos puntos cuxa suma de distancias a outros dous fixos (os focos) é constante e igual ó eixo maior.

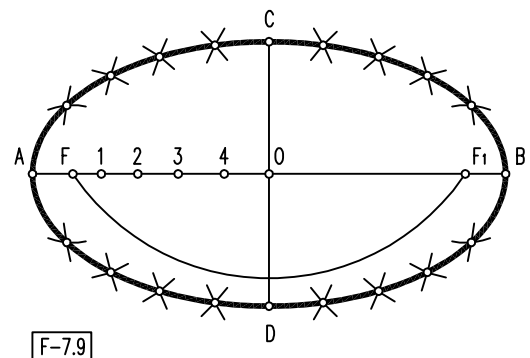
Para trazar unha elipse, dado que non está formada por arcos de circunferencia, deberemos obter puntos dela e unilos a máan alzada ou mediante unha plantilla de curvas.

7.3.- Trazado da elipse por puntos - F-7.9

Dados os eixos **AB** e **CD**.

Con centro en **C** e radio **OA** (a metade do eixo maior) trazamos un arco que cortará ó eixo maior nos focos **F** e **F1**. Entre **F** e **O** tomamos unha serie de puntos (cantos máis mellor pois acadaremos maior exactitude no trazado) a distancia aleatoria.

Con radio **A1** e centro en **F** e **F1**, trazamos arcos a ambos lados do eixo maior. Con radio **B1** e centro en **F1** e **F**, cortamos os arcos anteriores e teremos xa catro puntos da elipse. Facemos o mesmo cos restantes puntos (**2**, **3** e **4**).



7.4.- Trazado da elipse por afinidade - F-7.10

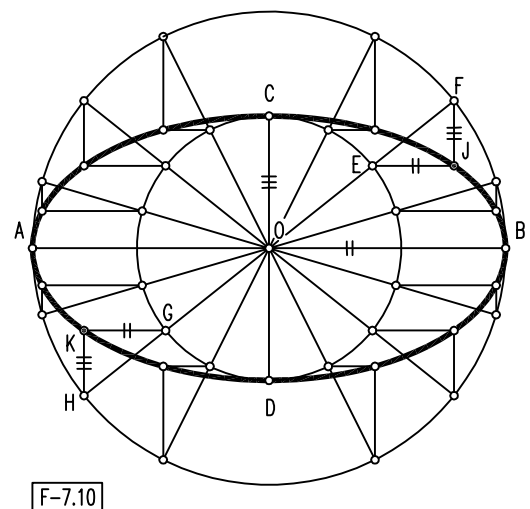
Dados os eixos **AB** e **CD**.

Con centro en **O** trazados dúas circunferencias que teñan por diámetro a medida dos eixos.

Polo centro **O** trazamos varios diámetros (cantos máis mellor pois acadaremos maior exactitude no trazado).

Os diámetros trazados cortarán en dous puntos a cada unha das dúas circunferencias: Á circunferencia de menor radio nos puntos **E** e **G** e á de maior radio nos puntos **F** e **H**.

Por **F** e **H** trazamos paralelas ó eixo menor e por **E** e **G** paralelas ó eixo maior; onde se corten teremos os puntos da elipse **J** e **K**. Se facemos o mesmo con tódolos demais diámetros obteremos os restantes puntos da curva. Os unimos a man alzada e temos a nosa elipse.



7.5.- Trazado da elipse dados dous diámetros conxugados - F-7.11

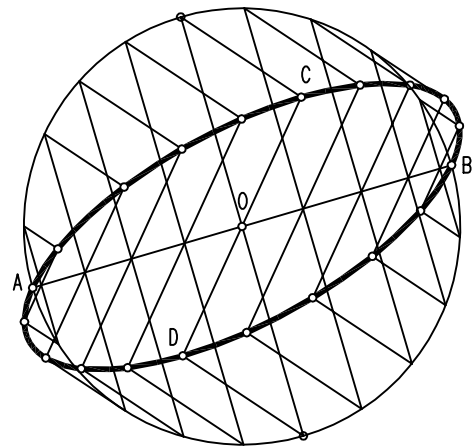
Dados os diámetros conxugados **AB** e **CD**.

Trazamos unha circunferencia de centro **O** e diámetro o diámetro conxugado maior (neste caso **AB**).

Trazamos unha perpendicular ó diámetro conxugado maior polo centro **O** e unimos os puntos de corte coa circunferencia cos extremos **C** e **D** do diámetro conxugado menor.

Para obter outros puntos da elipse repetimos este proceso trazando paralelas á perpendicular trazada no punto anterior, o diámetro conxugado menor e ás rectas que unen os seus extremos.

Unimos, a man alzada ou con plantilla de curvas os puntos obtidos.



F-7.11

7.6.- Obter os eixos da elipse a partir de dous diámetros conxugados - F-7.12

Dados os diámetros conxugados **AB** e **CF**.

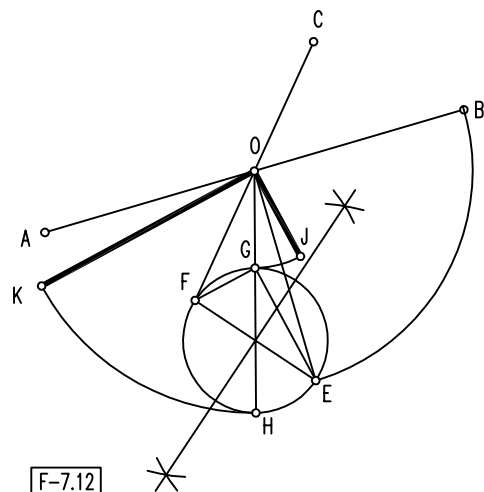
Trazamos polo centro **O** unha perpendicular a un dos diámetros conxugados (neste caso o **AB**) e levamos sobre ela a medida do semidiámetro **OB**, obtendo o punto **E**.

Unimos **E** co extremo máis próximo do outro diámetro conxugado (neste caso **F**).

Trazamos a circunferencia de diámetro **EF** e unimos o seu centro co centro **O** da elipse. Isto nos dará os puntos **G** e **H** de corte coa circunferencia. Unindo calquera de estes puntos con **F** e **E** obterémo-las direccións dos eixos da elipse.

Trazamos por **O** unha paralela a **FG** e outra a **GE**. Levamos sobre elas as distancias **OH** e **OG** obtendo así os semieixos da elipse **OK** e **OJ**.

Se facemos os simétricos obterémo-los eixos completos da elipse.



F-7.12

A HIPÉRBOLE

Hipérbole: O lugar xeométrico dos puntos cuxa diferenza de distancias a outros dous fixos (os focos) é constante e igual ó eixo (ou sexa, a distancia entre os vértices).

Para trazar unha hipérbole, dado que non está formada por arcos de circunferencia, deberemos obter puntos dela e unilos a man alzada ou mediante unha plantilla de curvas.

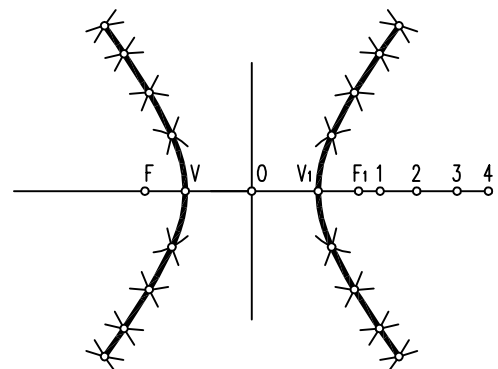
7.7.- Trazado da hipérbole por puntos -F-7.13

Dados os vértices **V** e **V₁** e os focos **F** e **F₁**.

A partir de un dos focos (neste caso o **F₁**) cara a fora collemos unha serie de puntos (cantos máis mellor pois acadaremos maior exactitude no trazado) a distancia aleatoria.

Con radio **V₁F₁** e centro en **F** e **F₁**, trazamos arcos a ambos lados do eixo. Con radio **V₁F** e centro en **F₁** e **F**, cortamos os arcos anteriores e teremos xa catro puntos da hipérbole. Facemos o mesmo cos restantes puntos (**2**, **3** e **4**).

Unimos, a man alzada ou con plantilla de curvas os puntos obtidos.



F-7.13

7.8.- Dados os eixos da hipérbole obter os focos – F-7.14

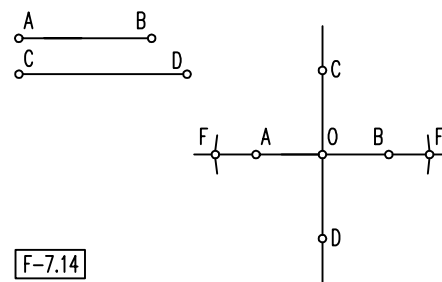
Dados os eixos **AB** e **CD**.

Trazamos dúas rectas perpendiculares entre si.

Poñemos os eixos en cadansúa recta, centrados con respecto ao punto de intersección **O**.

Con centro en **O** e radio **AC** (ou **AD**, **CB** ou **BD**) cortamos ao eixo horizontal en dous puntos que serán os focos **F** e **F'** da hipérbole.

Agora trazaremos a hipérbole polo método xa visto no apartado anterior.



F-7.14

A PARÁBOLA

Parábola: O lugar xeométrico dos puntos que equidistan de outro fixo (o foco) e de unha recta, tamén fixa (a directriz).

Para trazar unha parábola, igual que no resto das cónicas, deberemos obter puntos dela e unilos a máñ alzada ou mediante unha plantilla de curvas.

7.9.- Trazado da parábola por puntos - F-7.15

Dados o vértice **V** e a directriz **d**.

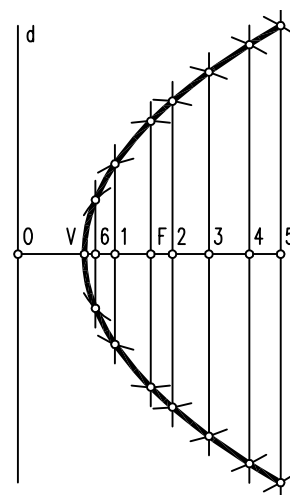
Levamos a partir de **V** a distancia **VO** e obtémo-lo foco **F**.

A partir do vértice **V**, collemos unha serie de puntos (cantos máis mellor pois acadaremos maior exactitude no trazado) a distancia aleatoria. O propio foco **F** pode ser un dos puntos escollidos.

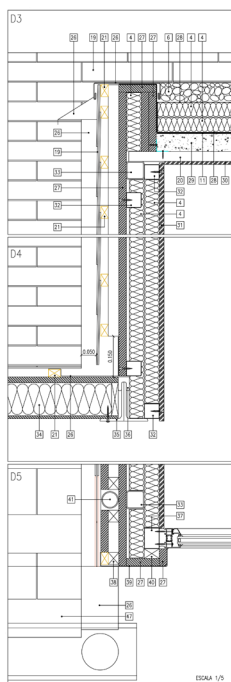
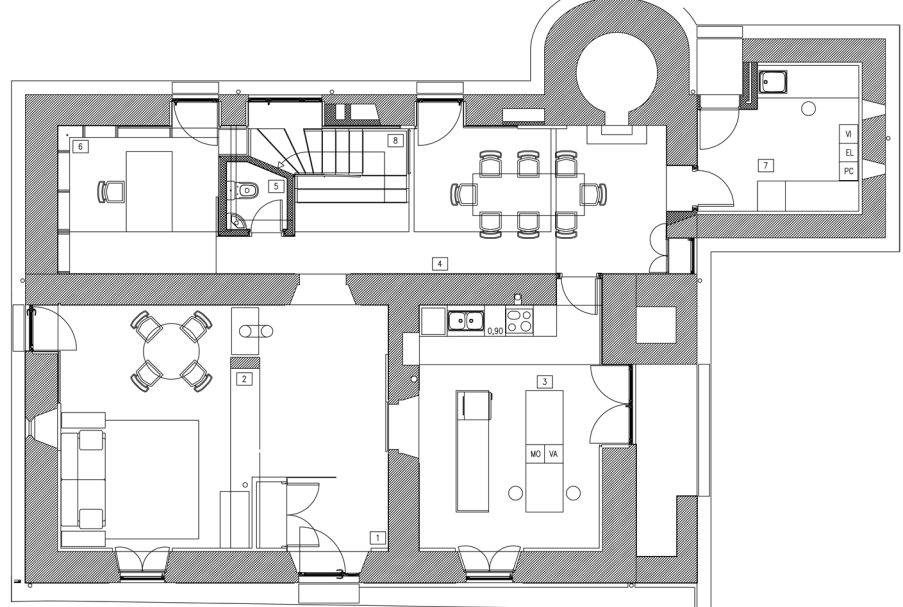
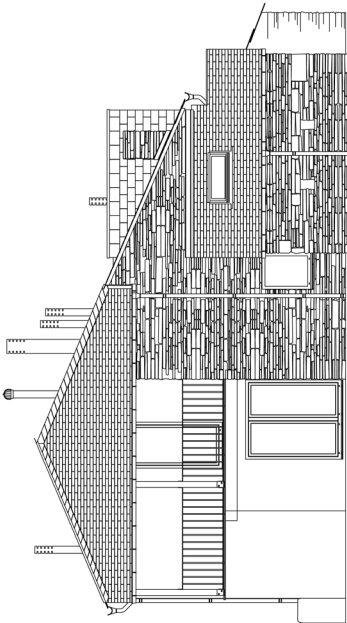
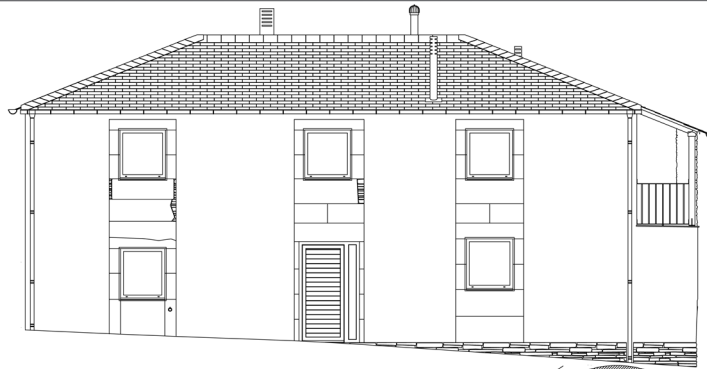
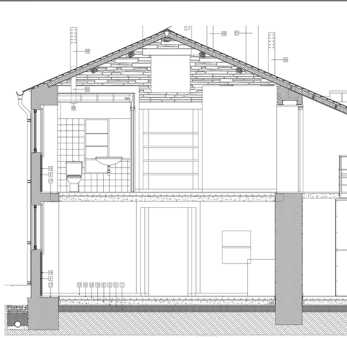
Levantamos perpendiculares ó eixo polos puntos.

Colleamos a distancia desde o punto **1** á directriz **d** e, con centro en **F**, cortamos a ambos lados do eixo á vertical trazada polo punto **1**. Facemos o mesmo cos demais puntos.

Se vemos que nos queda moita distancia entre os puntos da parábola obtidos a partir do **1**, podemos coller outro punto entre **1** e **V** (no noso caso o punto **6**) e obter os puntos correspondentes da parábola tal e como quedou explicado.



F-7.15



SISTEMA
DIÉDRICO

1 - FUNDAMENTOS

O CONCEPTO - SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

1.0.- Que é un sistema de representación e por que fai falta

A linguaxe falada ou escrita foi inventada polo home para comunicarse e para transmitir coñecementos, ideas ou novas. Namentres as culturas ou os pobos eran grupos pechados ou pequenos a transmisión dos coñecementos facíase de boca a boca e as aprendizaxes de oficios eran directas: O aprendiz recibía as ensinanzas directamente do mestre e, cando a súa vez chegaba a mestre, as transmitía ós seus propios aprendices.

Para facer unha cadeira ou calquera outro obxecto o mestre facía ou creaba un modelo que despois era reproducido unha e outra vez.

Coa chegada da industria o deseño de obxectos e a súa fabricación xa non se producía no mesmo sitio nin polas mesmas persoas (se cadra nin tan sequera falaban o mesmo idioma) polo que se fixo necesaria a creación dunha linguaxe específica para **comunicar cousas** e a linguaxe falada ou escrita non podía resolver ese problema. Facía falta unha linguaxe diferente e así naceron os **SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN** que son, sen dúbida, a linguaxe máis universal.

O asunto é o seguinte:

Como podo definir un obxecto de tres dimensións (unha cadeira, unha mesa,...) de xeito que poda ter toda a información con absoluta precisión e poder fabricalo en calquera lugar do planeta sen necesidade de levar o prototipo ou o obxecto orixinal?.

Isto, que ten importancia con un obxecto, pequeno faise imprescindible cando falamos de obxectos maiores, un edificio, un barco ou unha cidade enteira.

Chegamos entón ó miolo do asunto, que é: **De que xeito podo dar toda a información necesaria de un obxecto de tres dimensións mediante unha representación en un plano, que soamente ten dúas dimensións. Como suplo a 3ª dimensión que elimino?**

Para responder a isto nacen os sistemas de representación:

SISTEMA DIÉDRICO.- Permite representar calquera obxecto con absoluta precisión, de xeito que calquera outra persoa poda ter toda a información do mesmo para reproducilo con total precisión.

A representación dun obxecto en sistema diédrico non se parece en case nada o obxecto real (para entendelo teremos que educar a visión espacial).

SISTEMA AXONOMÉTRICO.- Permite representar o obxecto coas súas medidas máis ou menos reais e a representación do obxecto parécese bastante ó obxecto real.

SISTEMA CÓNICO ou **PERSPECTIVA LIÑAL.**- Non permite representar o obxecto de xeito que podamos ter as súas medidas reais pero a representación del é igual (ou case que igual) a como nos o vemos na realidade.

Se poñemos o exemplo de unha cadeira, utilizaremos o **SISTEMA DIÉDRICO** para facer os planos cos que despois o carpinteiro a vai facer exactamente igual a como foi deseñada. Utilizaremos o **SISTEMA AXONOMÉTRICO** para facer unha representación volumétrica da cadeira. Utilizaremos o **SISTEMA CÓNICO** para facer unha representación totalmente real da cadeira e poder facer, por exemplo, unha fotomontaxe para situala na imaxe dun salón dunha vivenda real.

SISTEMA DIÉDRICO

1.1.- O Concepto

Empecemos por **poñer un pouco de orde no espazo infinito**.

Collemos **dous planos perpendiculares entre si** e que chamaremos planos de proxección (**F-1.1**). Temos un plano vertical **PV** e outro horizontal **PH**. Aínda que representemos **PV** e **PH** con límites, debemos ter en conta que ámbolos dous son infinitos. A recta onde se cortan os dous planos a chamaremos **liña de terra (LT)**.

Os dous planos **PH** e **PV** cando se cortan dividen o espazo en catro partes ou **cuadrantes (1C, 2C, 3C e 4C)**. Nos atopámonos sempre no 1º cuadrante e, polo tanto, vemos o que pasa nel, mentres que nos outros tres cuadrantes non; dicimos que todo o que estea neses tres cuadrantes (**2C, 3C e 4C**) está oculto.

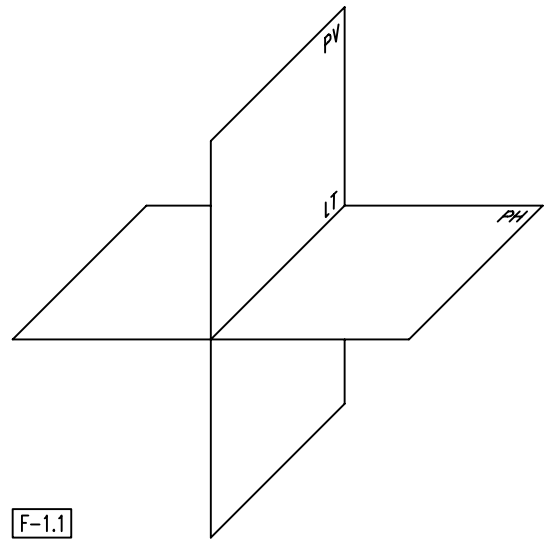
1.2.- A proxección

Para empezar a representar calquera cousa en **SISTEMA DIÉDRICO** e poder resolver o problema da 3ª dimensión que necesariamente ten que desaparecer en unha representación plana imos introducir o concepto de **PROXECCIÓN**.

Todos coñecemos o que é unha proxección cinematográfica. O concepto de proxección que nos imos usar é exactamente o mesmo:

Proxectar é lanzar algo contra un plano ó que chamaremos plano de proxección. No plano teremos a proxección do obxecto que proxectamos pero non o obxecto real, que quedará no espazo (o igual que a película a proxectamos sobre a pantalla de cine pero o filme real queda no proxector).

En SISTEMA DIÉDRICO utilizaremos a **proxección ortogonal ou perpendicular ó plano**, ou planos, de proxección. Empecemos polo elemento máis sinxelo que poidamos proxectar: **O punto**.



F-1.1

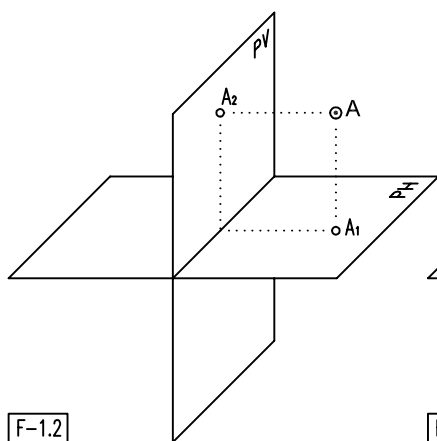
O PUNTO

1.3.- Representación do punto

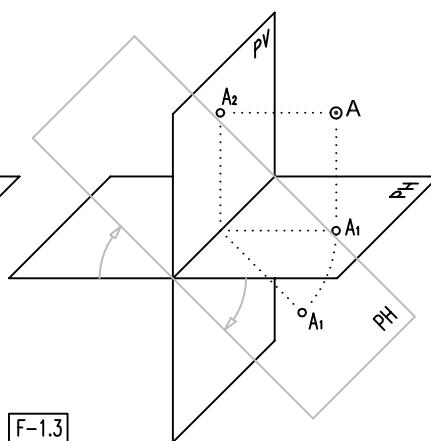
Un punto é un lugar no espazo.

Dado un punto **A** (os puntos os denominamos por letras maiúsculas), o podo proxectar sobre os dous planos de proxección. Sobre o **PH** terei a 1ª proxección ou proxección horizontal, **A₁**. Sobre o **PV** terei a 2ª proxección ou proxección vertical, **A₂**. **F-1.2**

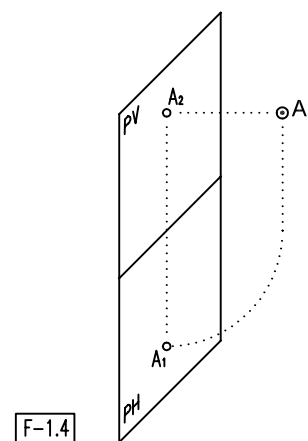
Para pasar á representación diédrica disto que eu teño no espazo (**F-1.2**) debo facer o seguinte artificio: Vou supoñer que a liña de terra é unha bisagra e vou xirar o plano horizontal (**F-1.3**) de xeito que a parte dianteira do PH quede coincidente coa parte inferior de plano vertical e, a parte posterior do plano horizontal quede coincidente coa parte superior do plano vertical, tal e como podemos ver na **F-1.4**. Agora teremos os dous planos en un.



F-1.2

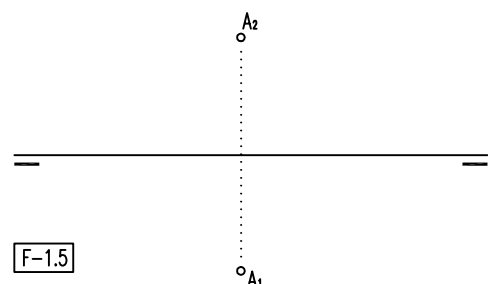


F-1.3



F-1.4

En **SISTEMA DIÉDRICO** teremos entón (**F-1.5**) a **liña de terra** (que a representamos por unha liña fina que ten dous trazos grosos por debaixo dela nos extremos) e **as dúas proxeccións do punto A (A₁ e A₂)** que estarán, necesariamente, **na mesma vertical**.

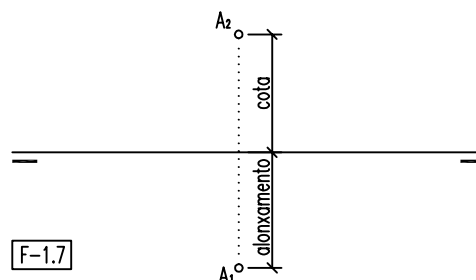
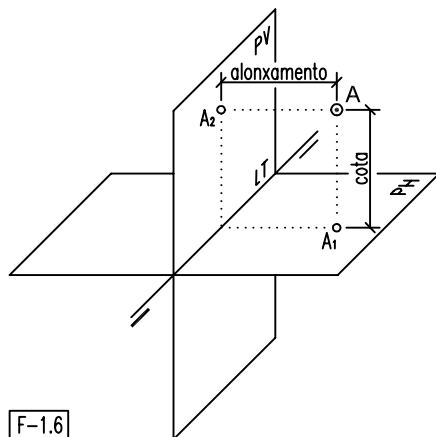


F-1.5

Cando estamos na representación diédrica (F-1.5) somos conscientes de que non temos o punto **A** senón que temos que traballar coas súas proxeccións (**A₁** e **A₂**) que son o único que nos podemos “tocar” pois é o único que temos nos planos de proxección. O asunto é se, con estas proxeccións, temos o punto perfectamente definido ou non.

Á distancia do punto **A** ó plano horizontal lle chamaremos “**cota**” e á distancia do punto ó plano vertical “**aloxamento**” (F-1.6). Na representación diédrica (F-1.7) a **cota** será a distancia da proxección vertical **A₂** á liña de terra e o **aloxamento** será a distancia da proxección horizontal **A₁** á liña de terra. Temos así o punto perfectamente definido coas súas proxeccións diédricas e, polo tanto, o **SISTEMA DIÉDRICO** funciona para situar un punto no espazo mediante unha representación plana de dúas dimensións.

Queda agora por comprobar se isto que ocorre co punto cando está no primeiro cuadrante, mantense cando está nos outros tres.

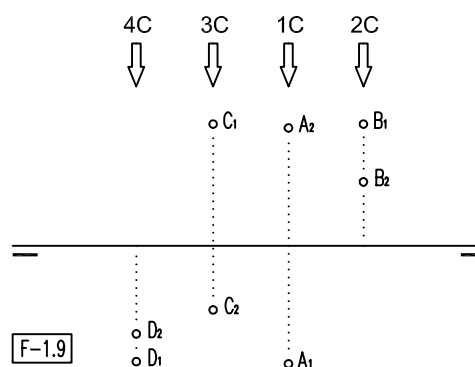
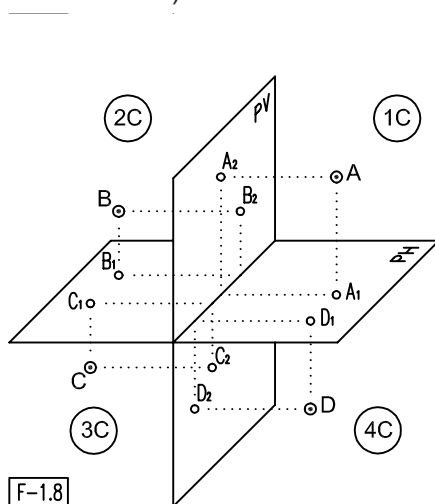


1.4.- Posicións do punto

Cando temos un punto **B** no segundo cuadrante **2C** (F-1.8) a súa proxección horizontal **B₂** está sobre a parte posterior do plano horizontal e, cando pasamos á representación diédrica (F-1.9) quedan as dúas proxeccións (**B₁** e **B₂**) por riba da liña de terra. Cando temos un punto **C** no terceiro cuadrante (**3C**) ou un punto **D** no cuarto (**4C**), vemos que as proxeccións diédricas de eles quedan de tal xeito que podemos diferenciar perfectamente non só a cota e o aloxamento senón o cuadrante no que está o punto (F-1.9):

- Cando o punto está no **primeiro cuadrante** a **proxección vertical está por riba da liña de terra e a horizontal por baixo**. Cando o punto está no **terceiro cuadrante** as **proxeccións ocupan a posición contraria** (a 2ª proxección por debaixo da liña de terra e a 1ª por riba).

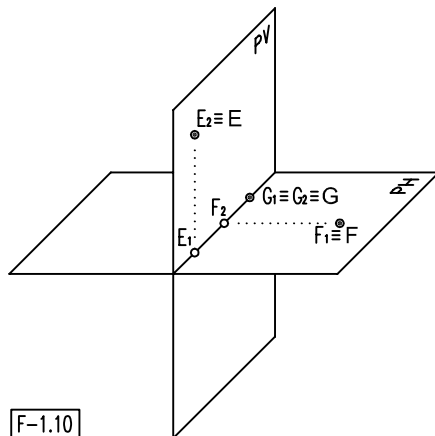
- Cando un punto está no **segundo cadrante** as **dúas proxeccións están por riba da liña de terra**. Cando un punto está no **cuarto cuadrante** as **proxeccións ocupan a posición contraria** (as dúas por debaixo da liña de terra).



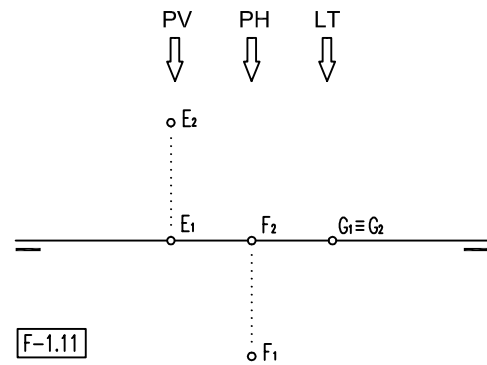
- Cando un punto (**E**) está no **plano vertical** (F-1.10) o punto coincide coa súa proxección vertical e a proxección horizontal está na liña de terra (F-1.11).

- Cando un punto (**F**) está no **plano horizontal** o punto coincide coa súa proxección horizontal e a proxección vertical está na liña de terra.

- Cando un punto (**G**) está na **liña de terra** o punto coincide coas dúas proxeccións e todos eles están na liña de terra.



F-1.10



F-1.11

A RECTA

1.5.- Representación da recta

Unha recta é unha sucesión de puntos aliñados. Para ter definida unha recta necesitamos dous puntos.

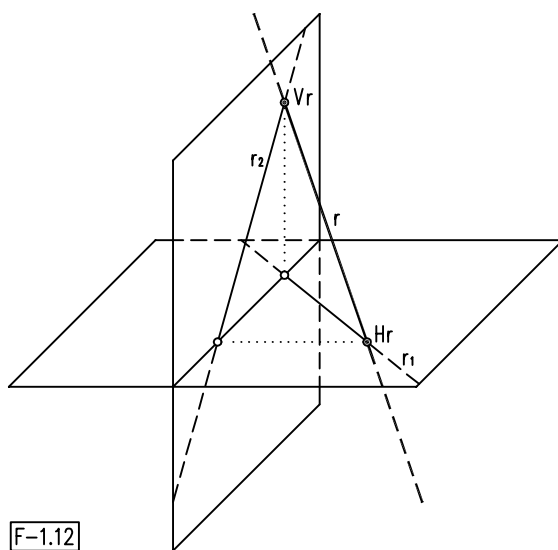
Un punto o representamos mediante as súas proxeccións. Unha recta é unha sucesión infinita de puntos e, polo tanto, as proxeccións da recta estarán formadas polas infinitas proxeccións dos infinitos puntos que a conforman. **F-1.12.**

Como xa dixemos, a recta é infinita (aínda que nos representemos unha parte dela), e pode pasar por varios cuadrantes (ate tres).

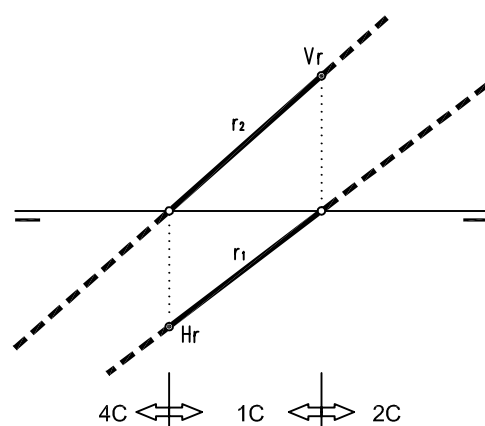
As trazas: Existen dous puntos notábeis na recta: **Os puntos onde a recta corta ós planos de proxección:** A estes puntos lles chamamos TRAZAS. Unha recta poderá ter dúas trazas, unha **vertical** (onde a recta corta ó plano vertical) e outra **horizontal** (onde a recta corta ó plano horizontal).

As partes vistas e ocultas: Nós vemos o que está no primeiro cuadrante, pero temos que representar todo o que está nos catro cuadrantes. Para diferenciar o que está no primeiro cuadrante do que está nos outros tres, utilizamos dous tipos de liñas: **Liña continua** para o que está no primeiro cuadrante e **liña de trazos** para o que está nos outros e está, polo tanto, oculto.

Cando pasamos á representación en sistema diédrico (**F-1.13**) teremos **dúas proxeccións** (r_1 e r_2), as **trazas** da recta (**Hr** e **Vr**), as **partes vistas e ocultas** e poderemos dicir por que cuadrantes pasa.



F-1.12



F-1.13

1.6.- Dados dous puntos obter a recta - F-1.14

Dados os puntos **A** e **B**.

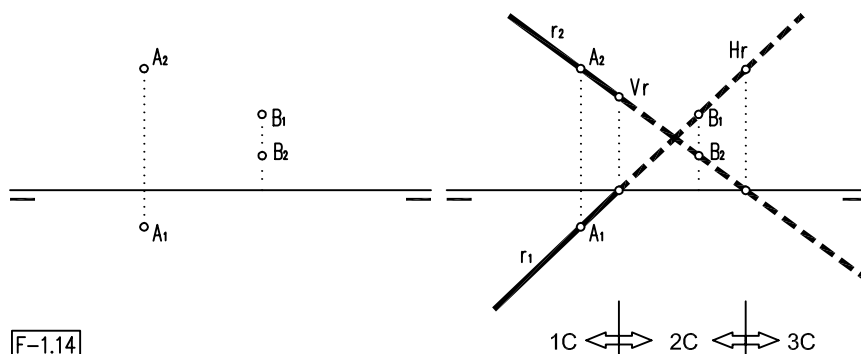
Os dous puntos pertencen á recta, iso quere dicir que as proxeccións dos puntos estarán nas proxeccións respectivas da recta. Unindo **A₁** con **B₁** teremos **r₁** e unindo **A₂** con **B₂** teremos **r₂**, as proxeccións da recta.

Onde **r₁** corta á liña de terra trazamos unha perpendicular a ela e, onde atopemos **r₂** será a traza vertical **Vr**. Loxicamente **Vr** está

no plano vertical, o que implica que (coma calquera punto que estea no plano vertical) a súa proxección horizontal ten que estar na liña de terra que é por onde vai pasar a proxección horizontal da recta.

Pola mesma razón anterior, onde **r₂** corta á liña de terra trazamos unha perpendicular a ela e, onde atopemos **r₁** será a traza horizontal **Hr**.

Para obter as partes vistas e ocultas da recta e os cuadrantes polos que pasa, só temos que ver onde está un dos puntos, por exemplo o **A**: Como ten a proxección vertical **A₂** por riba da liña de terra e a horizontal **A₁** por debaixo, sabemos que este punto está no primeiro cuadrante, razón pola cal a recta, neste tramo, estará no primeiro cuadrante ata que chegue a unha traza onde cambiará de cuadrante. A primeira traza que atopamos é a vertical **Vr**, o que quere dicir que estando no 1º cuadrante corta ó plano vertical e, forzosamente, ten que pasar ó 2º cuadrante (as proxeccións da recta pasan a ser de trazos e o punto **B** ten as dúas proxeccións por riba da liña de terra). Estando no 2º cuadrante corta ó plano horizontal o que significa que a recta pasa ó 3º cuadrante e segue coas proxeccións a trazos.



F-1.14

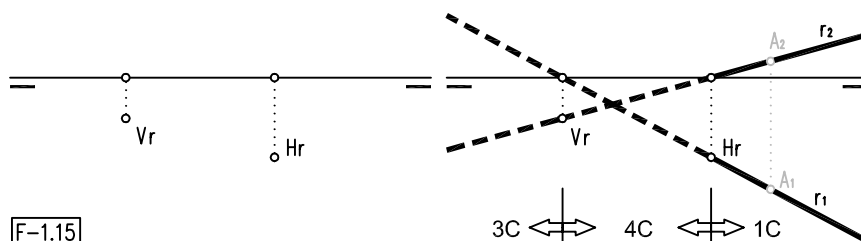
1.7.- Dadas as trazas obter a recta - F-1.15

Dadas as trazas **Hr** e **Vr**.

Hr está en **r₁** e **Vr** está en **r₂**.

Dende **Hr** trazamos unha perpendicular á liña de terra (LT) e onde a corte unimos con **Vr** e teremos **r₂**.

Dende **Vr** trazamos unha perpendicular á **LT** e onde a corte unimos con **Hr** e teremos **r₁**.



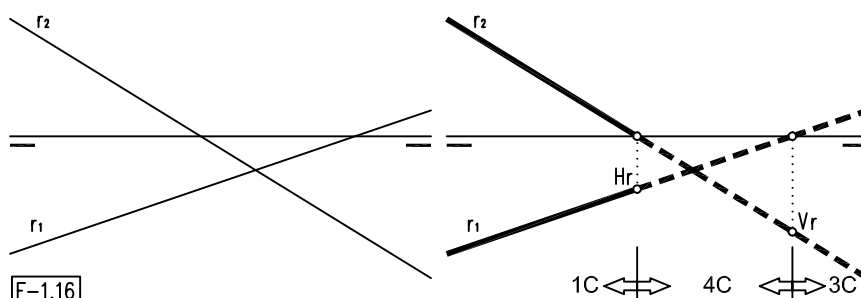
F-1.15

Para saber os cuadrantes polos que pasa a recta facemos o seguinte: Collemos un punto **A** calquera (**A₂** en **r₂** e **A₁** en **r₁**) e vemos en que cuadrante está. Neste caso está no primeiro cuadrante (1C). Cando se atopa con **Hr** soamente pode pasar o cuadrante inferior o 4C onde as proxeccións da recta son ocultas ou sexa a trazos; despois atopamos **Vr** que está por debaixo de LT polo que a recta pasa o 3C e segue a trazos.

1.8.- Dadas as proxeccións definir a recta - F-1.16

Dadas as proxeccións **r₁** e **r₂**.

Como xa fixemos nos casos anteriores: Onde **r₁** corta á LT trazamos unha perpendicular ate chegar a **r₂** e teremos **Vr**. Facemos o mesmo onde **r₂** corta á LT e, baixando, obtemos **Hr**. A partires de aquí trazamos as partes vistas e ocultas e os cuadrantes polos que pasa a recta.

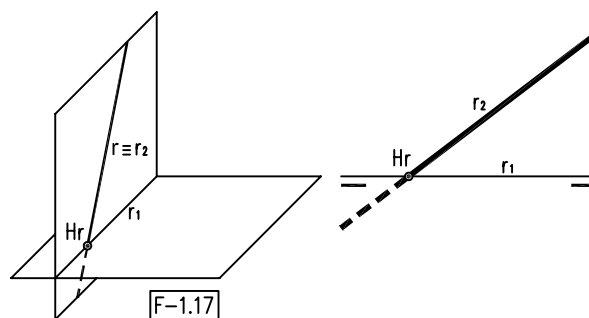


F-1.16

1.9.- Posicións particulares da recta

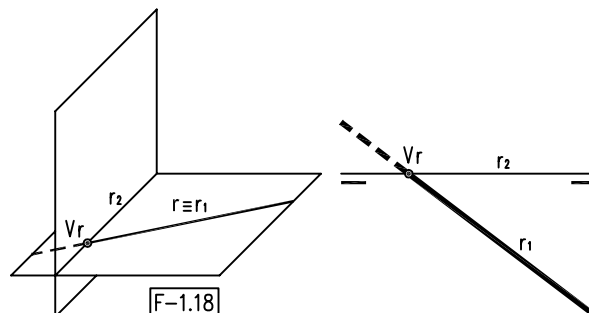
Recta contida no plano vertical – F-1.17

A recta contida no plano vertical coincide coa súa proxección vertical e a súa proxección horizontal está en LT. Loxicamente só ten traza horizontal H_r , que estará en LT.



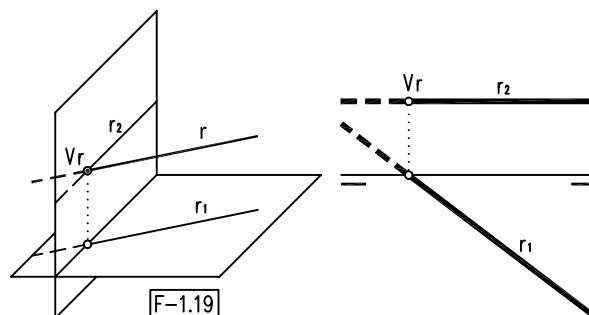
Recta contida no plano horizontal – F-1.18

A recta contida no plano horizontal coincide coa súa proxección horizontal e a súa proxección vertical está en LT. Loxicamente só ten traza vertical V_r , que estará en LT.



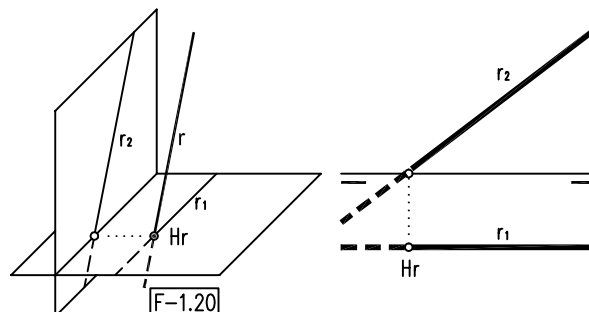
Recta HORIZONTAL – F-1.19

A recta horizontal é paralela ó PH, polo tanto a súa proxección vertical r_2 é paralela á LT e a proxección horizontal r_1 forma con LT un ángulo calquera (agás 90°).



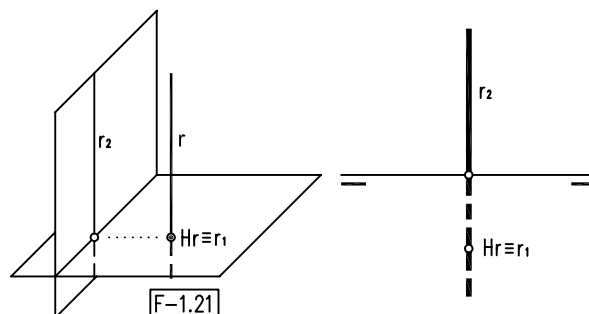
Recta FRONTAL – F-1.20

A recta frontal é paralela ó PV, polo tanto a súa proxección horizontal r_1 é paralela á LT e a proxección vertical r_2 forma con LT un ángulo calquera (agás 90°).



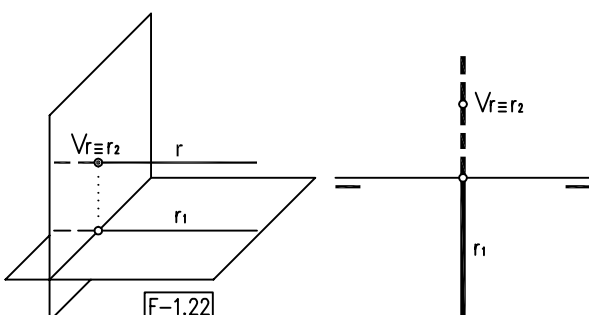
Recta VERTICAL – F-1.21

A recta vertical é perpendicular ó PH, polo tanto a súa proxección horizontal r_1 é un punto e coincide coa traza horizontal H_r . A proxección vertical r_2 é perpendicular á LT.



Recta DE PUNTA – F-1.22

A recta de punta é perpendicular ó PV, polo tanto a súa proxección vertical r_2 é un punto e coincide coa traza vertical V_r . A proxección horizontal r_1 é perpendicular á LT.

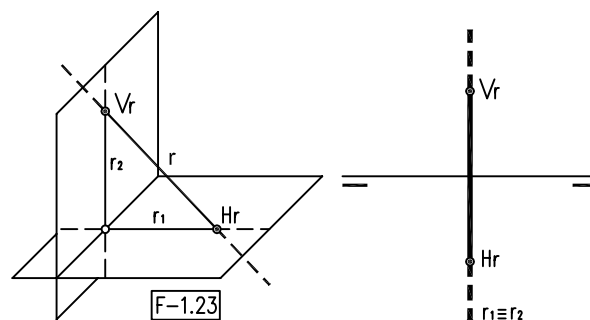


Recta DE PERFIL – F-1.23

A recta de perfil é unha recta colocada de tal xeiro que as súas proxeccións son coincidentes e perpendiculares á LT.

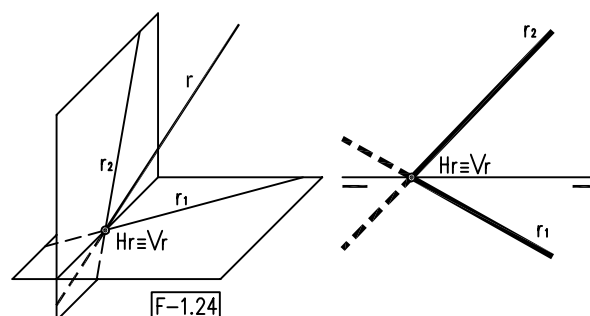
Debemos ter en conta que a recta de perfil non estaría definida soamente coas súas proxeccións e necesitaríamos dous puntos dela (ou as trazas).

Para traballar coas rectas de perfil é habitual ter que ir á 3ª proxección ou proxección de perfil, da que falaremos máis adiante.



Recta que corta á LT – F-1.24

A recta que corta á LT, como o seu nome indica, corta ós planos de proxección, PH e PV, na LT e as dúas trazas coinciden no mesmo punto.



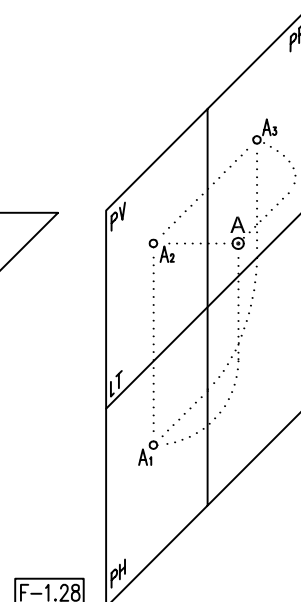
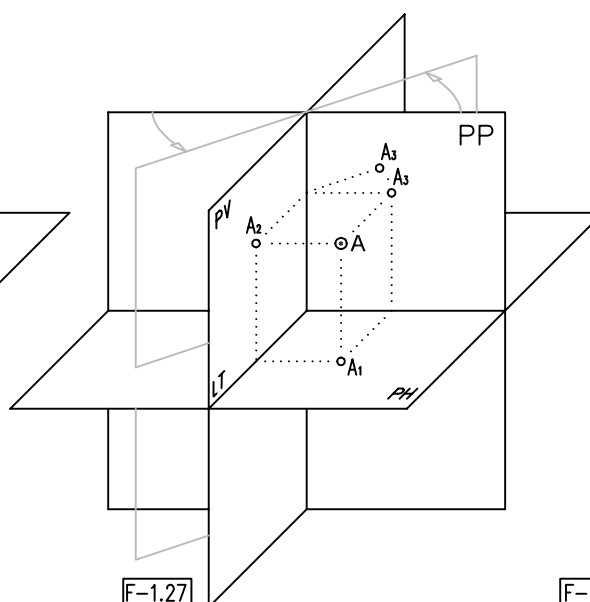
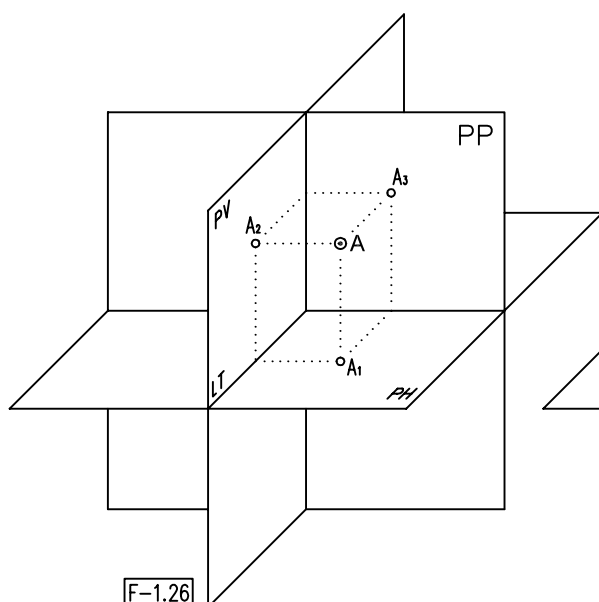
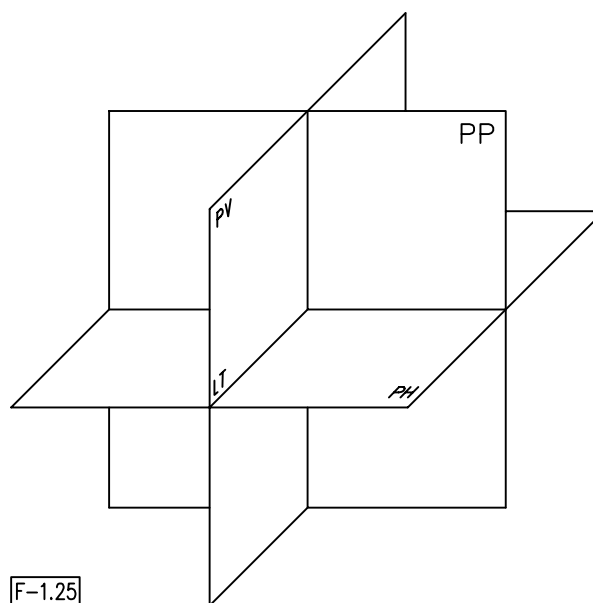
O PLANO DE PERFIL E A 3ª PROXECCIÓN

1.10.- A terceira proxección.

Para facer as proxeccións de puntos e rectas dividímo-lo espazo por dous planos perpendiculares entre si, PH e PV; con isto obtivemos dúas proxeccións diédricas, a proxección horizontal e a vertical (primeira e segunda). As veces estas dúas proxeccións non chegan para representar determinados elementos e necesitamos ter outra.

Para ter outra proxección, a **terceira proxección**, necesitamos outro plano de proxección. Imos coller (F-1.25) un plano perpendicular ós outros dous, PH e PV, ó que chamaremos **PLANO DE PERFIL (PP)**. Xa temos tres planos de proxección.

Con calquera punto **A** (F-1.26) teremos por tanto tres proxeccións, unha por cada plano de proxección: **A₁**, **A₂** e **A₃**. Deberemos agora pasar ó sistema diédrico abatendo os planos de proxección para quedar con unha única representación plana (o PH o abatemos coma xa quedou



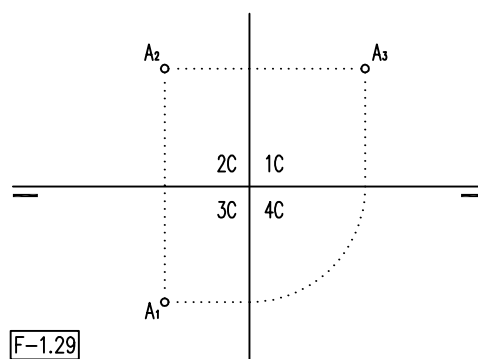
explicado anteriormente).

Para abater o plano de perfil, **PP**, procedemos de xeito similar a como fixemos con **PH** e **PV** (**F-1.27**) supoñendo que a recta vertical de corte con **PV** é unha bisagra e o xiramos ata que coincida co **PV**.

Teremos entón (**F-1.28**) tres planos de proxección superpostos no mesmo debuxo: **PH**, **PV** e **PP**. Por riba da **LT** teremos a parte superior do **PV**, a parte posterior do **PH** e a parte superior do **PP**. Por debaixo da **LT** teremos a parte inferior do **PV**, a parte dianteira do **PH** e a parte inferior do **PP**.

Ademais do antedito temos unha gran vantaxe (**F-1.29**):

Na proxección pe perfil temos os catro cuadrantes (1C, 2C, 3C e 4C) e **podemos ver, directamente, os cuadrantes polos que pasa unha recta ou nos que está un punto, sen necesidade de imaxinalo.**

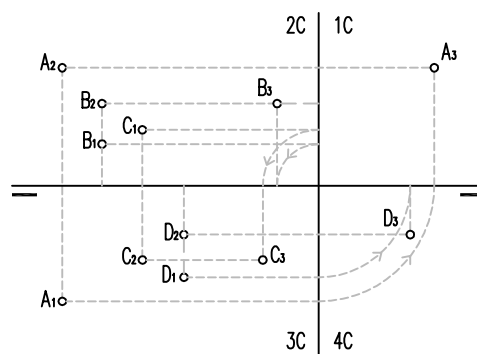


F-1.29

1.11.- O punto na terceira proxección - F-1.30

Na proxección de perfil podemos ver que o punto se sitúa no seu respectivo cuadrante.

A 3ª proxección de un punto calquera (**A₃**, **B₃**, **C₃** ou **D₃**) estará sempre á altura da 2ª proxección; levamos a 1ª proxección á liña de corte do plano de perfil, facemos centro no punto de corte coa liña de terra e xiramos no sentido contrario das agullas do reloxo e logo subimos ou baixamos.



F-1.30

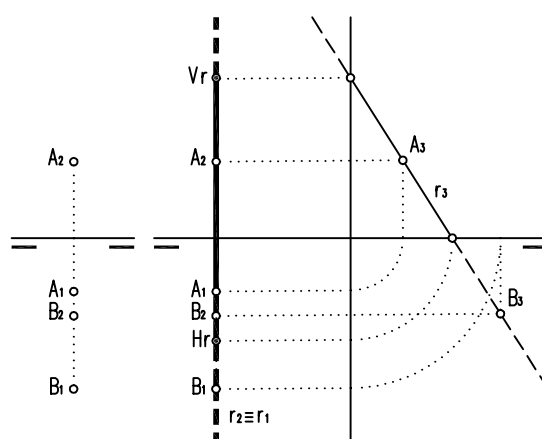
1.12.- A terceira proxección para a representación da recta

Normalmente cando temos dous puntos podemos obter a recta que forman (**1.6**) coas proxeccións, trazas, etc sen problemas. Cando os dous puntos están na mesma vertical con respecto á **LT** isto xa non é posible con só dúas proxeccións e necesitamos ir á proxección de perfil. Isto pasa coas rectas de perfil.

Dados os puntos **A** e **B** representar a recta que forman
F-1.31

Collemos un plano de perfil e obtemos a 3ª proxección de **A** e **B**. Unindo na proxección de perfil **A₃** con **B₃** obtemos **r₃**, 3ª proxección da recta **r**.

Onde **r₃** corta á vertical do plano de perfil teremos **Vr** e a levamos á vertical da 1ª e 2ª proxección. Onde **r₃** corta á **LT** será **Hr** e, xirando no sentido das agullas do reloxo, a levamos á vertical da 1ª e 2ª proxección. Para poñer as partes vistas e ocultas nos fixamos na proxección de perfil onde están perfectamente claras.



F-1.31

É importante ter en conta que a representación de **r** débemola facer na 1ª e 2ª proxección; se a facemos soamente na 3ª o exercicio quedaría sen rematar.

O PLANO

1.13.- Representación do plano - F-1.32/33

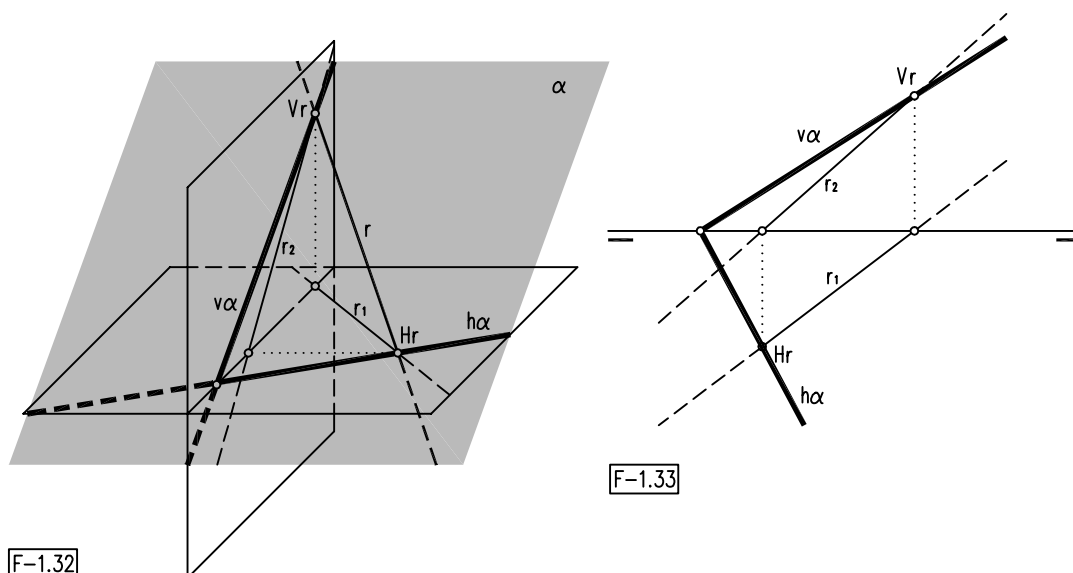
Para representar os puntos e as rectas usabamos as súas proxeccións pero isto non nos vale para a representación dos planos pois, dado que **un plano é unha superficie infinita**, a proxección do plano coincidiría cos planos de proxección.

Para a representación dun plano si nos serven as **trazas** ou sexa, **as rectas onde un plano corta ós planos de proxección**. Un plano α corta ó PH na traza horizontal $h\alpha$ (as trazas do plano son rectas e por iso as denominamos con letras minúsculas **h** ou **v** e o subíndice co nome do plano, sempre en letras do alfabeto grego) e ó PV na traza vertical $v\alpha$.

En un plano podemos ter infinitos puntos e infinitas rectas. Unha recta dun plano terá sempre, necesariamente, as súas trazas nas trazas do plano pois os únicos puntos do plano que estean nos planos de proxección terán que estar nas trazas do plano.

As trazas dun plano son rectas infinitas e, lóxicamente, despois de cortar á liña de terra pasarían a estar ocultas (fora do primeiro cuadrante) e, polo tanto, deberían estar a trazos (F-1.32); como isto é sempre así, a normativa permítenos debuxar, sempre, a parte das trazas que está no primeiro cuadrante: $v\alpha$ continua por riba da liña de terra e $h\alpha$ continua por debaixo da liña de terra.

Como definimos un plano: Un plano está perfectamente definido con 3 puntos non aliñados, con dúas rectas que se cortan ou con unha recta e un punto alleo a ela.



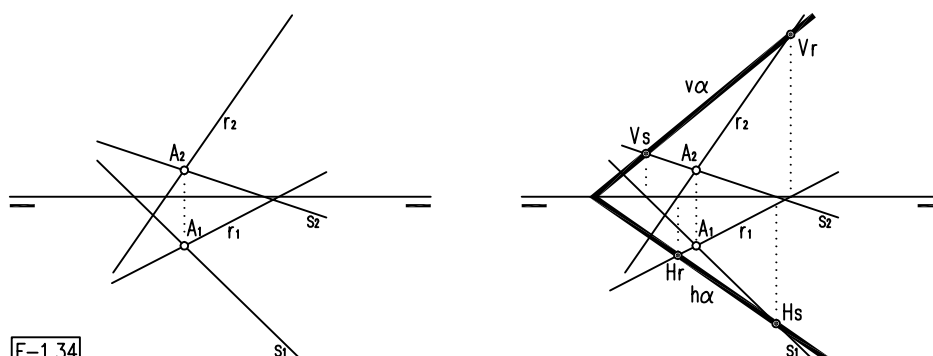
1.14.- Obter o plano dadas dúas rectas que se cortan - F-1.34

Dadas as rectas **r** e **s**.

As rectas **r** e **s** córtanse no punto **A**.

Obtemos as trazas das rectas tal e como vimos anteriormente: Onde r_1 corta á liña de terra, levanto unha perpendicular e onde atope a r_2 terei V_r . Onde r_2 corta á liña de terra, baixo unha perpendicular e onde atope a r_1 terei H_r .

Fago o mesmo coa recta **s** e unindo H_r e H_s obterei $h\alpha$ (traza horizontal do plano α); unindo V_r e V_s obterei $v\alpha$ (traza vertical do plano α).

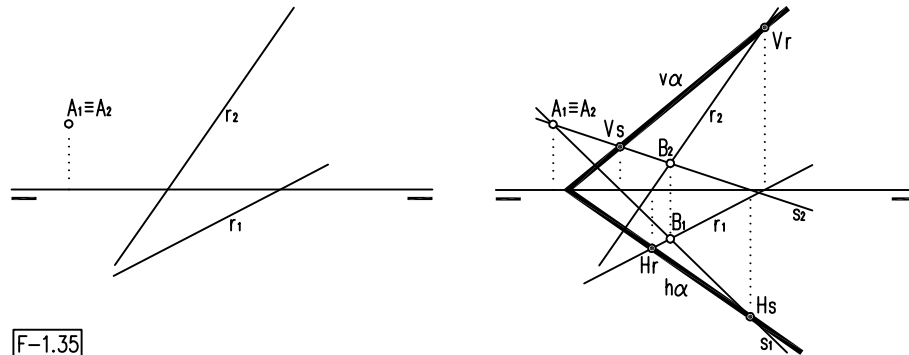


1.15.- Obter o plano dada unha recta e un punto - F-1.35

Dada a recta r e o punto A .

Collemos un punto B calquera da recta r e o unimos co punto A (A_1 con B_1 daranos s_1 e A_2 con B_2 daranos s_2) dado para obter unha nova recta s que se corta coa dada.

Agora xa estamos no caso anterior. Obtemos as trazas de ámbalas dúas rectas e as unimos obtendo $h\alpha$ e $v\alpha$.

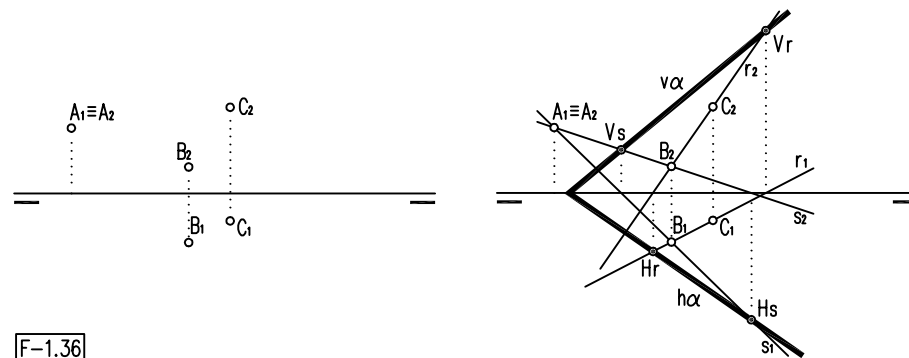


1.16.- Obter o plano dados tres puntos - F-1.36

Dados os puntos A , B e C .

Unindo A con B obtémola recta s e unindo B con C obtémola recta r .

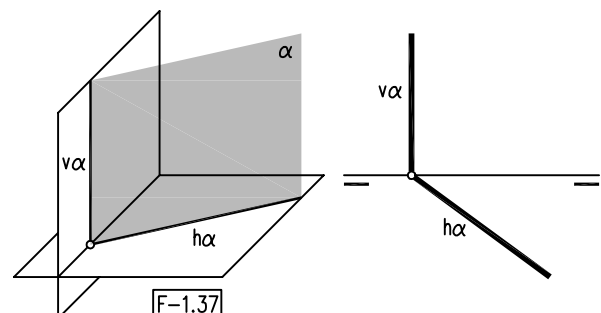
Temos agora dúas rectas que se cortan no punto B e, procedendo coma nos casos anteriores, obtemos $h\alpha$ e $v\alpha$.



1.17.- Posicións particulares do plano

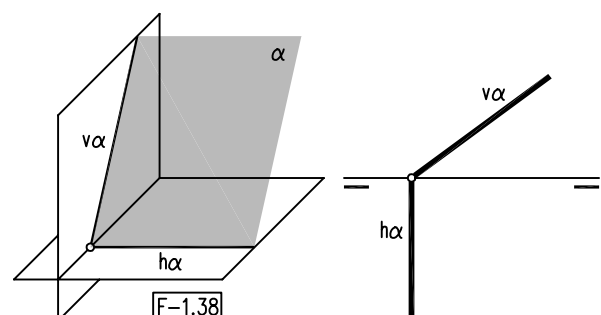
Plano proxeccionante horizontal – F-1.37

O plano proxeccionante horizontal é, como o seu nome indica, **perpendicular ó PH** e, como consecuencia, a súa traza vertical $v\alpha$ é perpendicular á LT e a súa traza horizontal $h\alpha$ forma un ángulo calquera con LT (diferente de 90°).



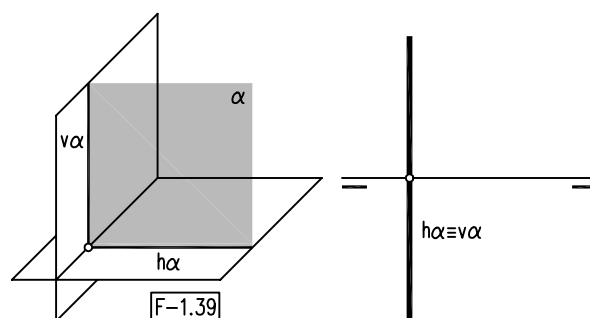
Plano proxeccionante vertical – F-1.38

O plano proxeccionante vertical é, como o seu nome indica, **perpendicular ó PV** e, como consecuencia, a súa traza horizontal $h\alpha$ é perpendicular á LT e a súa traza vertical $v\alpha$ forma un ángulo calquera con LT (diferente de 90°).



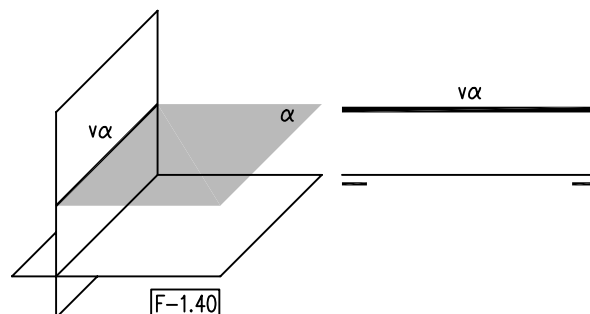
Plano de perfil – F-1.39

O plano de perfil é **perpendicular ó PV e ó PH** e, como consecuencia, as súas trazas **h α** e **v α** forman 90° con LT e coinciden na mesma liña.



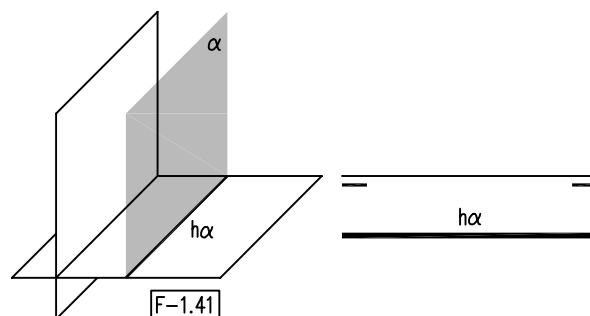
Plano horizontal – F-1.40

O plano horizontal é un plano **paralelo ó PH** e, como consecuencia, soamente ten traza vertical **v α** , que será paralela á LT.



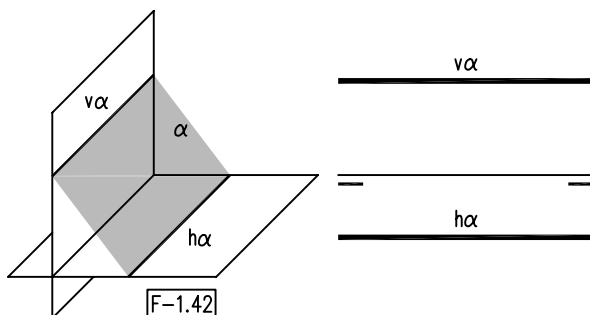
Plano vertical – F-1.41

O plano vertical é un plano **paralelo ó PV** e, como consecuencia, soamente ten traza horizontal **h α** , que será paralela á LT.



Plano paralelo á liña de terra – F-1.42

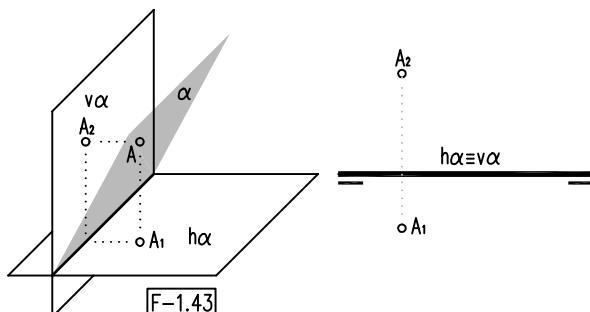
O plano paralelo a LT ten as dúas trazas **h α** e **v α** paralelas á LT.



Plano incidente coa liña de terra – F-1.43

O plano incidente con LT (ou que contén á LT) ten as dúas trazas **h α** e **v α** coincidentes con LT.

Este plano non quedaría definido soamente coas súas trazas (como si ocorre en tódolos demais) e necesitaríamos ter, ademais, un punto **A** do plano.



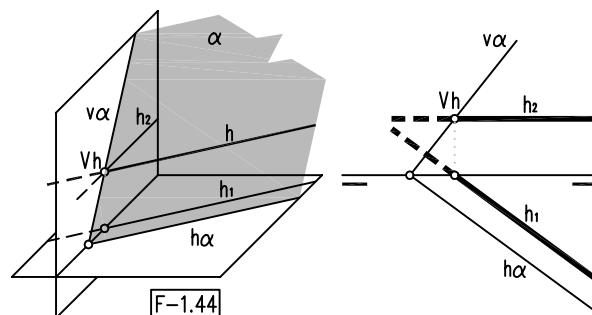
1.18.- Rectas particulares do plano

Recta horizontal – F-1.44

Unha **recta horizontal** dun plano α é calquera recta que pertenza ó plano e sexa horizontal.

A recta h é unha recta horizontal (é paralela ó PH e a súa proxección vertical h_2 é paralela á LT) e pertence ó plano pois a súa traza vertical V_h está en $v\alpha$.

Ademais, por ser horizontal e pertencer a α , a proxección horizontal da recta h_1 é paralela á traza horizontal do plano $h\alpha$.

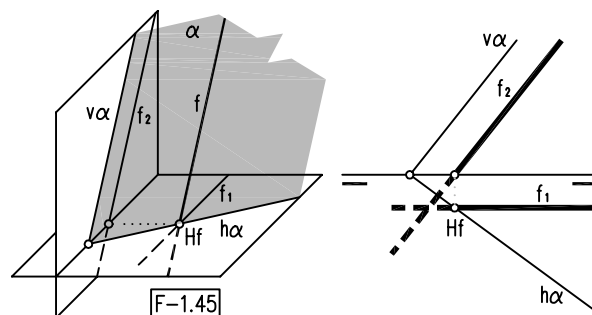


Recta frontal – F-1.45

Unha **recta frontal** dun plano α é calquera recta que pertenza ó plano e sexa frontal.

A recta f é unha recta frontal (é paralela ó PV e a súa proxección horizontal f_1 é paralela á LT) e pertence ó plano pois a súa traza horizontal H_f está en $h\alpha$.

Ademais, por ser frontal e pertencer a α , a proxección vertical da recta f_2 é paralela á traza vertical do plano $v\alpha$.

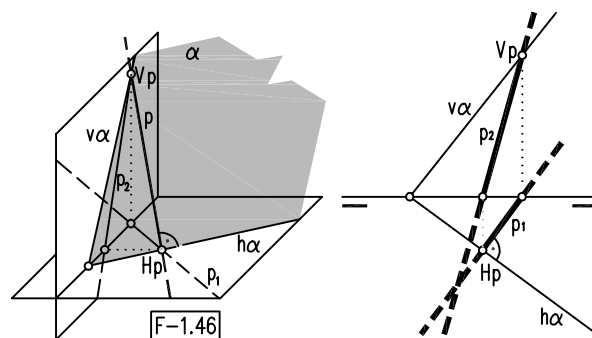


Recta de máxima pendente – F-1.46

Unha **recta de máxima pendente** dun plano α é calquera recta que pertenza ó plano e forme o maior ángulo posible co PH.

A recta do plano que forma o maior ángulo posible co PH é unha recta que é perpendicular á traza horizontal do plano e, coma consecuencia (como veremos máis adiante) a súa proxección horizontal tamén é perpendicular á traza horizontal do plano.

A recta p pertence ó plano α (as trazas da recta están nas trazas do plano) e, ademais, p_1 é perpendicular a $h\alpha$.

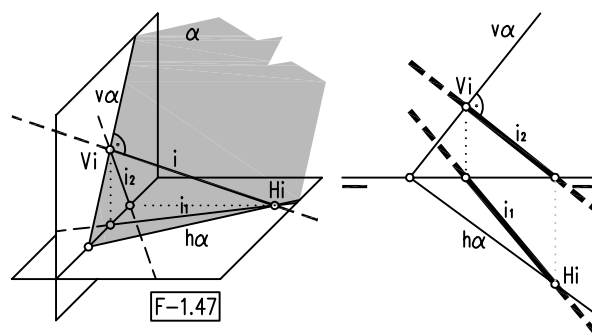


Recta de máxima inclinación – F-1.47

Unha **recta de máxima inclinación** dun plano α é calquera recta que pertenza ó plano e forme o maior ángulo posible co PV.

A recta do plano que forma o maior ángulo posible co PV é unha recta que é perpendicular á traza vertical do plano e, coma consecuencia (como veremos máis adiante) a súa proxección vertical tamén é perpendicular á traza vertical do plano.

A recta i pertence ó plano α (as trazas da recta están nas trazas do plano) e, ademais, i_2 é perpendicular a $v\alpha$.



2 - FERRAMENTAS DE TRABALHO

Como resolver calquera exercicio de Sistema Diédrico

Hai dúas regras de ouro para resolver calquera exercicio de xeometría en Sistema Diédrico.

1ª REGRA: Pensar. Debemos razoar o problema, utilizar a intelixencia e non a memoria.

2ª REGRA: Primeiro resolver o exercicio e despois debuxalo. Debemos "ver" o problema, razoar a solución cos pasos necesarios para chegar a ela e, despois, debuxala.

INTERSECCIÓN

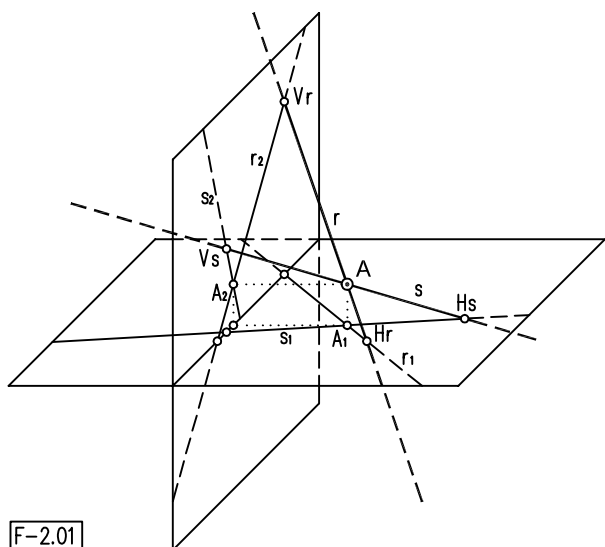
2.1.- Intersección entre dúas rectas - F-2.01/02

Dadas as rectas r e s .

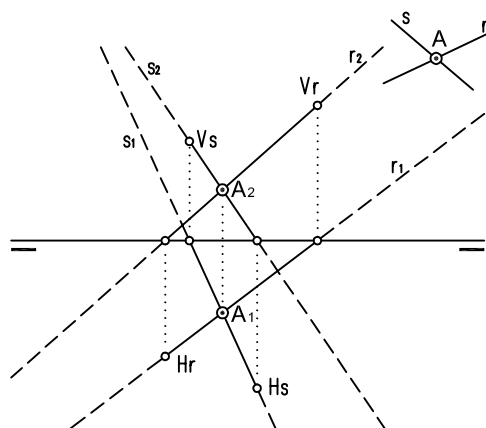
Concepto: A intersección entre dúas rectas é algo que existe ou non, pero non ten nada que resolver.

Dúas rectas se cortan se teñen un punto común e non se cortan se non o teñen.

Solución: Dúas rectas r e s teñen un punto común cando o cruce das proxeccións horizontais (r_1 e s_1) e o cruce das proxeccións verticais (r_2 e s_2) atópanse na mesma vertical. Neste caso hai intersección e en calquera outro non.



F-2.01



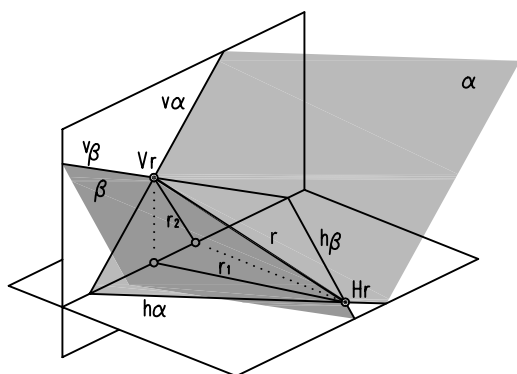
F-2.02

2.2.- Intersección entre dous planos - F-2.03/04

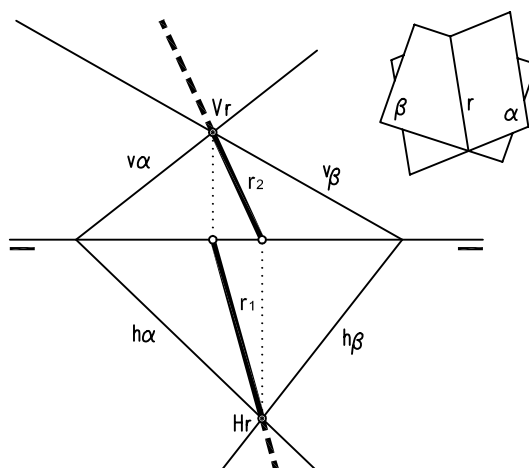
Dados os planos α e β .

Concepto: Cando dous planos se cortan é que teñen unha recta común que, polo tanto, pertence ós dous.

Solución: Como a recta r de intersección entre α e β pertence ós dous planos, deberá ter as súas trazas nas trazas dos dous planos ó mesmo tempo; polo tanto, a traza horizontal da recta Hr estará onde se corten $h\alpha$ e $h\beta$ e a traza vertical da recta Vr estará onde se corten $v\alpha$ e $v\beta$. A partir de Hr e Vr obtemos r_1 e r_2 como xa sabemos.



F-2.03



F-2.04

2.3.- Intersección de recta e plano - F-2.05/06

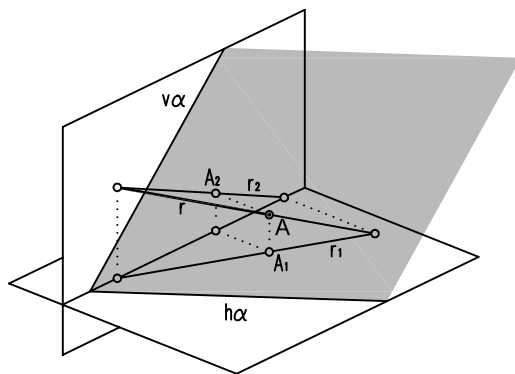
Dada a recta r e o plano α .

Concepto: A intersección entre unha recta e un plano **é un punto**. Debemos coller un plano calquera que conteña á recta e obter a intersección dese plano co dado, que será unha recta. A recta intersección cortarase coa dada no punto buscado.

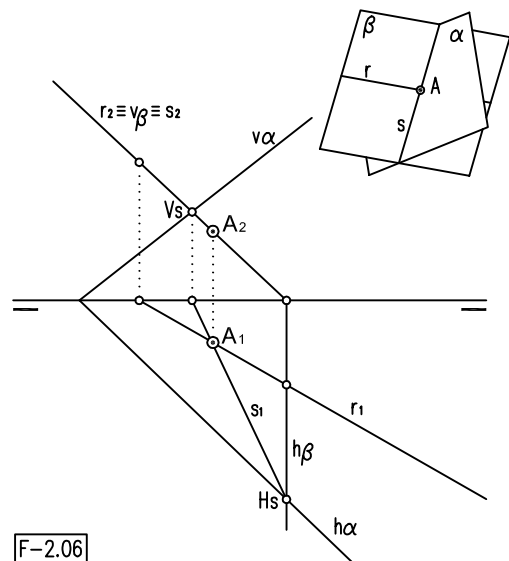
Solución: Collemos un plano auxiliar β que contén a r (é conveniente coller un plano sinxelo como o proxectante, neste caso proxectante vertical). Como todo o que estea contido nun plano proxectante vertical ten que ter a súa proxección vertical coincidente coa traza vertical do plano, poñemos $r_2 \equiv v\beta$ e $h\beta$ perpendicular á LT.

As trazas da recta intersección estarán onde se corten ás trazas dos dous planos: **Hs** onde se corten $h\alpha$ e $h\beta$ e **Vs** onde se corten $v\alpha$ e $v\beta$.

O punto de intersección entre r e s estará onde se corten as proxeccións respectivas. Dado que r_2 e s_2 coinciden, **A₁** estará onde se corten r_1 e s_1 ; **A₂** na vertical correspondente.



F-2.05



F-2.06

2.4.- Intersección de dous planos que pasan polo mesmo punto de LT - F-2.07/08

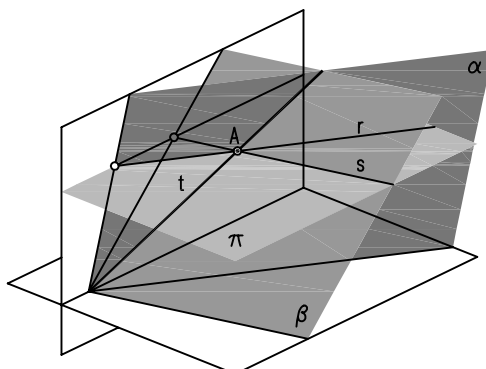
Dados os planos α e β .

Concepto: Como as trazas dos planos se cortan en LT a recta intersección terá as dúas trazas en LT, ou sexa será unha **recta que corta á LT** e necesitaremos outro punto da recta para obter ás súas proxeccións.

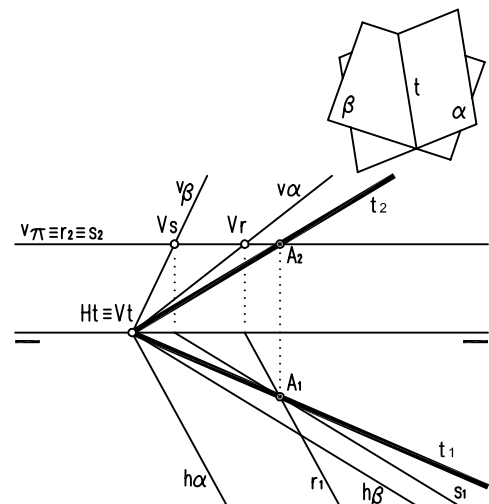
Solución: Xa temos as trazas da recta intersección **Ht** e **Vt** que coinciden no punto de corte das trazas dos planos con LT.

Collemos un plano auxiliar π (vale calquera pero collemos un sinxelo: Un plano horizontal) que corta a α e β e obtemos as rectas de corte con ámbolos dous. Serán as rectas horizontais r e s .

O punto **A** é o punto de intersección. Unindo **A₁** con **Ht** obtemos **t₁** e unindo **A₂** con **Vt** obtemos **t₂**.



F-2.07



F-2.08

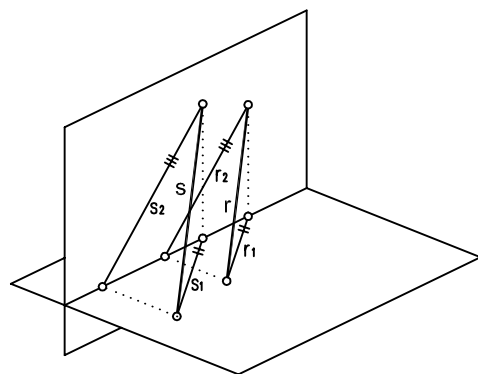
PARALELISMO

2.5.- Paralelismo entre rectas - F-2.09/10

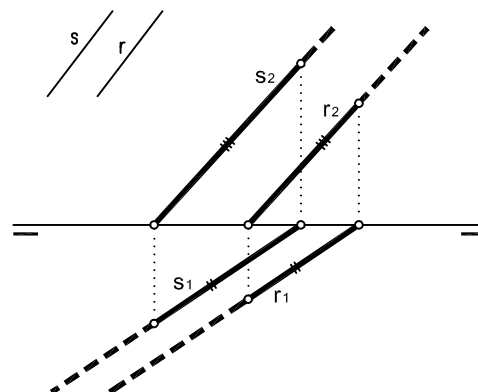
Dadas as rectas r e s .

Concepto: O paralelismo mantense entre elementos afíns, polo tanto cando dúas rectas son paralelas tamén o serán as súas proxeccións respectivas (todas elas, incluso a terceira).

Solución: Se partimos da recta r (definida en sistema diédrico polas súas proxeccións r_1 e r_2 - F-2.10) non temos máis que trazar s_1 paralela a r_1 e s_2 paralela a r_2 . Se obtemos as terceiras proxeccións poderemos comprobar que tamén son paralelas entre si.



F-2.09



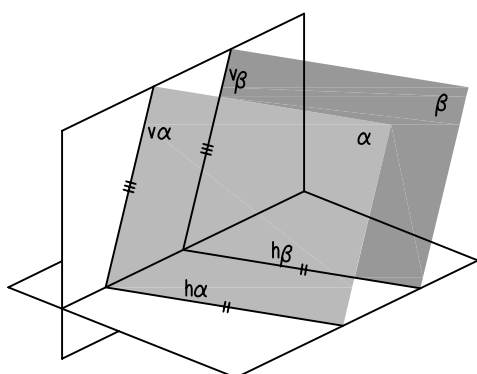
F-2.10

2.6.- Paralelismo entre planos - F-2.11/12

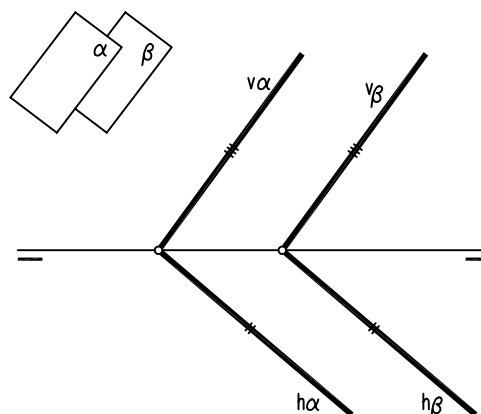
Dados os planos α e β .

Concepto: Como xa dixemos no punto anterior, o paralelismo mantense entre elementos afíns, polo tanto cando dous planos son paralelos tamén o serán as súas trazas respectivas (todas elas, incluso a traza de perfil).

Solución: Se partimos do plano α (definido en sistema diédrico polas súas trazas $h\alpha$ e $v\alpha$) non temos máis que trazar $h\beta$ paralela a $h\alpha$ e $v\beta$ paralela a $v\alpha$.



F-2.11



F-2.12

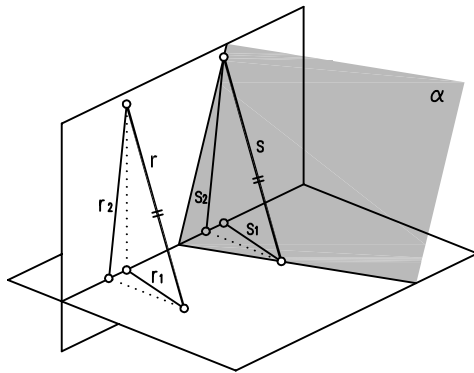
2.7.- Paralelismo entre recta e plano - F-2.13/14

Dado o plano α .

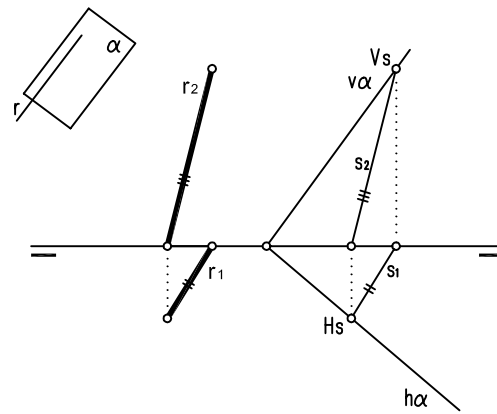
Concepto: Unha recta é paralela a un plano cando o é a algunha recta do plano. Debo trazar primeiro unha recta do plano e, despois, trazar a miña recta paralela a ela.

Tamén sucede ó contrario. Cando quero trazar un plano paralelo a unha recta trazarei primeiro unha recta calquera paralela a ela e, despois, un plano calquera que a conteña.

Solución: Se partimos do plano α (definido en sistema diédrico polas súas trazas $h\alpha$ e $v\alpha$) trazamos unha recta s que pertenza ó plano (as trazas da recta, h_s e v_s , estarán nas trazas respectivas do plano) e, despois, trazamos r_1 paralela a s_1 e r_2 paralela a s_2 .



F-2.13



F-2.14

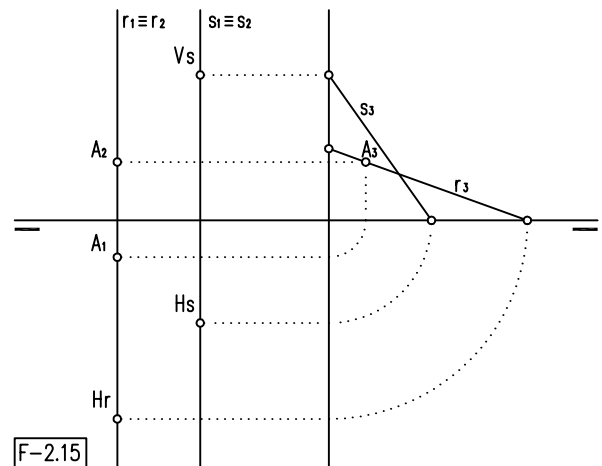
2.8.- O paralelismo no plano de perfil

Paralelismo entre rectas. A 3ª proxección - F-2.15

Dadas as rectas r e s .

Concepto: Como xa quedou dito "...cando dúas rectas son paralelas tamén o serán as súas proxeccións respectivas...". As veces non é suficiente con que as 1ª e 2ª proxeccións das dúas rectas sexan paralelas, é preciso comprobar que tamén o son as proxeccións de perfil. Debemos ter isto en conta cando traballemos con rectas de perfil.

Solución: Aparentemente as rectas son paralelas pois r_1 é paralela a s_1 e r_2 é paralela a s_2 . Se obtemos a 3ª proxección das dúas rectas (obtendo a 3ª proxección dos dous puntos de cada unha delas) podemos comprobar que r_3 non é paralela a s_3 , o que indica que as rectas r e s dadas non son paralelas.



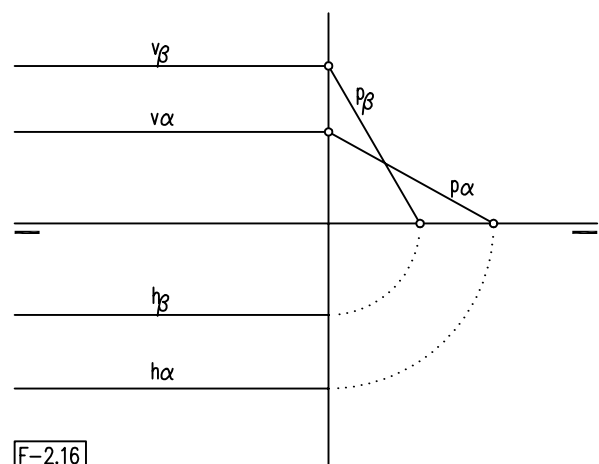
F-2.15

Paralelismo entre planos. As trazas de perfil - F-2.16

Dados os planos α e β .

Concepto: Como xa quedou dito "...cando dous planos son paralelos tamén o serán as súas trazas respectivas...". As veces non é suficiente con que as trazas horizontais e verticais dos dous planos sexan paralelas, é preciso comprobar que tamén o son as trazas de perfil. Debemos ter isto en conta cando traballemos con planos paralelos á LT ou planos incidintes con LT.

Solución: Aparentemente os planos son paralelos pois $h\beta$ é paralela a $h\alpha$ e $v\beta$ é paralela a $v\alpha$. Se obtemos a traza de perfil dos dous planos podemos comprobar que $p\beta$ non é paralela a $p\alpha$, o que indica que os planos α e β dados non son paralelos.



F-2.16

PERPENDICULARIDADE

Na **perpendicularidade**, o contrario que no paralelismo, si temos relación entre elementos de diferente tipo. De feito o único que podemos manexar na perpendicularidade é:

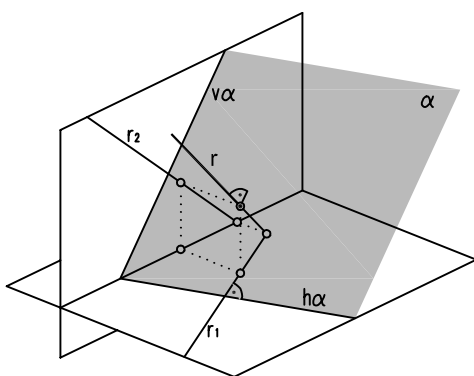
Cando unha recta e un plano son perpendiculares as proxeccións da recta son perpendiculares ás trazas respectivas do plano.

Aplicando este principio debemos resolver calquera problema de perpendicularidade, sexa do tipo que sexa.

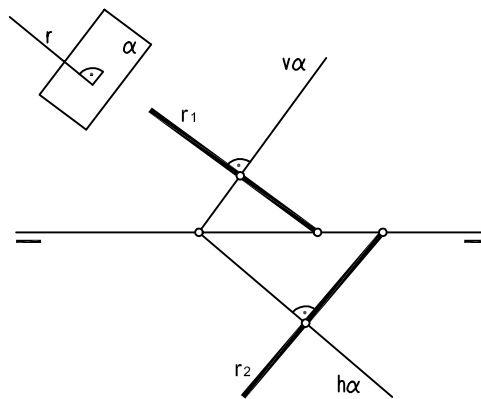
2.9.- Perpendicularidade entre recta e plano - F-2.17/18

Dado o plano α .

Concepto: Aplicando a regra básica da perpendicularidade o único que temos que facer é trazar as proxeccións da recta perpendiculares ás trazas respectivas do plano.



F-2.17



F-2.18

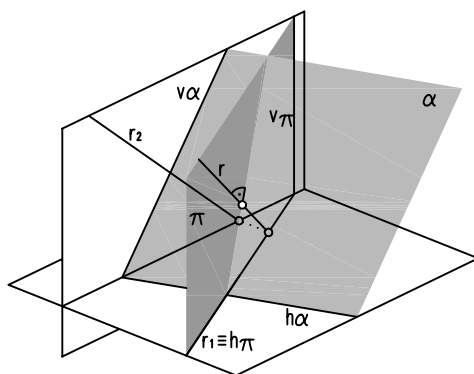
2.10.- Perpendicularidade entre planos - F-2.19/20

Dado o plano α .

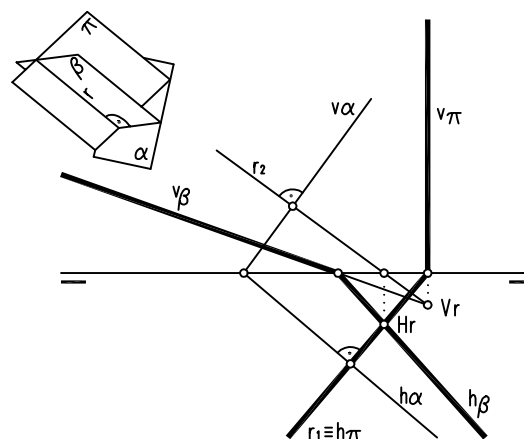
Concepto: Non existe, a priori, ningunha relación entre as trazas de dous planos perpendiculares polo que debemos usar unha recta auxiliar que sexa perpendicular ó plano dado e, despois, trazar calquera plano que a conteña.

Solución: Trazamos unha recta r perpendicular a α e, polo tanto, trazamos r_1 perpendicular a $h\alpha$ e r_2 perpendicular a $v\alpha$. Obtemos as trazas da recta (Hr e Vr) e, calquera plano cuxas trazas respectivas pasen por elas será a solución. Na F-2.20 vemos a $v\beta$ que contén a Vr e $h\beta$ que contén a Hr .

Dado que a lei do mínimo esforzo (equivalente a lei física da conservación da enerxía) e unha lei moi sabia, sempre é mellor usar unha solución sinxela. Válenos como solución un plano π proxección horizontal que conteña á recta r : Facemos coincidir $h\pi$ con r_1 e $v\pi$ a poñemos perpendicular á LT; deste xeito non temos nin que obter as trazas de r .



F-2.19



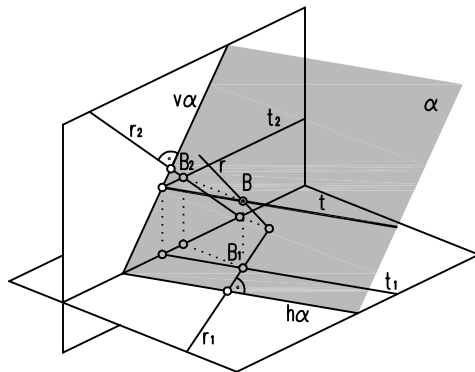
F-2.20

2.11.- Perpendicularidade entre rectas - F-2.21/22

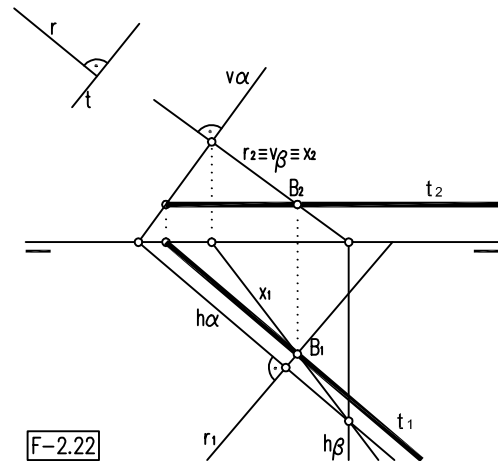
Dada a recta r .

Concepto: Neste caso, o igual que no anterior, tampouco temos ningunha relación entre as proxeccións de dúas rectas perpendiculares. Si teñen que cumprir dúas condicións: Teñen que cortarse e unha ten que estar contida en un plano perpendicular á outra.

Solución: Trazamos un plano α perpendicular a r ($v\alpha$ perpendicular a r_2 e $h\alpha$ perpendicular a r_1). Obtemos o punto B de intersección entre r e α (ver F-2.22) e a recta solución será calquera recta do plano α que pase polo punto B ; collemos unha recta sinxela como é a recta horizontal t (t_2 pasando por B_2 e paralela á LT e t_1 pasando por B_1 e paralela a $h\alpha$).



F-2.21



F-2.22

2.12.- Recta perpendicular a outra pasando por un punto - F-2.23/24

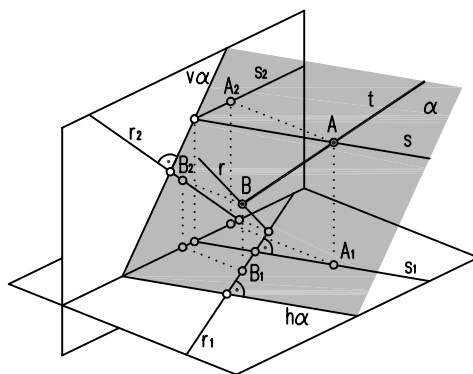
Dada a recta r e o punto A .

Concepto: Debemos trazar un plano que conteña ó punto e sexa perpendicular á recta, polo que necesitaremos unha recta auxiliar para facelo (unha recta que conteña ó punto e pertenza ó plano que trazaremos despois). A partir aquí estamos no caso explicado no punto anterior.

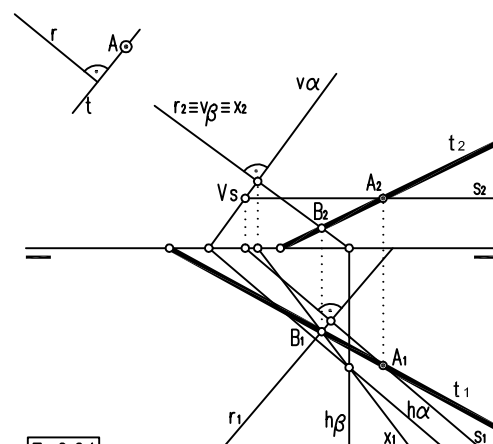
Solución: Trazamos unha recta auxiliar s de xeito que conteña ó punto dado A (s_1 pasará por A_1 e s_2 por A_2), sexa horizontal (a proxección vertical será paralela á LT) e teña a proxección horizontal s_1 perpendicular a r_1 .

Trazamos o plano α que contén a s e que é perpendicular a r ($v\alpha$ pasa por Vs e é perpendicular a r_2 e $h\alpha$ é perpendicular a r_1).

A partir de aquí facemos o explicado no apartado 2.03 e obtemos o punto B de intersección entre r e α . A recta solución t será a que pase por A e B (t_1 a obtemos unindo A_1 con B_1 e t_2 unindo A_2 con B_2).



F-2.23



F-2.24

DISTANCIAS

Cando falamos de **distancia** debemos entender, sempre, que estamos a falar da **mínima distancia** e, lóxicamente, da **verdadeira magnitude** da mesma.

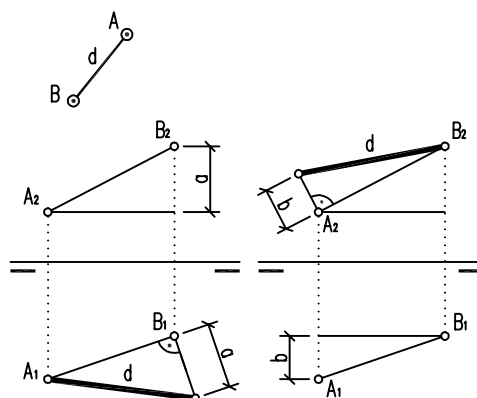
2.13.- Distancia entre dous puntos - F-2.25

Dados os puntos **A** e **B**.

Concepto: Para obter a distancia, en verdadeira magnitude, entre dous puntos dados debuxamos o que, condensadamente, equivale a un abatemento (veremos o abatemento máis adiante).

Solución: Collemos a diferenza de cotas entre os dous puntos (a distancia vertical existente entre **A₂** e **B₂**) e a levamos en unha perpendicular ó segmento que une as proxeccións horizontais por un dos seus extremos (no noso caso o **B₁**). Unindo o punto así obtido co outro extremo do segmento (no noso caso **A₁**) teremos a distancia entre **A** e **B** en verdadeira magnitude.

Isto tamén o podemos facer na proxección vertical: Collemos a diferenza de alonxamentos entre os dous puntos (a distancia vertical existente entre **A₁** e **B₁**) e a levamos en unha perpendicular ó segmento que une as proxeccións verticais por un dos seus extremos (no noso caso o **A₂**). Unindo o punto así obtido co outro extremo do segmento (no noso caso **B₂**) teremos a distancia entre **A** e **B** en verdadeira magnitude. Loxicamente a distancia así obtida coincidirá coa obtida polo método anterior.



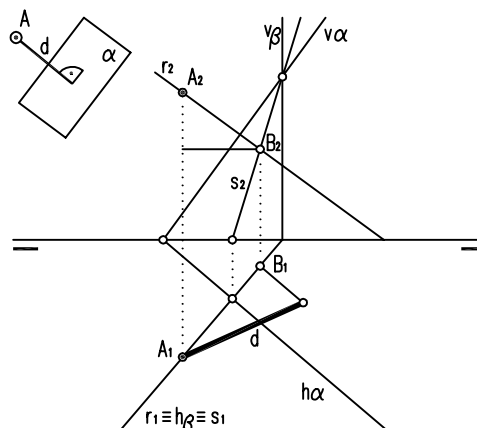
F-2.25

2.14.- Distancia entre un punto e un plano - F-2.26

Dado o punto **A** e o plano α .

Concepto: A distancia menor existente entre un punto **A** e un plano ven definida por unha recta perpendicular ó plano pasando por **A**. Obtemos o punto **B** de intersección entre a recta e o plano e medimos a distancia entre o punto dado **A** e o punto de intersección **B**.

Solución: Trazamos r_1 perpendicular a $h\alpha$ pasando por **A₁** e trazamos r_2 perpendicular a $v\alpha$ pasando por **A₂**. Obtemos o punto **B** de intersección entre r e α (ver apartado 2.3 e F-2.06). Aplicando o indicado no apartado anterior 2.13 obtemos a distancia entre **A** e **B**, ou sexa a distancia entre o punto **A** e o plano α .



F-2.26

2.15.- Distancia entre un punto e unha recta - F-2.27

Dado o punto **A** e a recta **r**.

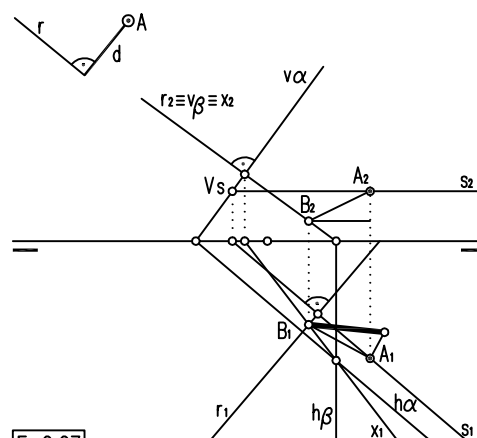
Concepto: A distancia menor existente entre un punto **A** e unha recta é a do segmento perpendicular á recta trazado dende o punto **A**. Isto é o mesmo que xa vimos no trazado de unha "Recta perpendicular a outra pasando por un punto" (ver apartado 2.12 e F-2.24). Unha vez obtido o punto **B** de intersección coa recta dada medimos a distancia entre **A** e **B**.

Solución: Trazamos unha recta auxiliar **s** de xeito que conteña ó punto dado **A** (**s₁** pasará por **A₁** e **s₂** por **A₂**), sexa horizontal (a proxección vertical será paralela á LT) e teña a proxección horizontal **s₁** perpendicular a **r₁**.

Trazamos o plano α que contén a **s** e que é perpendicular a **r** (**v α** pasa por **Vs** e é perpendicular a **r₂** e **h α** é perpendicular a **r₁**).

Obtemos o punto **B** de intersección entre **r** e α (collemos un plano β que conteña a **r** e obtemos a recta **x** de intersección entre α e β . Onde se corten **r** e **x** será o punto **B**). A distancia buscada será a existente entre **A** e **B**.

A partir de aquí facemos o explicado no apartado 2.13 e obtemos a distancia **d** entre **A** e **B**, ou sexa a distancia entre **A** e **r**.



F-2.27

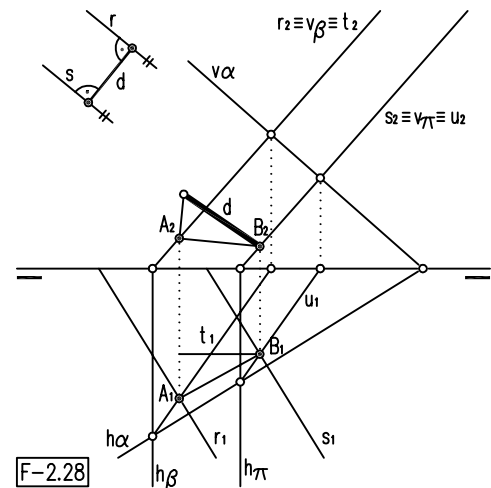
2.16.- Distancia entre dúas rectas paralelas - F-2.28

Dadas as rectas r e s .

Concepto: A distancia entre dúas rectas paralelas é a medida do segmento perpendicular a ámbalas dúas. Para obter o segmento trazamos un plano perpendicular ás rectas e obtemos os dous puntos de intersección. A distancia buscada será a existente entre os puntos de intersección do plano coas rectas.

Solución: Trazamos $h\alpha$ perpendicular a r_1 e s_1 e $v\alpha$ perpendicular a r_2 e s_2 . Obtemos os puntos A e B de intersección de α con r e s (ver apartado 2.3 e F-2.06).

Aplicando o indicado no apartado 2.13 obtemos a distancia entre A e B , au sexa a distancia entre a recta r e a recta s .

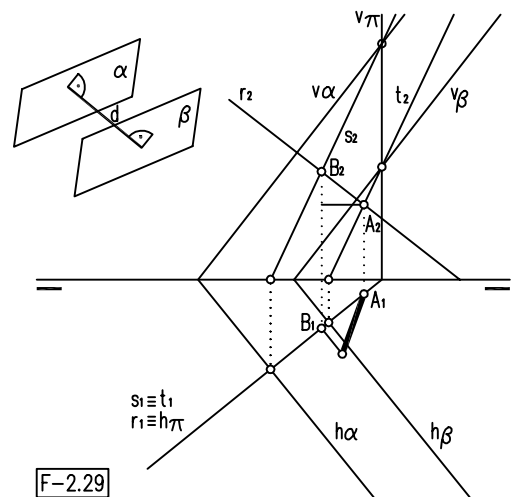


2.17.- Distancia entre dous planos paralelos - F-2.29

Dados os planos α e β .

Concepto: A distancia entre dous planos paralelos é a medida do segmento perpendicular a ámbolos dous. Para obter o segmento trazamos unha recta perpendicular ós dous planos. A distancia será a existente entre os puntos de intersección.

Solución: Trazamos r_1 perpendicular a $h\alpha$ e $h\beta$ e r_2 perpendicular a $v\alpha$ e $v\beta$. Obtemos os puntos de intersección entre r e α (B) e r e β (A). Aplicando o indicado no apartado 2.13 obtemos a distancia entre B e A , au sexa a distancia entre o plano α e o plano β .



ABATEMENTOS

Abater algo significa **levalo a un dos planos de proxección** (o termo abatemento úsase na linguaxe cotiá no sentido de tirar algo no chan: Abater unha peza de caza significa tirar con ela no chan, ou sexa no plano horizontal). A finalidade do **abatemento** é ter o elemento abatido en **verdadeira magnitude**.

O abatemento é unha ferramenta moi importante porque nos permite ter calquera figura en verdadeira magnitude para traballar con ela.

Para abater calquera elemento (un punto, unha recta ou unha figura plana) temos que usar sempre o plano que o contén dado que o proceso de abatemento ten dous pasos:

1.- Abater o plano que contén o elemento.

2.- Obter o elemento abatido.

Para abater un plano temos dúas opcións: Abatelo sobre o PH ou sobre o PV; en ámbolos dous casos quedará en verdadeira magnitude.

2.18.- Abatemento dun plano sobre o PH – F-2.30/31

Dado o plano α .

Concepto: O plano o temos definido polas súas trazas e o que temos que obter son as trazas abatidas (cando as trazas estean abatidas dividirán as partes do plano que están en cada un dos catro cuadrantes).

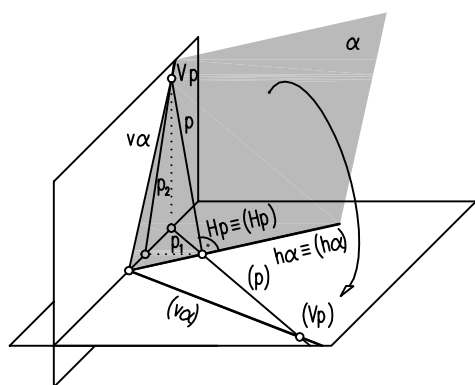
Como abatemos o plano sobre o PH, a traza horizontal $h\alpha$ coincide coa traza horizontal abatida pois ela é, de feito, a bisagra ou o eixo de xiro que usamos no abatemento. Os elementos abatidos os nomeamos igual que os orixinais pero metidos entre corchetes (así $(h\alpha)$ refírese a $h\alpha$ abatida). O punto de corte de $h\alpha$ coa LT será, tamén, o punto do que sairá $(v\alpha)$, pero necesitaremos outro punto para trazala.

Para obter $(v\alpha)$ fagamos a seguinte reflexión: Unha recta de máxima pendente do plano α é, como xa sabemos, unha recta perpendicular á $h\alpha$ e, polo tanto, seguirá a ser perpendicular a $(h\alpha)$; isto quere dicir que (p) vai coincidir con p_1 que tamén é perpendicular a $h\alpha$.

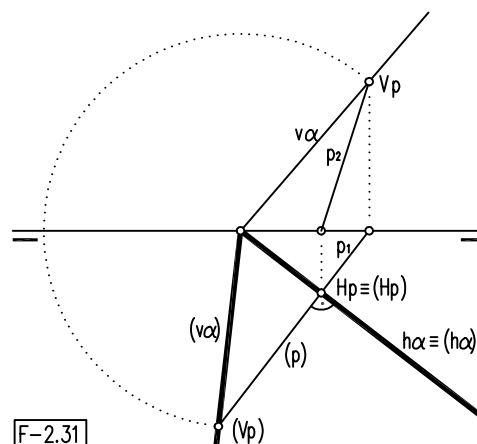
Ademais, como $v\alpha$ é unha recta do plano vertical, $(v\alpha)$ medirá exactamente o mesmo que $v\alpha$ e a distancia entre o punto onde $v\alpha$ corta a liña de terra e a traza vertical da recta de máxima pendente Vp manterase en $(v\alpha)$. Tendo isto en conta e sabendo que (Vp) ten que estar en (p) , obteremos (Vp) e poderemos trazar $(v\alpha)$.

Solución: Temos o plano α definido polas súas trazas $h\alpha$ e $v\alpha$. Trazamos unha recta p de máxima pendente de α (p_1 perpendicular a $h\alpha$).

$h\alpha \equiv (h\alpha)$ e $Hp \equiv (Hp)$. (p) coincidirá con p_1 e, facendo centro onde as trazas do plano cortan á LT con radio ate Vp , cortamos a (p) en (Vp) ; unindo este punto co punto onde se cortan as trazas do plano teremos $(v\alpha)$. Como é habitual debuxamos soamente a parte do plano que está no primeiro cuadrante pero debemos lembrar que as trazas de un plano, igual que o plano mesmo, son infinitas.



F-2.30



F-2.31

2.19.- Abatemento dun plano sobre o PV – F-2.32

Dado o plano α .

Concepto: Como abatemos o plano sobre o PV, a traza vertical $v\alpha$ coincide coa traza vertical abatida. O punto de corte de $v\alpha$ coa LT será, tamén, o punto do que sairá $(h\alpha)$, pero necesitaremos outro punto para trazala.

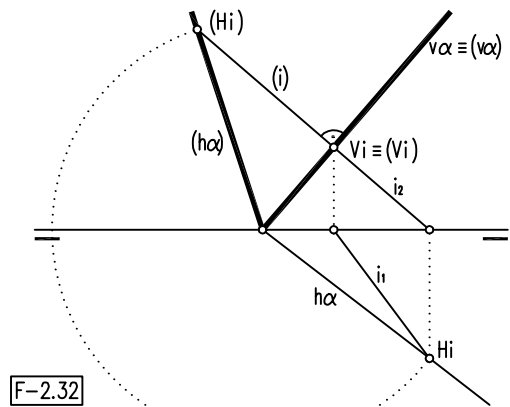
Para obter $(h\alpha)$ necesitamos (por unha razón similar á explicada no apartado anterior) unha recta de máxima inclinación do plano α que é, como xa sabemos, unha recta perpendicular a $v\alpha$ e, polo tanto, seguirá a ser perpendicular a $(v\alpha)$; isto quere dicir que (i) vai coincidir con i_2 que tamén é perpendicular a $v\alpha$.

Ademais, como $h\alpha$ é unha recta do plano horizontal, $(h\alpha)$ medirá exactamente o mesmo que $h\alpha$ e a distancia entre o punto onde $h\alpha$ corta a liña de terra e a traza horizontal da recta de máxima inclinación Hi manterase

en $(h\alpha)$. Tendo isto en conta e sabendo que (Hi) ten que estar en (i) , obteremos (Hi) e poderemos trazar $(h\alpha)$.

Solución: Temos o plano α definido polas súas trazas $h\alpha$ e va . Trazamos unha recta i de máxima inclinación de α (i_2 perpendicular a va).

$va \equiv (va)$ e $Vi \equiv (Vi)$. (i) coincidirá con i_2 e, facendo centro onde as trazas do plano cortan á LT con radio ate Hi , cortamos a (i) en (Hi) ; unindo este punto co punto onde se cortan as trazas do plano teremos $(h\alpha)$.



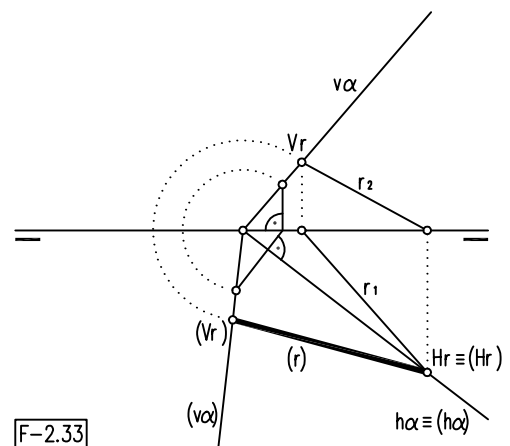
F-2.32

2.20.- Abatemento dunha recta – F-2.33

Dada a recta r e o plano α .

Concepto: Para abater unha recta debemos ter un plano que a conteña. Abatemos o plano (en este caso sobre o PH) e despois obtémola recta abatida.

Solución: $h\alpha \equiv (h\alpha)$. Para obter (va) collemos calquera punto de va , trazamos unha perpendicular a LT, dende ese punto de LT trazamos unha perpendicular a $h\alpha$ e, facendo centro onde as trazas do plano cortan a LT, a cortamos e unimos o punto obtido co punto onde as trazas cortan a LT (isto é, de xeito condensado, o abatemento de unha recta de máxima pendente de α) obtendo (va) . Para abater a recta r obtemos as trazas abatidas: $Hr \equiv (Hr)$. Facendo centro onde as trazas do plano cortan a LT con radio ate Vr obtemos (Vr) en (va) . Unindo (Vr) con (Hr) teremos (r) .



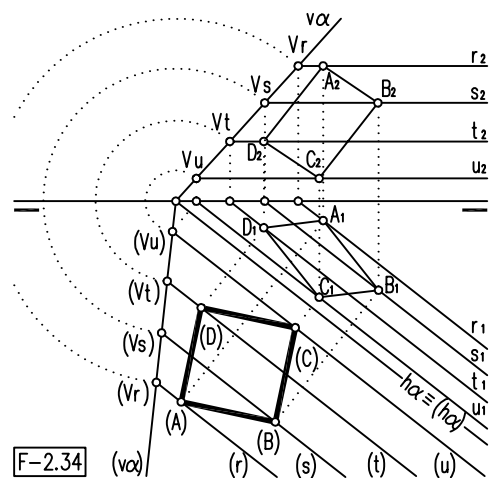
F-2.33

2.21.- Abatemento dunha figura plana – F-2.34

Dado o plano α e o cadrado **ABCD**.

Concepto: Para abater unha figura plana podemos abater as rectas que a forman (despois de abater o plano que a contén) ou coller rectas sinxelas que conteñan ós vértices da figura, abate-las e abater con elas os vértices.

Solución: $h\alpha \equiv (h\alpha)$. Obtemos (va) . Debuxamos rectas horizontais que conteñan ós vértices **A**, **B**, **C**, e **D** da figura (serán as rectas **r**, **s**, **u**, **t**). Facendo centro no punto onde as trazas do plano cortan a LT abatemos as trazas verticais das rectas **Vr**, **Vs**, **Vt**, **Vu** e obtemos (Vr) , (Vs) , (Vt) , e (Vu) . Dado que as rectas son horizontais e non teñen traza horizontal, serán paralelas a $(h\alpha)$, obtendo así (r) , (s) , (t) e (u) . Trazando dende A_1 , B_1 , C_1 e D_1 perpendiculares a $(h\alpha)$ obteremos **(A)**, **(B)**, **(C)** e **(D)**, vértices do cadrado abatido e en verdadeira magnitude.



F-2.34

2.22.- Desabatemento dunha figura plana – F-2.35

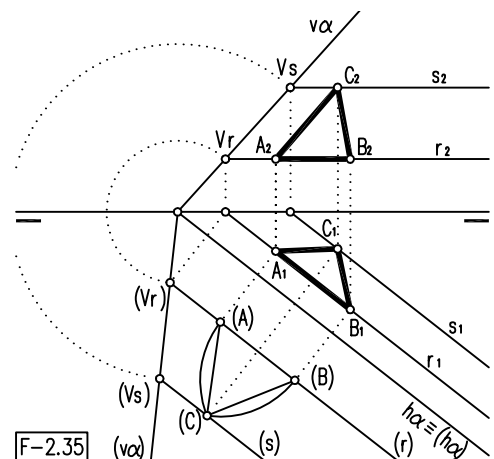
Dado o plano (α) e o triángulo equilátero **(A)(B)(C)**.

Concepto: Para desabater unha figura plana temos que facer o contrario do que facemos para abatela. Collemos rectas sinxelas que conteñan ós vértices da figura; as desabatemos e, con elas, obtemos as proxeccións dos puntos e os unimos.

Solución: Collemos dúas rectas horizontais que conteñan ós vértices do triángulo equilátero abatido; como son rectas horizontais serán paralelas a $(h\alpha)$ e terán soamente (Vr) e (Vs) . Obtemos va levando unha perpendicular a $(h\alpha)$ dende (Vr) e, dende onde corte á LT, levantamos unha perpendicular á LT. Facendo centro no punto de LT onde se atopan $(h\alpha)$ e (va) trazamos un arco ate atopar Vr e, unindo con LT, obtemos va (ou sexa, o contrario do que facemos para abater va).

Obtemos Vr e Vs en va e obtemos, a partir delas, as proxeccións das rectas $(r_2$ e s_2 paralelas a LT e r_1 e s_1 paralelas a $h\alpha$).

Dende **(A)**, **(B)** e **(C)** levamos perpendiculares a $(h\alpha)$ e obtemos A_1 , B_1 e C_1 . Levantando perpendiculares a LT obtemos A_2 , B_2 e C_2 . Unimos as proxeccións respectivas e obtemos as proxeccións do triángulo equilátero.



F-2.35

2.23.- Proxeccións da circunferencia por desabatemento – F-2.36/37

Para debuxar as proxeccións dunha circunferencia contida nun plano calquera podemos usar o desabatemento coma o método máis aconsellable. As proxeccións da circunferencia contida nun plano oblicuo serán dúas elipses e temos dous métodos para obtelas: Por eixos e diámetros conxugados e por puntos.

Proxeccións da circunferencia por eixos e diámetros conxugados – F-2.36

Dado o plano α e a circunferencia de centro O .

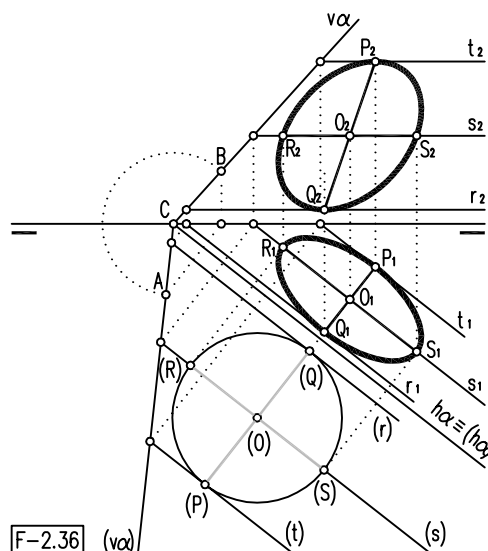
Abatemos o plano α (neste caso sobre o PH) tal e como quedou explicado no **apdo. 2.18**.

No plano abatido debuxamos a circunferencia de centro O . Como está abatida a poderemos debuxar en verdadeira magnitude.

Debuxamos dous diámetros da circunferencia, un $(P)(Q)$ perpendicular e outro $(R)(S)$ paralelo a $h\alpha \equiv (h\alpha)$. O desabatemento destes diámetros daranos os **eixos** dunha elipse (na proxección horizontal) e os **diámetros conxugados** (na vertical).

Collemos rectas horizontais (r) , (s) e (t) que conteñan aos catro puntos e as desabatemos, obtendo as súas proxeccións diédricas. Dende (P) , (Q) , (R) e (S) trazamos perpendiculares a $h\alpha \equiv (h\alpha)$ e obtemos P_1 , Q_1 , R_1 e S_1 ; levantando perpendiculares a LT obteremos P_2 , Q_2 , R_2 e S_2 .

Aplicando o exposto nos **apdos. 7.3 e 7.5 (páx. 51 e 52)** debuxamos as elipses correspondentes e teremos as dúas proxeccións diédricas da circunferencia de centro O contida no plano α .



F-2.36

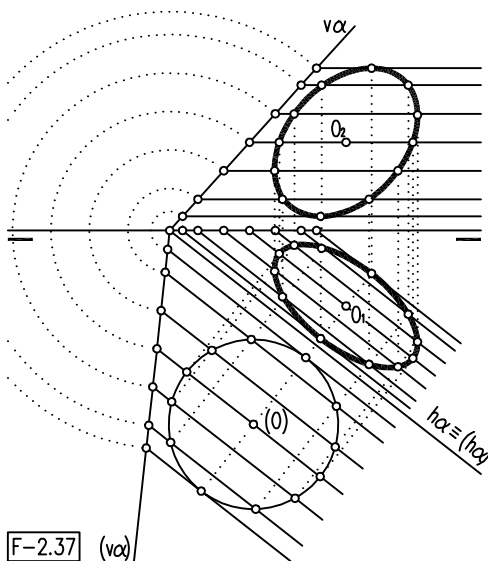
Proxeccións da circunferencia por puntos – F-2.37

Dado o plano α e a circunferencia de centro O .

Unha vez abatido o plano α , e debuxada a circunferencia de centro O , collemos varias rectas horizontais (cantas máis mellor pois teremos máis puntos e máis exactitude no trazado das elipses resultantes) cos correspondentes puntos da circunferencia.

Desabatemos as rectas, como xa sabemos, e obtemos as proxeccións diédricas dos puntos tamén por desabatemento.

Unimos as respectivas proxeccións dos puntos a man alzada ou con plantilla de curvas e teremos as dúas proxeccións diédricas da circunferencia de centro O contida no plano α .



F-2.37

3 - REPRESENTACIÓN DE VOLUMES

Unha aplicación importante do sistema diédrico é a representación de volumes. Temos dous campos fundamentais (inda que, en realidade, son o mesmo):

- Volumes e poliedros
- Vistas de pezas

VOLUMES

3.1.- PRISMA

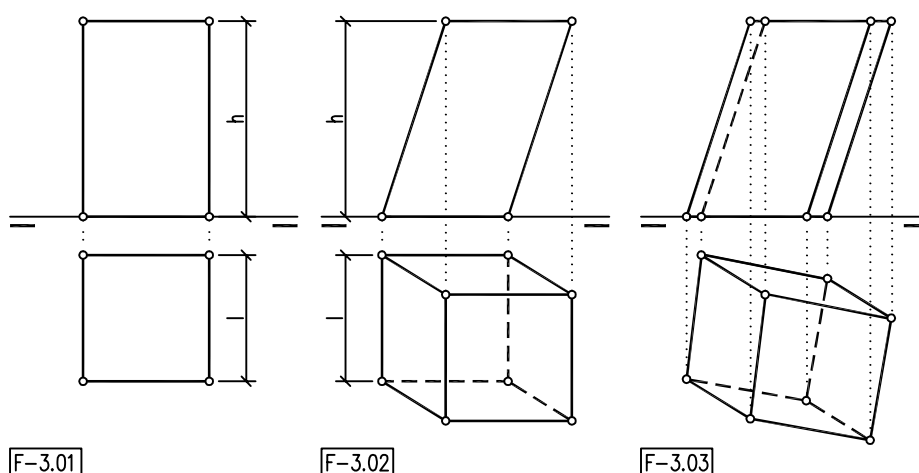
A **SUPERFICIE PRISMÁTICA** é a xerada por unha recta (infinita) no seu desprazamento paralelo polo perímetro dun polígono. Se o polígono polo que se despraza a recta é regular, falaremos dunha superficie prismática **REGULAR**.

O **VOLUME PRISMÁTICO** ou **PRISMA** é o que obtemos ó cortar a superficie prismática por dous planos paralelos entre si. Se os planos de corte son perpendiculares á superficie prismática o resultado será un **PRISMA RECTO**, se son oblicuos un **PRISMA OBLICUO**.

F-3.01.- PRISMA REGULAR RECTO de base cadrada. Para definilo necesitamos o lado da base e a altura (que sempre é a distancia entre as bases medida de xeito perpendicular a elas).

F-3.02.- PRISMA REGULAR OBLICUO de base cadrada. Para definilo necesitamos o lado da base, a altura e o ángulo de inclinación das arestas laterais.

F-3.03.- PRISMA OBLICUO. Para definilo necesitamos os lados e ángulos das bases, a altura e o ángulo de inclinación das arestas laterais.



3.2.- PIRÁMIDE

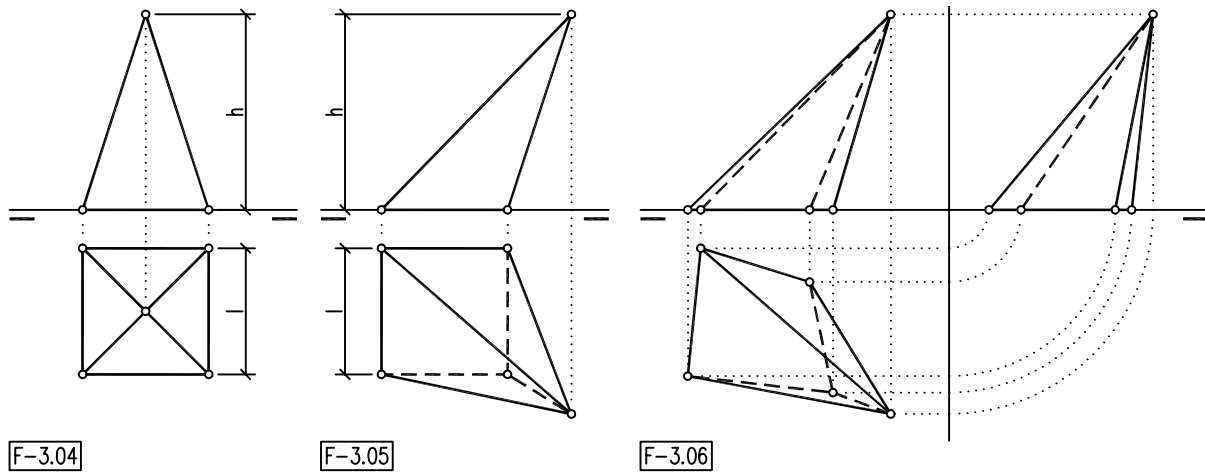
A **SUPERFICIE PIRAMIDAL** é a xerada por unha semirecta (infinita), a partir do extremo fixo (o vértice), no seu desprazamento polo perímetro dun polígono. Se o polígono polo que se despraza a recta é regular, falaremos dunha superficie piramidal **REGULAR**.

O **VOLUME PIRAMIDAL** ou **PIRÁMIDE** é o que obtemos o cortar a superficie piramidal por un plano. Chamaremos **PIRÁMIDE RECTA** á que ten a altura (que sempre é a distancia entre o vértice e a base medida de xeito perpendicular a ela) de forma que une o vértice co centro de gravidade do polígono da base; en calquera outro caso falaremos de **PIRÁMIDE OBLICUA**.

F-3.04.- PIRÁMIDE REGULAR RECTA de base cadrada. Para definila necesitamos o lado da base e a altura.

F-3.05.- PIRÁMIDE REGULAR OBLICUA de base cadrada. Para definila necesitamos o lado da base, a altura e o vértice.

F-3.06.- PIRÁMIDE OBLICUA. Para definila necesitamos os lados e ángulos da base, a altura e o vértice.



3.3.- CILINDRO

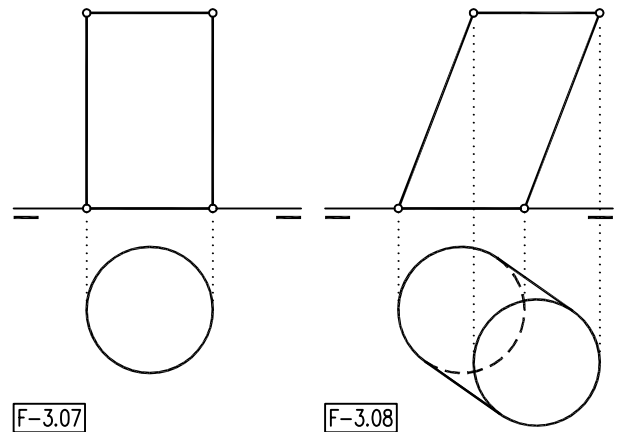
A **SUPERFICIE CILÍNDRICA** é unha superficie de revolución e está xerada por unha recta no seu desprazamento sobre unha circunferencia.

O **VOLUME CILÍNDRICO** ou **CILINDRO** é o que obtemos ó cortar a superficie cilíndrica por dous planos paralelos entre si. Chamaremos **CILINDRO RECTO** ó que ten a altura (que sempre é a distancia entre as bases medida de xeito perpendicular a elas) de forma que une os centros dos círculos das bases; en calquera outro caso falaremos de **CILINDRO OBLICUO**.

É importante ter en conta que ó igual que unha circunferencia a podemos definir xeometricamente como un polígono regular de infinitos lados, un cilindro tamén é un prisma regular cuxas bases teñen infinitos lados.

F-3.07.- CILINDRO RECTO. Para definilo necesitamos o radio da circunferencia das bases e a altura.

F-3.08.- CILINDRO OBLICUO. Para definilo necesitamos o radio da circunferencia das bases, a altura e o ángulo de inclinación da xeratriz cos círculos das bases..



3.4.- CONO

A **SUPERFICIE CÓNICA** é unha superficie de revolución e está xerada por unha recta que se corta con un eixo no seu xiro con respecto a el. Tamén a poderíamos definir como a superficie xerada polo desprazamento de unha recta, a partir de un punto fixo dela, polo perímetro de un círculo

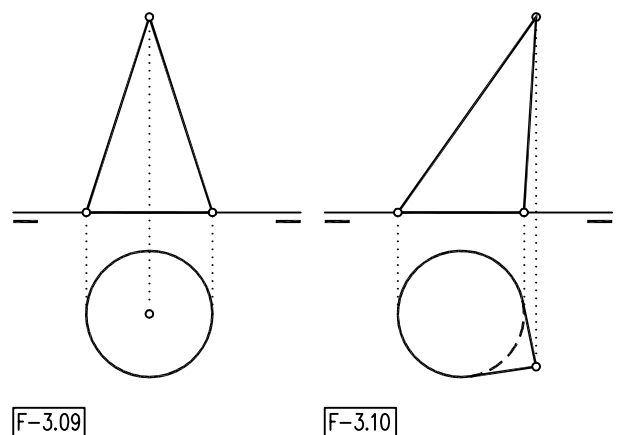
O **VOLUME CÓNICO** ou **CONO** é o que obtemos ó cortar a superficie cónica por dous planos paralelos entre si. O que normalmente coñecemos como CONO é en realidade medio cono.

Chamaremos **CONO RECTO** ó que ten a altura (que sempre é a distancia entre o vértice e o círculo da base, medida de xeito perpendicular a el) de forma que une o vértice co centro da circunferencia da base; en calquera outro caso falaremos de **CONO OBLICUO**.

É importante ter en conta que, polas mesmas razóns que as indicadas no cilindro, un cono o podemos definir xeometricamente como unha pirámide regular con base un polígono regular de infinitos lados.

F-3.09.- CONO RECTO. Para definilo necesitamos o radio da circunferencia da base e a altura.

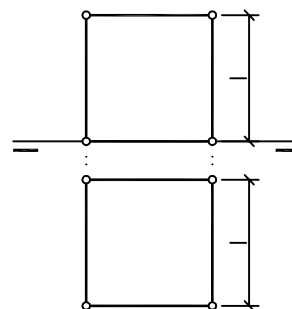
F-3.10.- CONO OBLICUO. Para definilo necesitamos o radio da circunferencia da base, a altura e o vértice.



POLIEDROS

3.5.- CUBO - F-3.11

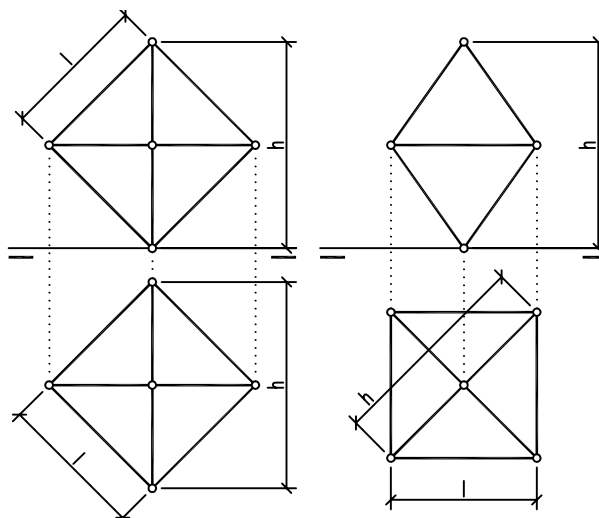
O **CUBO** ou **HEXAEDRO** é o volume poliédrico formado por seis cadrados. Para definilo necesitamos a lado.



F-3.11

3.6.- OCTAEDRO - F-3.12/13

O **OCTAEDRO** é o volume poliédrico formado por oito triángulos equiláteros. Para definilo necesitamos o lado. A altura do octaedro coincide coa diagonal do cadrado que ten por lado o do octaedro.



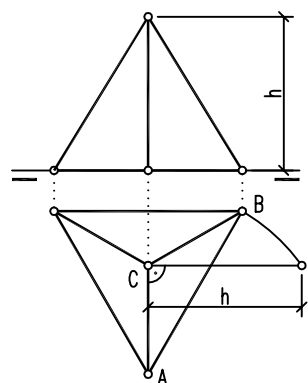
F-3.12

F-3.13

3.7.- TETRAEDRO - F-3.14

O **TETRAEDRO** é o volume poliédrico formado por catro triángulos equiláteros. Para definilo necesitamos o lado. Para obter a altura do octaedro (distancia dende un vértice calquera e o centro de gravidade do triángulo equilátero oposto) podemos facer un abatemento. De xeito condensado podemos ver como se obtén:

Na proxección horizontal do tetraedro apoiado no PH trazamos unha perpendicular ó segmento **AC** polo punto **C**. Facendo centro en **A** con radio **AB** trazamos un arco que cortará á perpendicular anterior en **D**. A distancia **CD** é a **altura do tetraedro**. Isto non é mais que o abatemento sobre o PH dun plano de perfil cuxa traza horizontal coincide con AC.



F-3.14

VISTAS DE PEZAS

3.8.- Representación dun volume calquera polas súas vistas

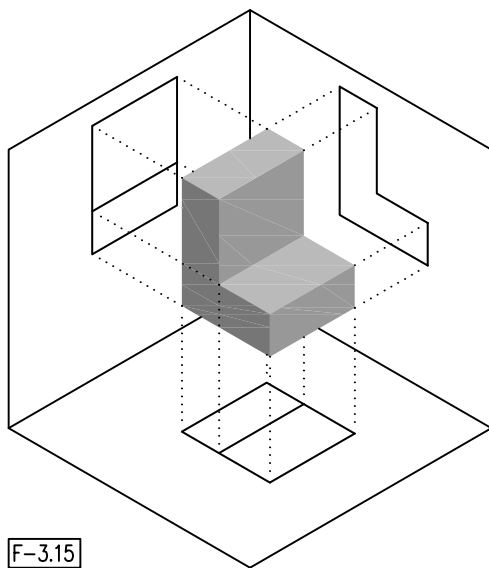
A **representación das vistas** dun volume é unha aplicación moi concreta da xeometría xeral en sistema Diédrico. Facemos o mesmo que faciamos para representar planos pero máis simplificado, sen liñas de terra, nomes das proxeccións, trazas, etcétera.

Imaxinemos que temos a peza dentro dun **cubo** que, como xa sabemos, ten **seis caras cadradas**. Facemos **proxeccións da peza sobre cada un dos seis planos** que conforman o cubo. Na **F-3.15** podemos ver o proceso.

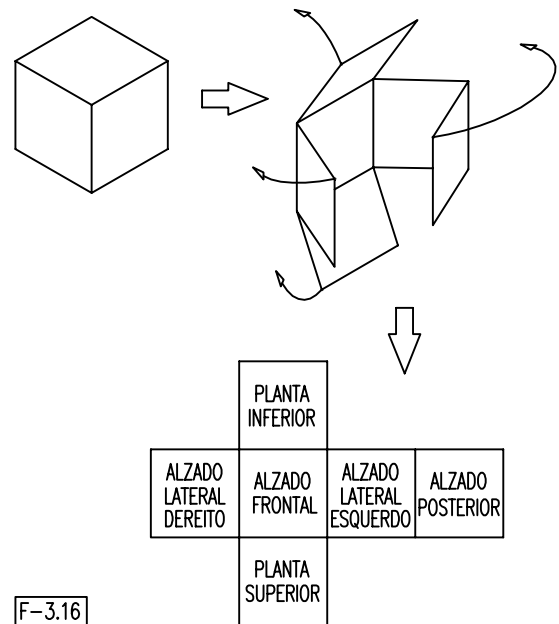
Unha vez que temos as **seis proxeccións** procedemos a abrir o cubo coma se fose unha caixa de cartón, de tal xeito que quedarán os seis cadrados ordenados tal e como podemos ver na **F-3.16**.

O **ALZADO FRONTAL** é a vista ou proxección principal, a partir da cal debuxamos tódalas demais. O **ALZADO LATERAL ESQUERDO** ou perfil esquerdo quedará á dereita do alzado frontal pois é o da esquerda da peza pero o proxectamos sobre o plano que está á dereita do do alzado frontal... e así sucesivamente.

Coas plantas pasa o mesmo, a **PLANTA INFERIOR** está por riba do alzado frontal porque para proxectala miramos a peza dende abaixo pero a proxectamos sobre o plano que está arriba.



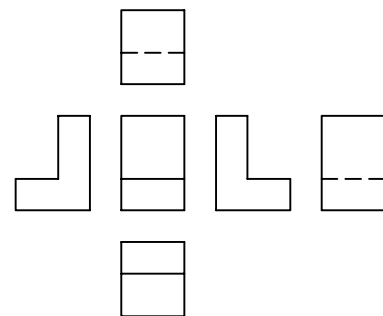
F-3.15



F-3.16

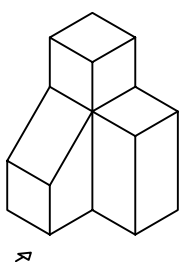
Loxicamente debemos debuxar as **liñas ocultas** a trazos. Se debuxamos tódalas vistas da peza tal e como quedarían, as podemos ver na **F-3.17**, de tal xeito que non necesitamos nomear cada vista pois, o seu nome, o sabemos polo lugar que ocupa.

Normalmente **non necesitamos debuxar as seis vistas de unha peza**; chega con **tres**, agás que a peza sexa moi complexa.

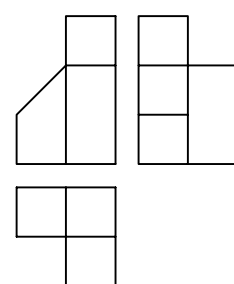
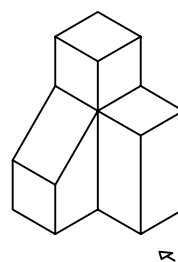
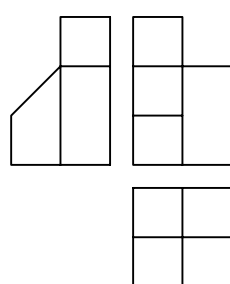


F-3.17

Cando nos dan unha peza (Ver **F-3.18**), debuxaremos sempre o **ALZADO FRONTAL**, a **PLANTA SUPERIOR** e, dependendo de que vista elixamos como alzado frontal (a esquerda ou a dereita) debuxaremos o **ALZADO LATERAL** dereito ou o esquerdo.



F-3.18

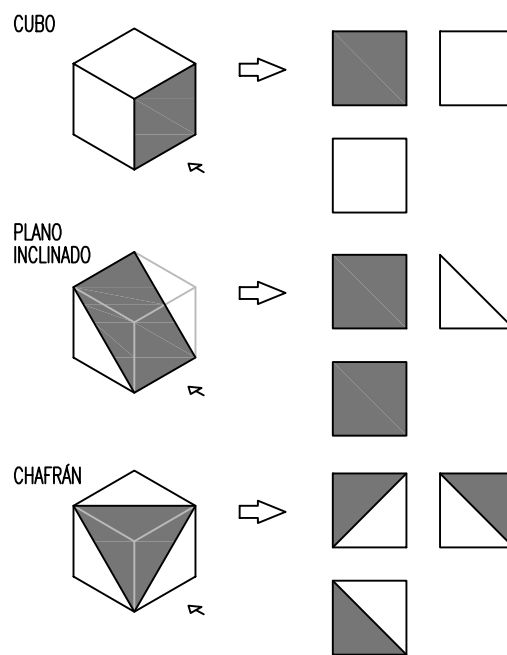


Todo volume estará formado, fundamentalmente, por **tres tipos de planos (F-3.19)**:

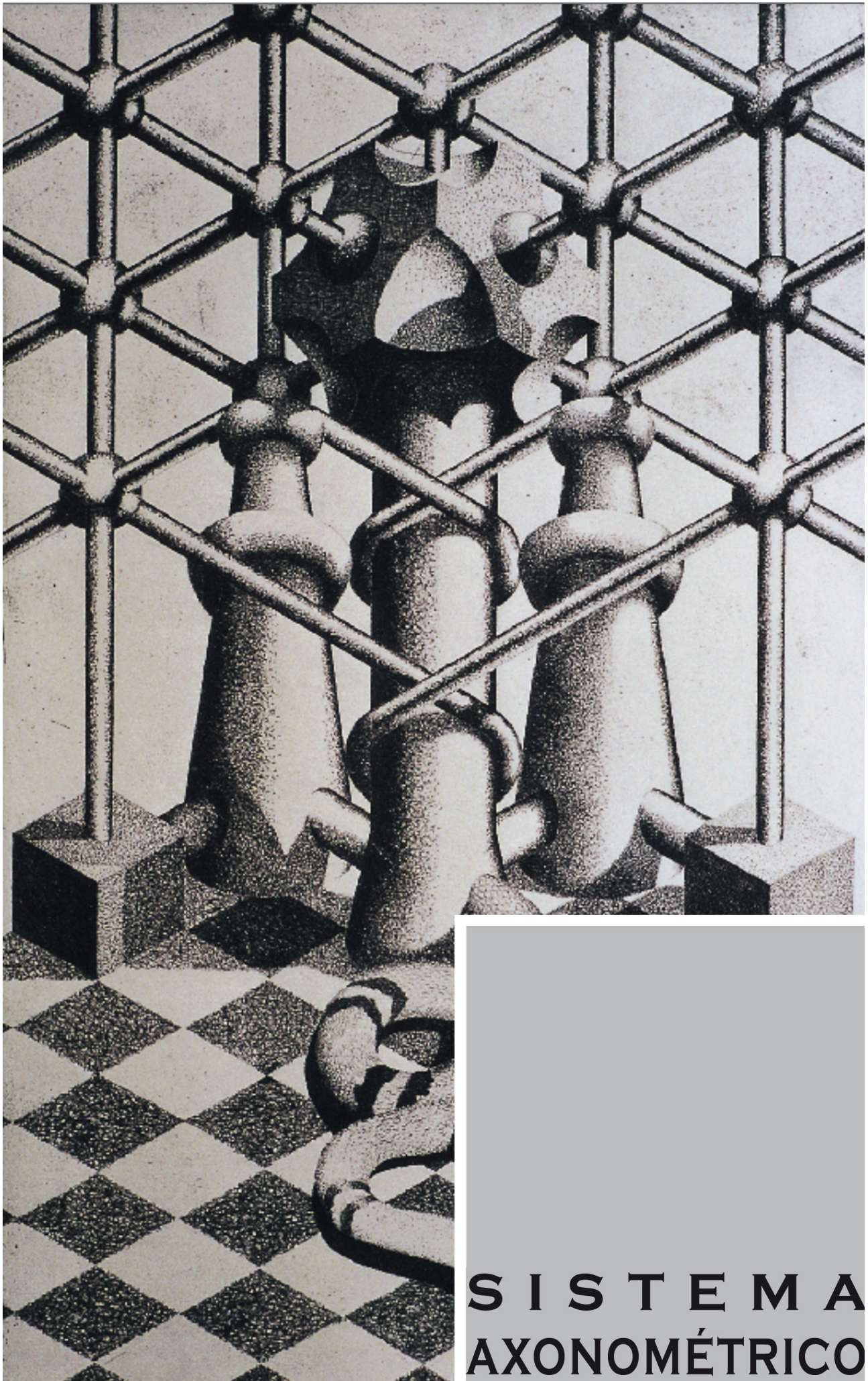
VERTICAL ou **HORIZONTAL** que o veremos en unha soa vista, alzado ou planta.

INCLINADO, que o veremos en dúas vistas.

CHAFRÁN, que o veremos nas tres vistas.



F-3.19



SISTEMA
AXONOMÉTRICO

1 - FUNDAMENTOS

OS ELEMENTOS DE TRABAJO

Como xa dixemos cando falamos dos **SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN**:

“SISTEMA AXONOMÉTRICO.- Permite representar o obxecto coas súas medidas máis ou menos reais e a representación do obxecto parécese bastante ó obxecto real.”

O sistema axonométrico, igual que o diédrico, utiliza a proxección ortogonal para a súa representación. Dado que a finalidade é obter unha soa proxección axonométrica **utilizaremos un só plano de proxección**, o que chamaremos “ π ”.

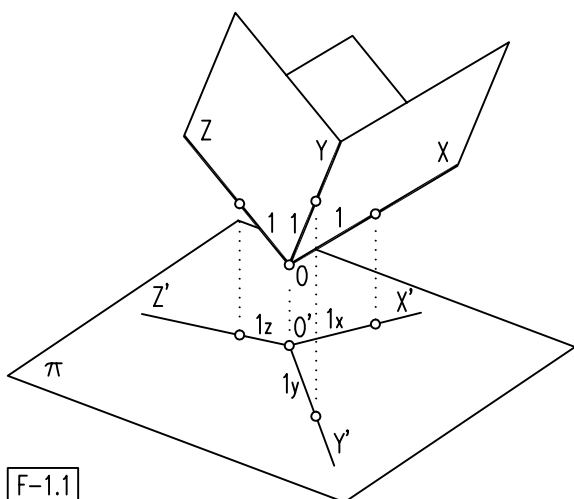
1.1.- Unidades de medida - F-1.1/2

Cando queremos facer a proxección axonométrica de un obxecto tridimensional debemos partir dos tres eixos de coordenadas que rexen o noso mundo de tres dimensións: **X**, **Y** e **Z**. Cando facemos a proxección axonométrica de estes eixos (que teremos formando cadanseu ángulo co plano π de proxección) a unidade de medida que usabamos no espazo (no noso caso o **centímetro**) varía cando a proxectamos sobre π e, o que é máis importante, **varía de xeito diferente en función do ángulo que forme cada eixo de coordenadas co plano π** .

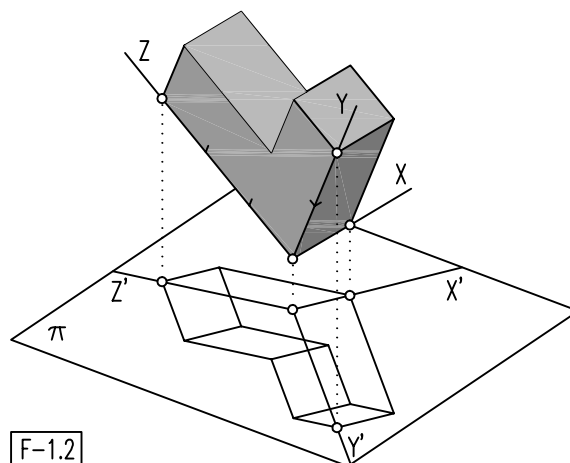
Na proxección axonométrica do eixo **X**, ou sexa **X'**, teremos como unidade de medida a proxección axonométrica do centímetro, ou sexa **1x**, e o mesmo nos outros tres eixos.

Debemos atopar algunha maneira de obter estas unidades axonométricas.

Se temos unha peza calquera (**F-1.2**), debemos elixir ben o grao de inclinación de cada eixo para que a proxección axonométrica da peza sexa a máis axeitada.



F-1.1



F-1.2

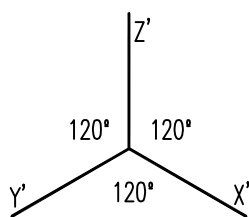
1.2.- Tipos de axonometrías

Das diferentes colocacións dos eixos **X**, **Y** e **Z** con respecto ó plano de proxección π xorden os tres tipos de **AXONOMETRÍAS**:

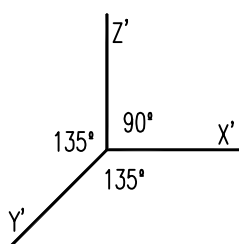
- **ISOMETRÍA (F-1.3).**- Cando os tres eixos forman o mesmo ángulo co plano π . A unidade de medida nos tres eixos é a mesma. Podemos usar o **centímetro** como unidade de medida posto que a representación final será a mesma (soamente un pouco máis grande).

- **DIMETRÍAS.**- Cando dous eixos forman o mesmo ángulo e o outro un ángulo distinto. A dimetría máis salientable é a **PERSPECTIVA CABALEIRA (F-1.4)**, con catro posibles esquemas de eixos (o máis usado é o primeiro). Utilizaremos o **centímetro** como unidade de medida nos eixos **X'** e **Z'** e un **coeficiente de redución** no eixo **Y'** (**1/2** ou **2/3**). Outra dimetría, derivada da perspectiva cabaleira, é a **PERSPECTIVA MILITAR (F-1.5)**, na que **X'** e **Y'** forman **90°** e **Z'** forma **135°** con cada un deles. A normativa permítenos utilizar a mesma unidade nos tres eixos (sen coeficientes de redución).

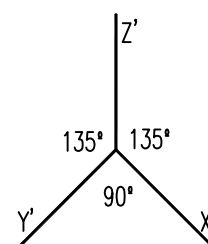
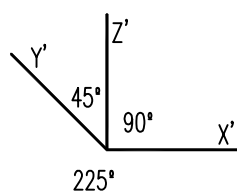
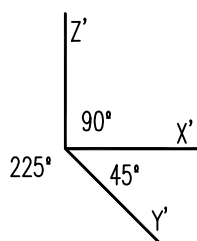
- **TRIMETRÍAS.**- Cada eixo terá cadanseu coeficiente de redución ou escala axonométrica, que tere-mos que obter polo procedemento axeitado.



F-1.3



F-1.4



F-1.5

1.3.- Obtención das escalas axonométricas - F-1.6/7

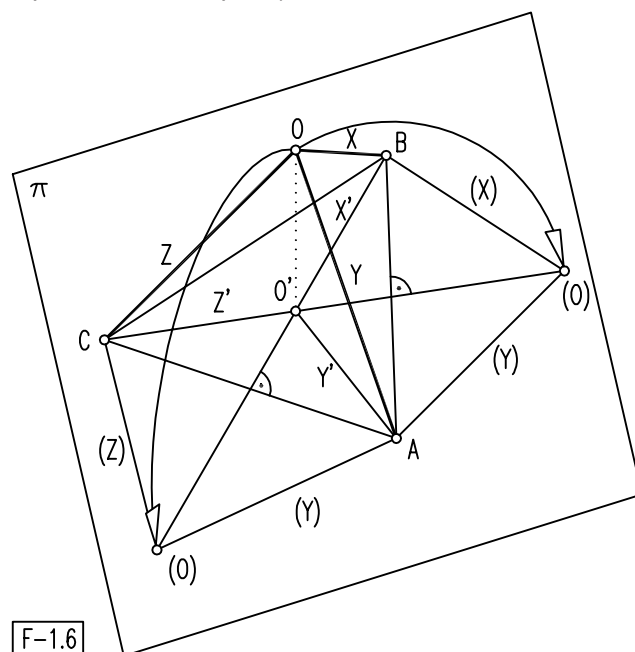
Como xa sabemos polo estudado no sistema diédrico (que tamén funciona por proxeccións ortogonais), o método máis axeitado para obter a verdadeira magnitude de algo que está no espazo é abateló sobre o plano de proxección. Utilizaremos este procedemento para obter as unidades de medida en cada eixo axonométrico (que son as proxeccións axonométricas dos eixos cartesianos que temos no espazo).

Supoñamos (F-1.6) que temos os tres eixos **X**, **Y** e **Z** colocados no espazo de tal maneira que os planos que forman cortan ó plano de proxección π . Teremos, no espazo, os planos triangulares **OBA** (formado polos eixos **X**, **Y** e a liña de corte con π), **OBC** (formado polos eixos **X**, **Z** e a liña de corte con π) e **OAC** (formado polos eixos **Y**, **Z** e a liña de corte con π).

A liña de corte de cada plano con π será a **palmela**, **gonzo** ou **eixo de xiro** no abatemento do plano respectivo sobre o plano de proxección π .

Cando abatemos o punto **O** (punto de intersección dos tres eixos no espazo, a orixe de coordenadas) obtemos (**O**) de tal xeito que quedará na prolongación da proxección axonométrica do eixo que non forma parte do plano a abater e será perpendicular o gonzo de xiro.

Os eixos abatidos deberán formar 90° (igual que no espazo) e formarán un triángulo rectángulo cuxa hipotenusa será o gonzo de xiro.



F-1.6

Podemos ver isto mesmo na súa **representación axonométrica (F-1.7)**:

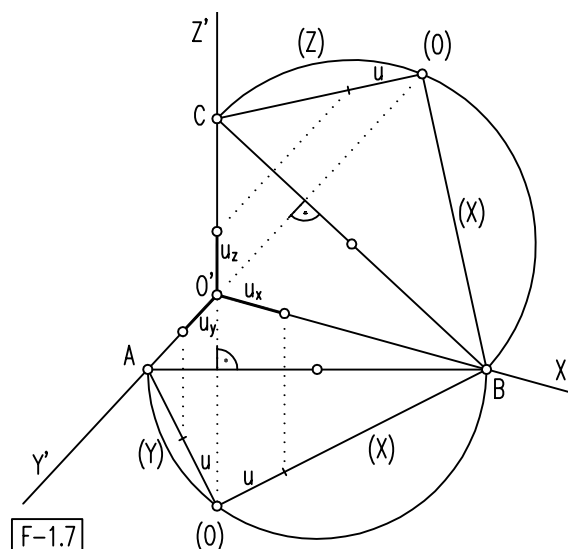
Partindo da proxección axonométrica dos eixos no espazo, ou sexa **X'**, **Y'** e **Z'**, collemos un punto calquera de **Y'**, por exemplo o **A**. A partir de **A** trazamos unha perpendicular a **Z'** (eixo oposto o plano **X'Y'**) e, onde corte a **X'** teremos o punto **B**. O segmento **AB** será o gonzo ou eixo de xiro para obter o plano **XY** abatido.

Tendo en conta que os eixos **X** e **Y** abatidos forman un triángulo rectángulo que ten por hipotenusa o gonzo de xiro, facendo a mediatriz de **AB** obtemos o punto medio e, con centro nel, trazamos a **semicircunferencia** de diámetro **AB**; onde a corte a prolongación de **Z'** teremos (**O**).

Unindo (**O**) con **A** e **B** obtemos (**Y**) e (**X**) e teremos así os eixos **X** e **Y** abatidos e en **verdadeira magnitude**.

Levamos a unidade de medida **u** sobre (**X**) e (**Y**) e desabatemos (en perpendicular ó gonzo), obtendo **u_x** e **u_y** en **X'** e **Y'**.

Para obter a escala axonométrica de **Z'** facemos o mesmo a partir do punto **B** (en perpendicular á **Y'**) para obter o punto **C**. Repetindo o procedemento obteremos **u_z**.



F-1.7

2 - PERSPECTIVA AXONOMÉTRICA

TRIMETRIA

En calquera trimetría o procedemento máis axeitado para debuxar unha figura plana, recta ou punto deberá pasar polo **abatemento** ou **desabatemento**.

Para debuxar un volume tamén podemos obter as escalas axonométricas en cada eixo e traballar con elas (sempre que as medidas a usar sexan de unidades enteiras).

2.1.- Abatemento dunha figura plana - F-2.1

Dado o triángulo $A'B'C'$.

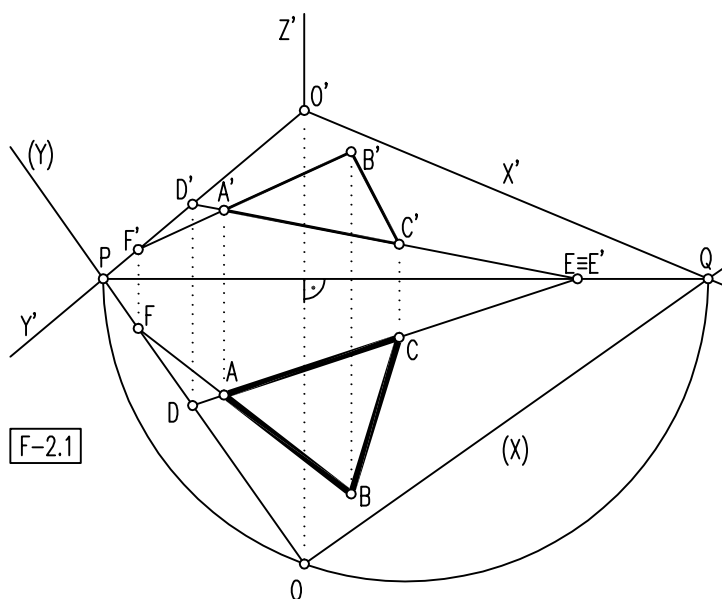
Abatemos o plano no que está contido (o $X'Y'$).

A partir dun punto P calquera de Y' trazamos o **gonzo** de xiro PQ , perpendicular á prolongación do eixo oposto Z' . Facemos a semicircunferencia de diámetro PQ e obtemos os eixos abatidos (Y) e (X) .

Procedemos agora a abater as rectas que conforma o triángulo dado: Completamos $A'C'$ ate os puntos D' en Y' e E' no gonzo. E' coincide co propio punto E posto que é un punto do plano XY por estaren no gonzo. Para abater D' trazamos unha perpendicular ó gonzo e obtemos D no eixo (Y) que, unido con E daranos a recta correspondente abatida. Trazando perpendiculares ó gonzo dende A' e C' obteremos A e C .

Continuamos $A'B'$ ate o eixo Y' onde atopamos F' e o abatemos, obtendo o punto F en (Y) . Unimos F con A e trazamos unha perpendicular ó gonzo dende B' , obtendo o punto B abatido.

Unimos A , B e C e obtemos o triángulo abatido e en verdadeira magnitude.



F-2.1

2.2.- Desabatemento dunha figura plana - F-2.2

O procedemento de desabatemento é exactamente igual que o do abatemento só que do revés.

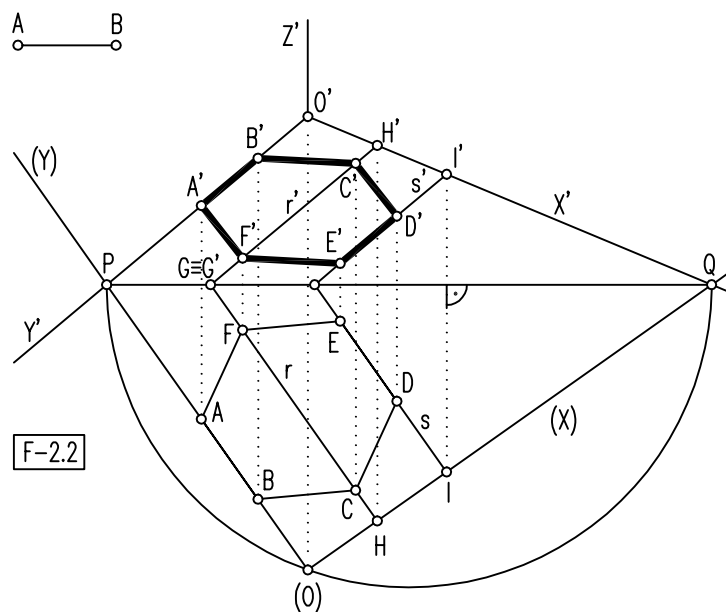
Desabater un **hexágono regular** de lado AB situado no eixo Y .

Abatemos o plano $X'Y'$ como vimos anteriormente e debuxamos o hexágono regular de lado AB .

Para desabater, o igual que para abater, debemos traballar con rectas. Podemos coller as propias dos lados ou, o que é máis recomendable, **coller rectas sinxelas que conteñan ós vértices** do hexágono. No noso caso collemos as rectas r e s paralelas ó eixo (Y) .

As rectas r e s son paralelas a (Y) polo que r' e s' serán paralelas a Y' . Como os puntos onde as rectas cortan ó gonzo de xiro son puntos dobres, trazamos dende eles r' e s' .

Trazando perpendiculares ó gonzo dende os vértices do hexágono abatido obtemos as súas correspondentes proxeccións axonométricas en r' e s' , obtendo así a proxección axonométrica $A'B'C'D'E'F'$ do hexágono que tínhamos abatido.



F-2.2

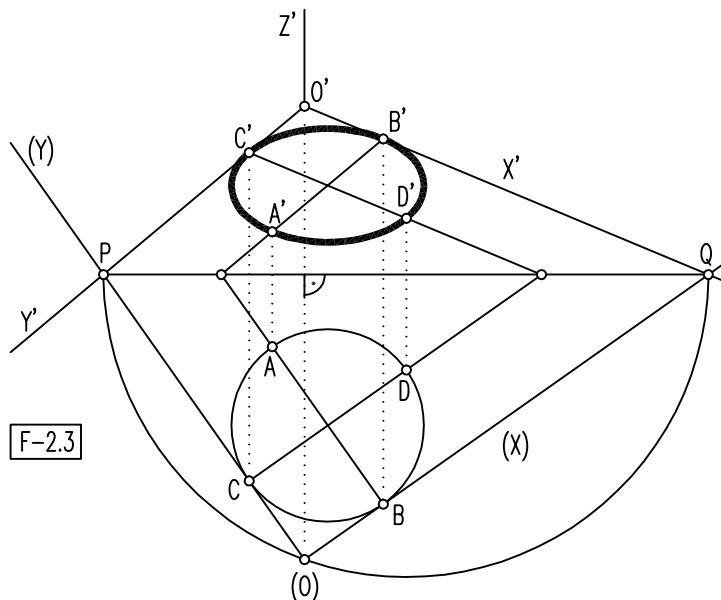
2.3.- Proxección axonométrica dunha circunferencia

Temos dúas opcións (que no fondo son a mesma e o seu trazado leva o mesmo tempo). Debemos debuxar a circunferencia unha vez abatido o plano respectivo e, despois, desabatela. Podemos desabater dous diámetros da circunferencia e obteremos dous diámetros conxugados da elipse solución ou abater directamente puntos da circunferencia, obtendo os correspondentes puntos da elipse.

Desabatemento por diámetros da circunferencia – F-2.3

Unha vez abatido o plano **XY** debuxamos a circunferencia e trazamos dous diámetros perpendiculares entre si e paralelos ós eixos. Debemos agora desabater os puntos **A**, **B**, **C** e **D**.

Aplicando o descrito no apartado anterior **2.2** obtemos **A'**, **B'**, **C'** e **D'**, extremos dos dous diámetros conxugados da **elipse solución**. Aplicando o método explicado en **7.5.- Trazado da elipse dados dous diámetros conxugados** da parte de **XEOMETRÍA PLANA**, obteremos a elipse que é a **proxección axonométrica da circunferencia** de partida.

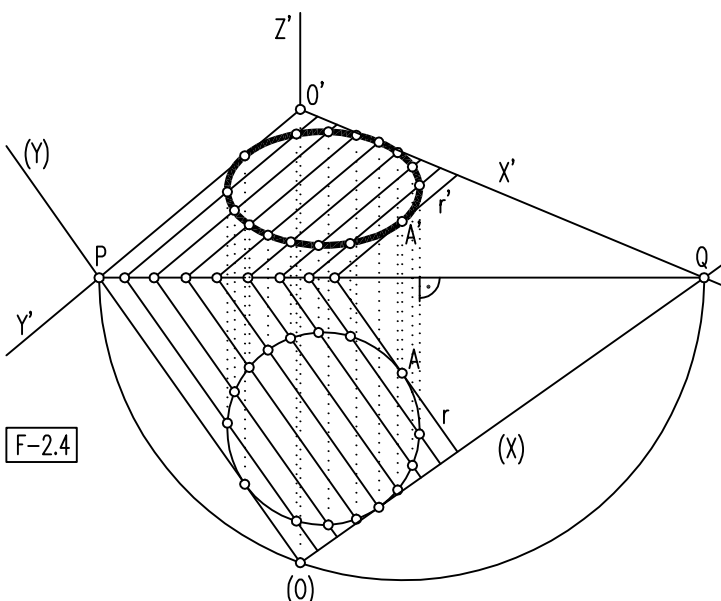


F-2.3

Desabatemento por puntos da circunferencia – F-2.4

Unha vez abatido o plano **XY** debuxamos a circunferencia e trazamos **rectas paralelas a un dos eixos** (no noso caso ó eixo **(Y)**). Debemos ter en conta que a elipse resultante a imos trazar a man alzada polo que debemos coller as rectas necesarias para garantir unha boa exactitude.

Polo procedemento xa explicado no punto **2.2** obtemos as proxeccións axonométricas das rectas e os puntos da **elipse** correspondentes ós da circunferencia de partida.



F-2.4

2.4.- Proxección axonométrica dun volume - F-2.5

Debuxar a proxección axonométrica dun volume calquera ten dous pasos:

- 1.- Debuxar a proxección axonométrica da base ou da planta usando as escalas axonométricas axeitadas a cada eixo ou desabatendo.
- 2.- Levantar as alturas usando a escala axonométrica correspondente ó eixo **Z'**.

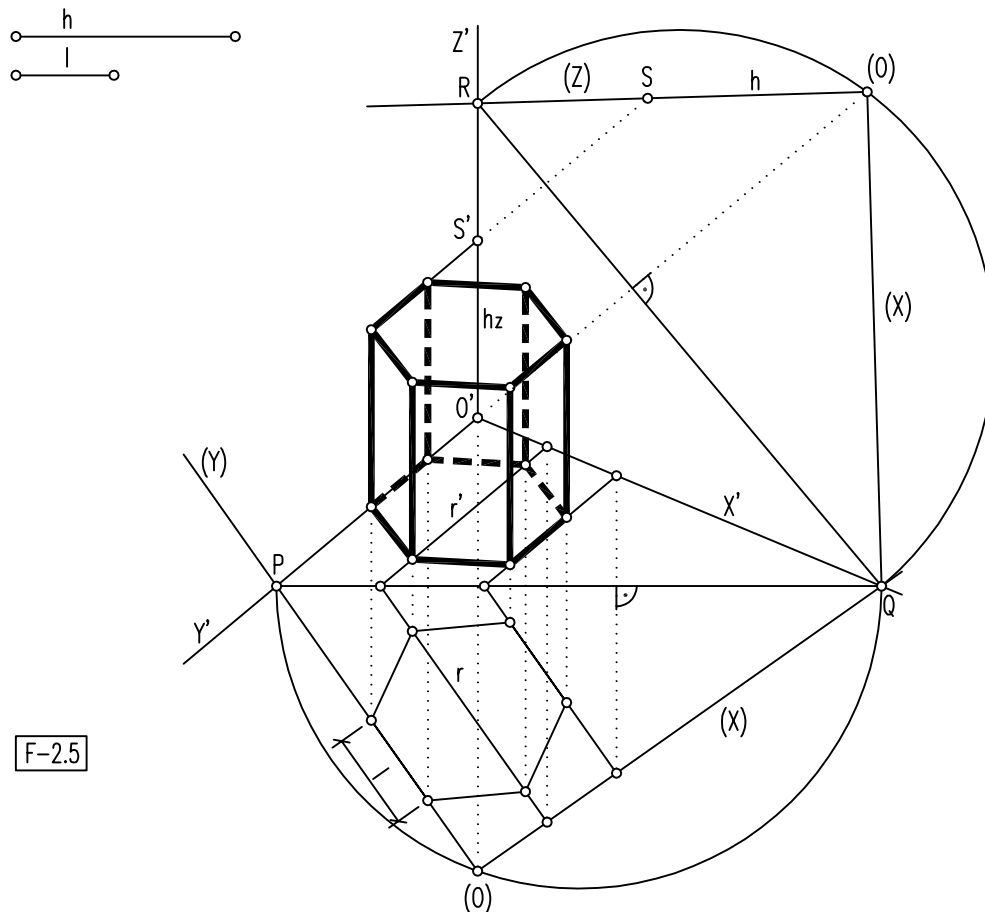
Debuxar a proxección axonométrica dun **prisma regular recto** de bases **hexagonais** de lado **l** e altura **h**.

Abatemos o plano **XY** e debuxamos o **hexágono regular de lado l**. Desabatemos e obtemos a proxección axonométrica do hexágono da base inferior.

Abatemos o plano **XZ** e levamos sobre **(Z)** a medida da altura **h**. Levando unha perpendicular ó gonzo dende o punto **S** obtemos **S'** e a proxección axonométrica da altura no eixo **Z'**.

Levantamos as arestas laterais do prisma paralelas a **Z'**, levamos a altura **O'S'** sobre elas e trazamos paralelas ós lados da base para obter a proxección axonométrica da base superior.

Nas representacións axonométricas de volumes **non é usual representar as liñas ocultas**. Aquí as debuxamos para unha mellor comprensión do trazado.



F-2.5

PERSPECTIVA CABALEIRA

2.5.- Abatemento dunha figura plana - F-2.6

O **abatemento** en perspectiva cabaleira é moi similar o da trimetría, pero máis sinxelo: Temos o coeficiente de redución ou escala axonométrica e un só dos eixos (o eixo Y') e os eixos X' e Z' forman, igual que no espazo, 90° .

Dado o cuadrilátero $A'B'C'D'$.

Abatemos o plano no que está contido (o $X'Y'$).

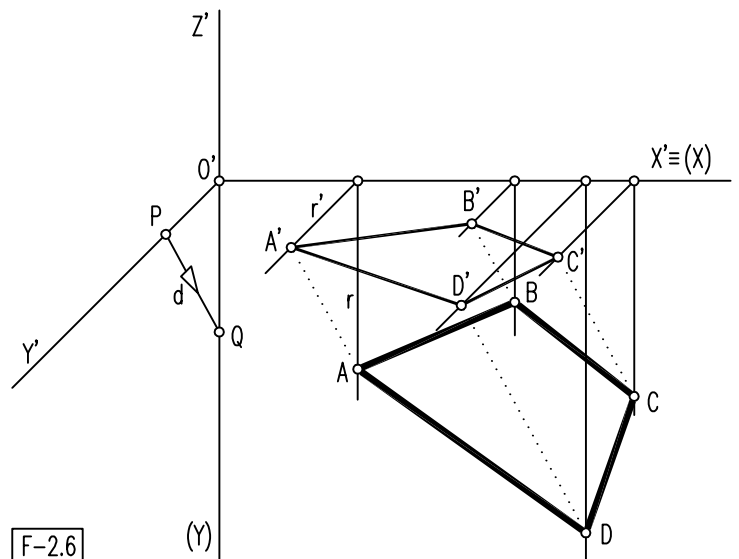
Tomamos como gonzo ou eixo de xiro o propio eixo X' que, polo tanto, coincidirá co eixo abatido (X). Os eixos X e Y forman 90° polo que, unha vez abatidos, deberán manter a perpendicularidade e trazamos (Y) perpendicular a $X' \equiv (X)$.

Imos aplicar no eixo Y' o coeficiente de redución de $\frac{1}{2}$ polo que deberemos obter a **dirección de abatemento**. No eixo Y' levamos a partir da orixe O' unha medida calquera, obtendo o punto P e, sobre o eixo (Y), o dobre desa medida obtendo o punto Q .

PQ será a dirección de abatemento/desabatemento d (que fai corresponder a calquera punto do eixo Y o seu correspondente na proxección axonométrica del en Y').

Para abater o cuadrilátero dado collemos rectas que conteñan os vértices (rectas sinxelas, paralelas a Y') e, dende o punto de corte co gonzo, trazamos as correspondentes rectas abatidas que serán paralelas a (Y).

Trazamos por A' , B' , C' e D' paralelas a d , a dirección de abatemento/desabatemento, para obter A , B , C e D que son os vértices do cuadrilátero abatido e en verdadeira magnitude.



F-2.6

O **desabatemento** farase de igual xeito pero do revés. Empezaremos debuxando a figura abatida e desabateremos.

2.6.- Perspectiva cabaleira dunha circunferencia - F-2.7

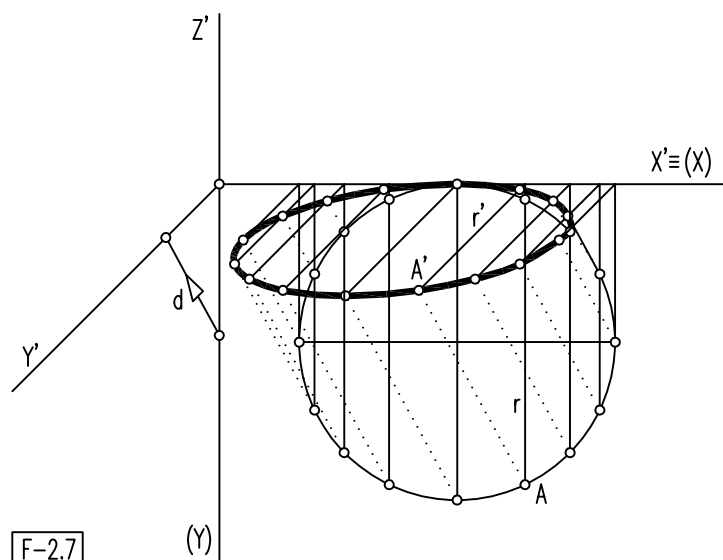
A perspectiva cabaleira de unha circunferencia daranos unha elipse nos planos **XY** e **YZ** e unha circunferencia, igual, no plano **XZ**.

X' e **Z'** forman **90°** igual que no espazo, razón pola cal a perspectiva cabaleira da circunferencia é exactamente igual á circunferencia orixinal.

Para debuxar a perspectiva cabaleira da circunferencia nos planos **X'Y'** ou **Y'Z'** faremos o desabatemento da circunferencia que, ó igual que na trimetría, o podemos facer polos dous procedementos de usar **dous diámetros** perpendiculares da circunferencia (que nos darán dous diámetros conxugados da elipse correspondente) ou **puntos da circunferencia** que nos darán puntos da elipse. Na **F-2.7** podemos ver o trazado correspondente a este último procedemento.

Abatemos o plano **XY** e obtemos a dirección de abatemento/desabatemento como xa quedou explicado.

Trazamos a circunferencia que queremos desabater e trazamos un feixe de rectas paralelas ó eixo (**Y**). Obtemos as proxeccións axonométricas correspondentes de cada recta e, polos puntos da circunferencia, trazamos paralelas á dirección de desabatemento obtendo os puntos da elipse buscados.



F-2.7

2.7.- Perspectiva cabaleira dun volume

Para facer a perspectiva cabaleira dun volume debuxaremos a base ou planta por desabatemento (se é unha figura sinxela e ortogonal podemos levar directamente as medidas nos eixos **X'** e **Y'**, aplicando neste o coeficiente de redución).

Levantamos as verticais paralelas o eixo **Z'** coas medidas reais e xa estará.

O procedemento de traballo é exactamente o mesmo en calquera perspectiva axonométrica coa salvidade dos coeficientes de redución ou escalas axonométricas a aplicar nos distintos eixos.

PERSPECTIVA ISOMÉTRICA OU ISOMETRÍA

2.8.- Debuxo de figuras planas nunha isometría

Non imos explicar polo miúdo o procedemento de traballo para debuxar calquera figura plana en unha isometría pois, como quedou dito máis arriba, o procedemento é o mesmo que nas demais axonometrías.

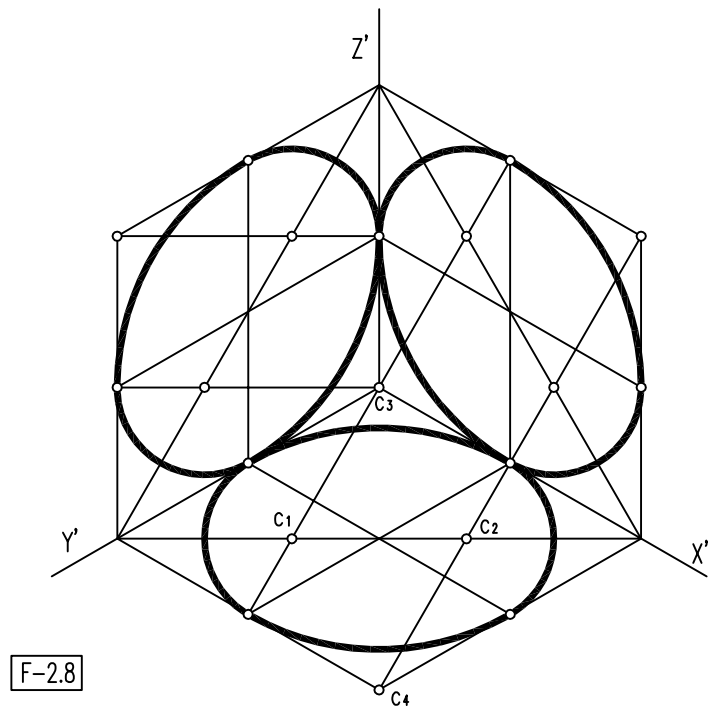
Na isometría é inda máis sinxelo pois podemos traballar coas medidas reais sen coeficientes de redución.

2.9.- Debuxo da circunferencia na isometría - F-2.8

O procedemento para debuxar unha circunferencia en unha isometría sería o mesmo que o usado para debuxala en calquera outra axonometría (tal e como quedou explicado anteriormente) pero, dado que o obxectivo da isometría é, fundamentalmente, a **simplicidade** e a **rapidez**, a **normativa permite debuxar a circunferencia coma un óvalo**, en concreto o coñecido coma **óvalo isométrico**.

En calquera dos tres planos o debuxaremos igual: Levamos o diámetro nos eixos respectivos e teremos o óvalo. Aplicamos o método visto no apartado **6.4.- Trazado do óvalo isométrico ou inscrito nun rombo** da parte de **XEOMETRÍA PLANA** e temos a proxección isométrica da circunferencia feita.

Lembremos que, coma todos, o **óvalo isométrico** é unha curva pechada formada por catro arcos de circunferencia tanxentes entre si. No caso do ovalo do plano **X'Y'** teremos os catro centros en **C₁**, **C₂**, **C₃** e **C₄**.



2.10.- Debuxo dun volume na isometría - F-2.9

Debuxar un volume en isometría non ten ningunha diferenza con respecto ó resto das axonometrías e o procedemento de traballo xa quedou explicado.

Poren, convén facer unha matización que, as veces, esquecemos e cometemos un erro no debuxo de volumes isométricos.

Na isometría podemos (e así o faremos na meirande parte dos casos) traballar coas medidas reais pero, as veces, é máis rápido ou aconsellable debuxar a base do volume por desabatemento e despois levar as alturas.

No exemplo da **F-2.9** trátase de debuxar a proxección isométrica dun prisma recto de base pentagonal de lado l e altura h .

Temos dúas formas de resolver o problema:

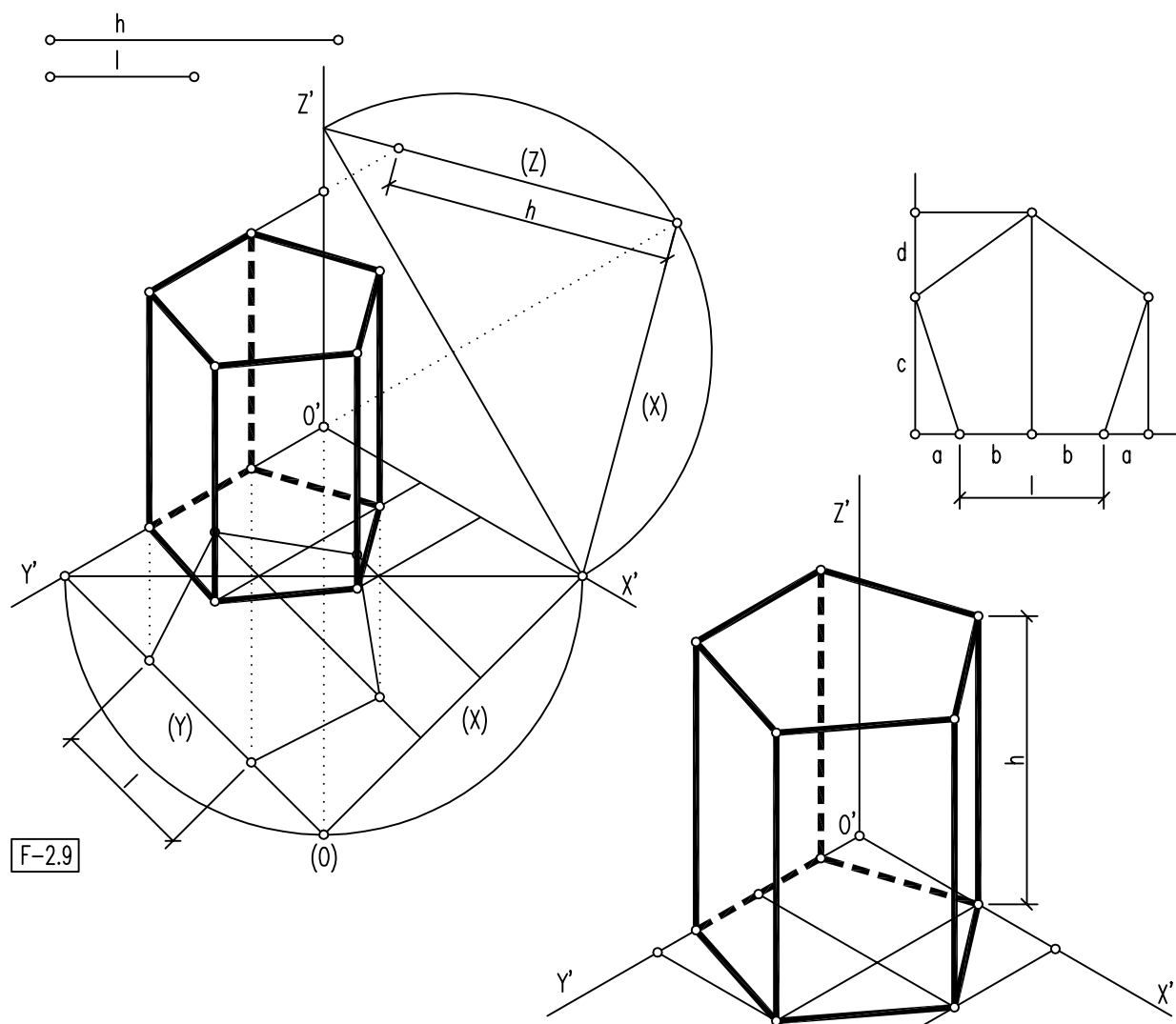
1 (parte esquerda de F-2.9).- Abatemos o plano $X'Y'$ e debuxamos o pentágono regular de lado l . Polo procedemento xa explicado desabatemos e temos a proxección axonométrica da base, pero temos aplicado a escala axonométrica ós eixos X' e Y' polo que, para evitar un erro importante no debuxo, deberemos aplicar a mesma escala no eixo Z' . Abatemos o plano $X'Z'$, levamos sobre (Z) a medida da altura h e obtemos a súa proxección axonométrica e rematamos o prisma levando paralelas á base inferior para obter a superior.

2 (parte dereita de F-2.9).- Debuxamos un pentágono regular de lado l e obtemos as medidas parciais nun sistema de eixos cartesianos.

Levamos estas medidas nos eixos $X'Y'$ (esta vez coas medidas reais), trazamos paralelas ós eixos e debuxamos a proxección isométrica do pentágono.

Levantamos as arestas laterais do prisma paralelas a Z' , levamos a medida da altura real h e, trazando paralelas á base inferior, debuxamos a superior.

As dúas figuras son iguais coa diferenza da escala, a segunda é algo maior que a primeira (pois usamos medidas reais) pero as dúas son correctas. Non estaría ben se usamos o desabatemento para debuxar a base inferior (procedemento 1) e logo levamos a altura coa medida real (procedemento 2).





SISTEMA
ACOUTADO

1 - FUNDAMENTOS

O CONCEPTO

Cando falamos, no inicio do estudo do SISTEMA DIÉDRICO, dos sistemas de representación, falamos de tres sistemas: **SISTEMA DIÉDRICO**, **SISTEMA AXONOMÉTRICO** e **SISTEMA CÓNICO**. Non mencionamos o **SISTEMA ACOUTADO** e foi por unha razón moi sinxela: **Non é un sistema en si mesmo senón que é unha simplificación do SISTEMA DIÉDRICO**.

Debemos ter isto moi en conta pois, en realidade, no sistema acoutado non imos ver nada novo con respecto ó xa explicado na parte de diédrico.

O SISTEMA ACOUTADO naceu para resolver dúas aplicacións moi concretas: O cálculo e trazado de **TELLADOS** e o debuxo de terreos e **PERFÍS DE TERREOS**. Para resolver estas dúas cuestións non necesitamos toda a xeometría nin todo o conxunto de planos de proxección do sistema diédrico completo; de feito abonda con un só plano de proxección.

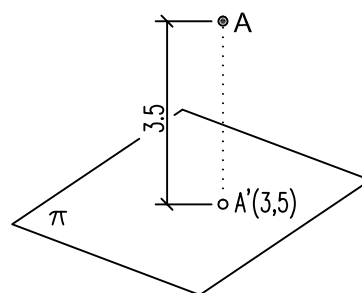
Teremos **un plano de proxección** (o plano horizontal) o que chamaremos π .

Todo o que fagamos non será máis que unha adaptación (máis sinxela) do dito no estudo do sistema diédrico.

O PUNTO

1.1.- Representación do punto - F-1.1

Só temos o plano π de proxección polo que un punto **A** terá unha soa proxección **A'** en perpendicular a π . Para que o punto estea definido debemos poñer a carón del e entre paréntese a “**cota**” ou altura do punto con respecto ó plano π . Deste xeito tan sinxelo quedará o punto perfectamente definido en sistema acoutado.

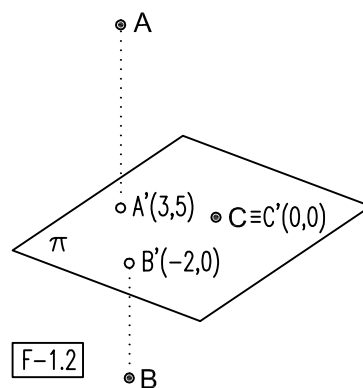


F-1.1

◦ A'(3,5)

1.2.- Posicións do punto - F-1.2

O punto soamente pode ter **tres posicións** no sistema acoutado: **Por riba do plano π (A)**, **por debaixo (B)** en cuxo caso terá a cota negativa, e **no propio plano π** e terá cota **0**. Cando o punto está no plano de proxección coincide coa súa proxección.



F-1.2

◦ A'(3,5)

◦ C ≡ C'(0,0)

◦ B'(-2,0)

A RECTA

1.3.- Representación da recta - F-1.3

Para ter definida unha recta necesitamos dous puntos (**A** e **B**). Representamos unha recta **r** pola súa proxección **r'** e terá a traza **Tr** no punto onde a recta corta ó plano de proxección π .

Vexamos algunhas **definicións**:

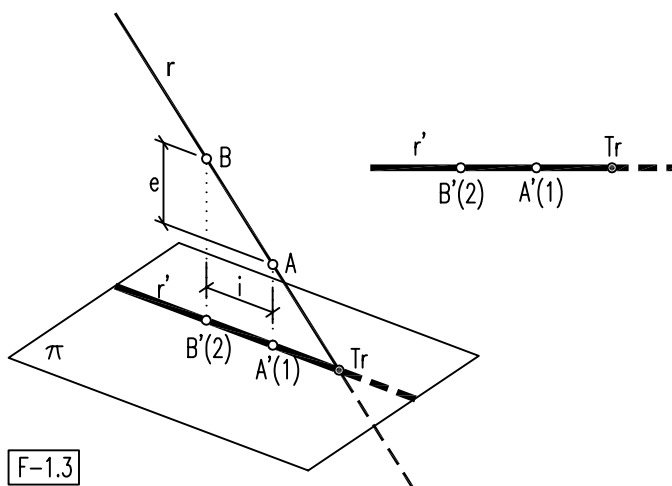
- **Equidistancia (e)**.- É a distancia vertical entre dous puntos cuxa diferenza de cotas é a unidade. Depende da unidade de medida coa que traballemos (centímetro, metro, quilómetro,...)

- **Intervalo (i)**.- É a distancia horizontal entre dous puntos cuxa diferenza de cotas é de 1. Depende da inclinación ou **pendente** da recta. Unha recta que forme un ángulo maior que outra co plano π terá un intervalo menor que esa outra.

- **Pendente**.- É a relación existente entre as distancias verticais e horizontais de dous puntos calquera da recta. A podemos definir de dúas maneiras:
Polo ángulo que forma a recta co plano de proxección π (45°).

En tanto por cento (45%). Indica que a distancia vertical é de 45 e a horizontal de 100.

É fundamental non confundir unha pendente dada en porcentaxe con outra dada en graos: Unha pendente de 45° non é igual a outra do 45%. De feito $45^\circ = 100\%$.



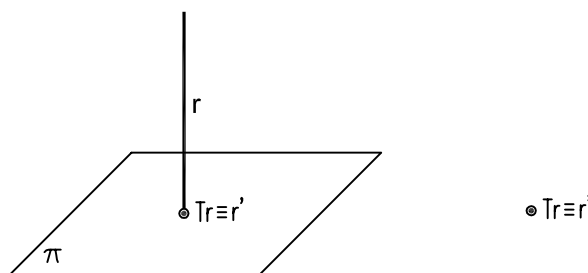
F-1.3

1.4.- Posicións particulares da recta

Aparte da recta oblicua xeral temos tres rectas que teñen nome propio.

Recta vertical – F-1.4

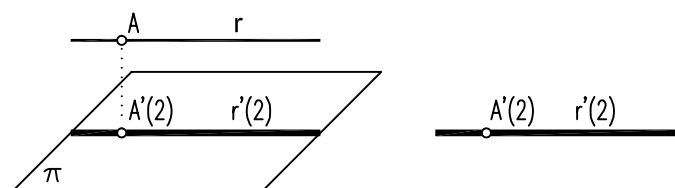
Como o seu nome indica é perpendicular ó plano π . Tódolos puntos dela teñen a mesma proxección ca recta e a traza.



F-1.4

Recta horizontal – F-1.5

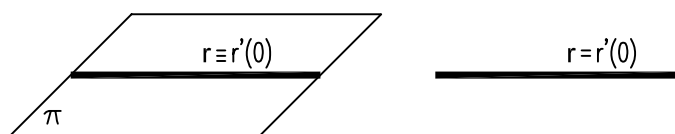
É paralela ó plano de proxección e tódolos puntos dela teñen a mesma cota. A representamos polo propio nome da recta coa cota entre paréntese.



F-1.5

Recta contida no plano de proxección F-1.6

O mesmo que a anterior a representamos engadindo-lle ó nome, entre paréntese, a cota 0.



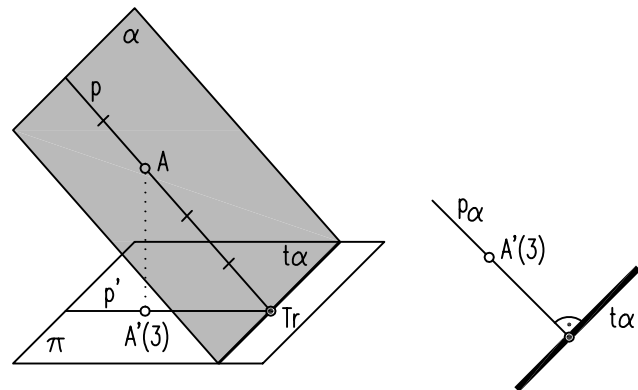
F-1.6

O PLANO

1.5.- Representación do plano - F-1.7

Un plano α o representamos pola traza $t\alpha$ pero, para que quede definido, precisamos definir a proxección dun punto A' do plano (que non estea na traza). Se queremos definir unha **recta de máxima pendente** do plano $p\alpha$ non temos máis que trazar pola proxección do punto A' unha perpendicular a $t\alpha$.

Tamén podemos definir un plano mediante unha recta de máxima pendente del.



F-1.7

1.6.- Rectas particulares do plano - F-1.8

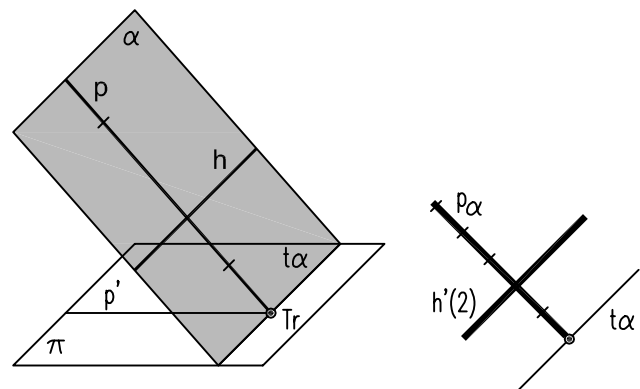
Aparte das infinitas rectas oblicuas que podemos ter nun plano calquera, temos dúas (e as súas infinitas paralelas) que teñen nome propio:

Recta de máxima pendente

Xa a vimos no apartado anterior. É a recta do plano que ten a pendente máxima e, como no sistema diédrico, ten a proxección $p\alpha$ perpendicular á traza do plano.

Recta horizontal

É unha recta horizontal que pertence ó plano. Ten a proxección h' paralela á traza do plano



F-1.8

1.7.- Dados tres puntos, obter o plano que forman – F-1.9

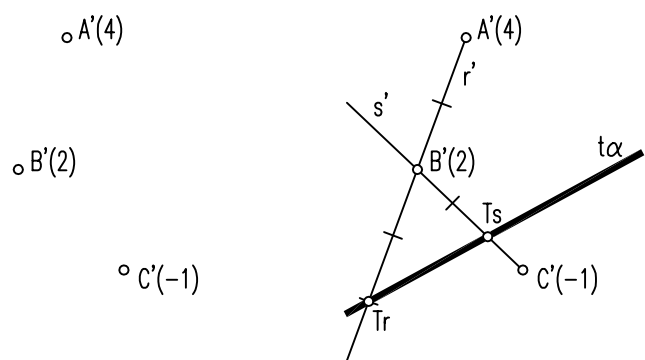
Dados A' , B' e C' .

Igual que no sistema diédrico debemos debuxar dúas rectas que se cortan, obter ás trazas e unilas.

Unindo A' e B' obtemos r' . Polo teorema de Thales dividimos $A'B'$ en dúas partes iguais (cada unha desas partes será o **intervalo** da recta r). Levamos dous intervalos dende B' cara a abaixo e obtemos Tr .

Unindo B' con C' obtemos s' . Dividimos o segmento $B'C'$ en tres partes iguais e na anterior a C' (correspondente á cota 0) estará a traza da recta Ts .

Unimos Tr con Ts e temos $t\alpha$, a traza do plano que forman.

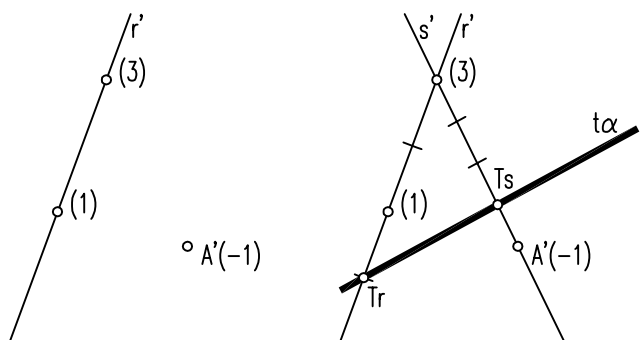


F-1.9

1.8.- Dada unha recta e un punto, obter o plano que forman – F-1.10

Dados r' e A' .

Obtemos Tr tal e como vimos no apartado anterior. Unimos un punto de r' (o de cota 3) con A' e obtemos s' . Tal e como quedou explicado, obtemos Ts . Unimos Tr con Ts e temos $t\alpha$, a traza do plano que forman.

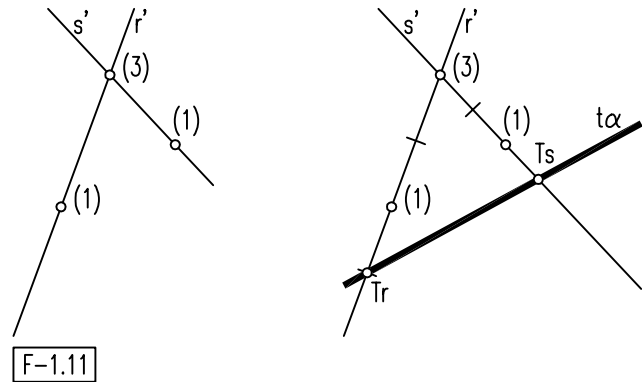


F-1.10

1.9.- Dadas dúas rectas que se cortan, obter o plano que forman – F-1.11

Dadas r e s .

Resolvemos o problema de xeito similar ós casos anteriores.



1.10.- Intersección entre dous planos – F-1.12

Dados α e β .

Os planos α e β están definidos polas trazas ($t\alpha$ e $t\beta$) e un punto A pertencente ó plano α e outro B pertencente ó plano β .

Concepto: É o mesmo problema que no sistema diédrico. A recta intersección vai pertencer ós dous planos e necesitamos dous puntos para definila. Un punto será a traza da recta, intersección entre as trazas dos planos.

Dúas rectas horizontais de cada un dos planos que teñan a mesma cota cortaranse, necesariamente, en un punto da recta intersección.

Solución: Por A' trazamos unha perpendicular a $t\alpha$. Dividimos en dúas partes iguais o segmento entre A' e $t\alpha$, para obter o **intervalo** do que sería unha recta de máxima pendente do plano α .

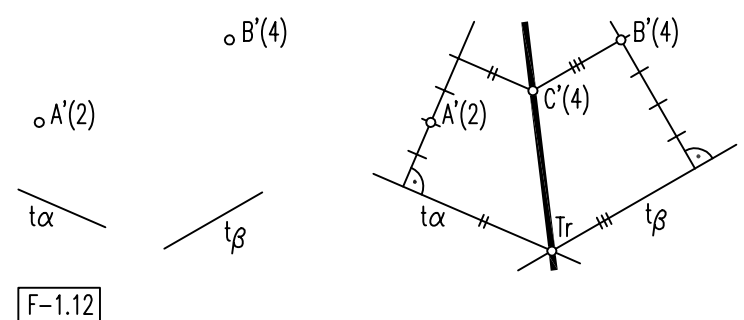
Por B' trazamos unha perpendicular a $t\beta$. Dividimos en catro partes iguais o segmento entre B' e $t\beta$ para obter o **intervalo** do que sería unha recta de máxima pendente do plano β .

Continuando $t\alpha$ e $t\beta$ e obtemos Tr , a traza da recta intersección.

Xa temos un punto da recta intersección r' . Necesitamos outro.

Obtemos un punto de cota 4 na perpendicular a $t\alpha$ e trazamos por el unha paralela a $t\alpha$. Trazamos unha paralela a $t\beta$ polo punto de cota 4 da súa perpendicular e, onde se corte coa paralela a $t\alpha$, obteremos un punto C' de cota 4 que será un punto da recta intersección.

Unimos Tr e C' e obtemos r' , **recta intersección entre α e β** .



1.11.- Intersección entre recta e plano – F-1.13

Dados r e α .

Temos r' definida por dous puntos e o plano α , definido por unha recta de máxima pendente $p\alpha$ (definida a súa vez por dous puntos).

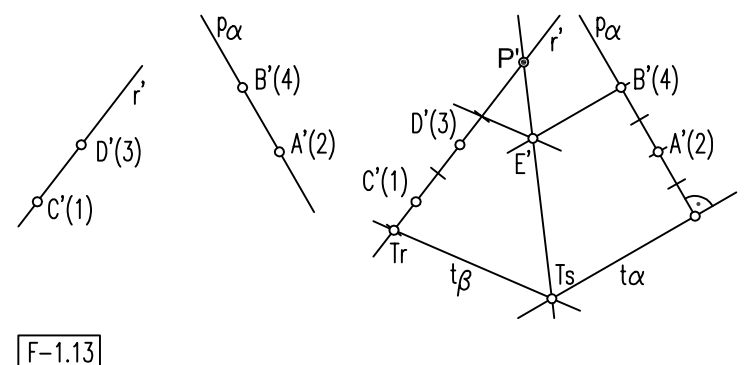
Concepto: Tal e como faciamos en sistema diédrico, debemos coller un plano calquera que conteña a r e obter a intersección entre ese plano e o plano dado; a recta intersección cortarase con r no punto de intersección buscado.

Solución: Obtemos Tr (despois de atopar a equidistancia en r') e trazamos por ela $t\beta$, a traza dun plano calquera que a contén.

Obtemos a equidistancia de $p\alpha$, atopamos a súa traza e, por ela, trazamos unha perpendicular a $p\alpha$ que será $t\alpha$, a traza do plano α .

Continuamos $t\beta$ e $t\alpha$ ata que se corten e teremos Ts , a traza da recta intersección.

Trazamos rectas horizontais de cada plano coa mesma cota (no exemplo as de cota 4) para obter un punto común E' . Unimos E' con Ts e teremos a recta intersección entre α e β que, ó continuala cortará a r' no punto P' de **intersección entre r e α** .



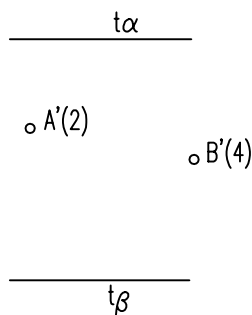
1.12.- Intersección de dous planos de trazas paralelas – F-1.14

Dados α e β .

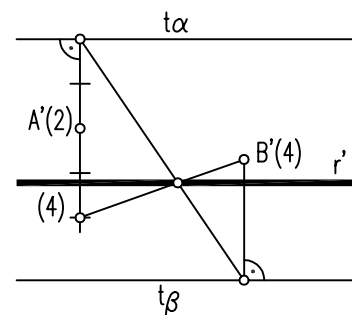
Temos os planos α e β definidos polas súas trazas t_α e t_β e os puntos A' (do plano α) e B' (do plano β).

Concepto: A recta intersección de ámbolos dous planos vai ser unha recta horizontal que pertenza ós dous planos. A proxección da recta intersección será paralela a ámbalas dúas trazas dos planos.

Se unimos parellas de puntos coa mesma cota dos dous planos, as rectas resultantes cortarase nun punto tal que estará na vertical da recta intersección.



F-1.14



Solución: Polos puntos A' e B' trazamos rectas de máxima pendente de cadanseu plano (perpendiculares ás trazas t_α e t_β). Obtemos o punto de cota 4 na recta de máxima pendente de α .

Unimos os puntos de cota 0 e 4 de cada unha das rectas de máxima pendente e, por onde se corten, trazamos unha paralela ás trazas dos planos que será r' , **recta intersección entre α e β .**

2 - TELLADOS

CONCEPTOS BÁSICOS

Imos falar de **TELLADOS** que non de **CUBERTAS**. Os dous termos definen os **elementos arquitectónicos que protexen da choiva os edificios** pero as cubertas son un termo máis amplo que inclúe, entre outras, as “cubertas planas” que non están compostas por planos ou “vertentes”.

Definicións:

VERTENTE ou **AUGA**.- Cada un dos planos que compoñen o tellado.

BEIRADO.- A liña horizontal máis baixa dun tellado

CRUCEIRO, **CUMIO** ou **CUMIEIRA**.- A liña de intersección de dous vertentes de beirados paralelos. Adoita ser a liña máis alta do tellado.

LIMA TESA.- Liña de intersección, convexa, de dúas vertentes adxacentes.

LIMA FOIA.- Liña de intersección, cóncava, de dúas vertentes adxacentes.

O cálculo e debuxo de tellados é ben sinxelo, sempre que o fagamos con orde. Debemos resolver as interseccións de tódolos planos ou vertentes dados polas súas trazas e pendentes. Podemos ter unha pendente para todos os planos da cuberta (é o máis común na construción) ou pendentes diferentes pero, en ámbolos dous casos, o método de traballo é o mesmo.

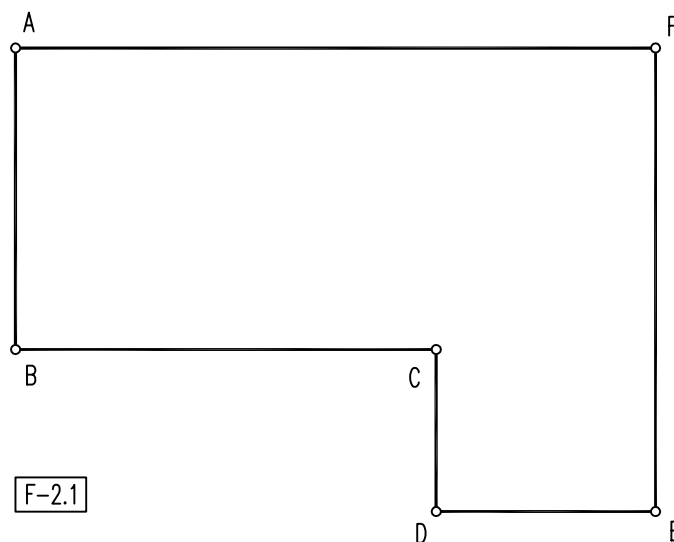
Consellos para resolver un tellado:

- Empezar sempre por **obter as rectas de intersección entre tódalas vertentes adxacentes**.
- **Pechar a vertente da que esteamos seguros** e, despois, **seguir na mesma dirección** con orde (cara a dereita ou cara a esquerda, sen saltos).
- Cando pechamos un auga ou vertente obtemos un punto de intersección entre as rectas (lima tesas, lima foias ou cumios) que pechan o plano e, sempre (agás cando rematemos o tellado), teremos unha vertente aberta pola que deberemos seguir e teremos que facer a pregunta clave: **“Este punto a que vertentes pertence?”** A resposta a esta pregunta indicaranos qué intersección debemos resolver a continuación, a así sucesivamente.

RESOLUCIÓN DE TELLADOS

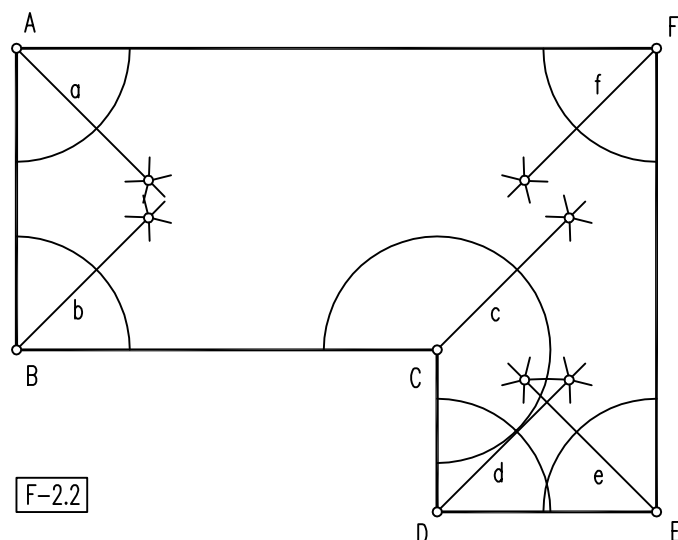
2.1.- Tellados con vertentes de igual pendente

F-2.1.- Temos o tellado do que coñecemos o polígono de vértices **ABCDEF**, puntos de intersección dos beirados das vertentes correspondentes. Sabemos, ademais, que todas as vertentes teñen a mesma pendente.



F-2.2.- As lima tesas ou lima foias de vertentes adxacentes estarán nas bisectrices dos ángulos que forman; as trazamos e obtemos as rectas **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, e **f**.

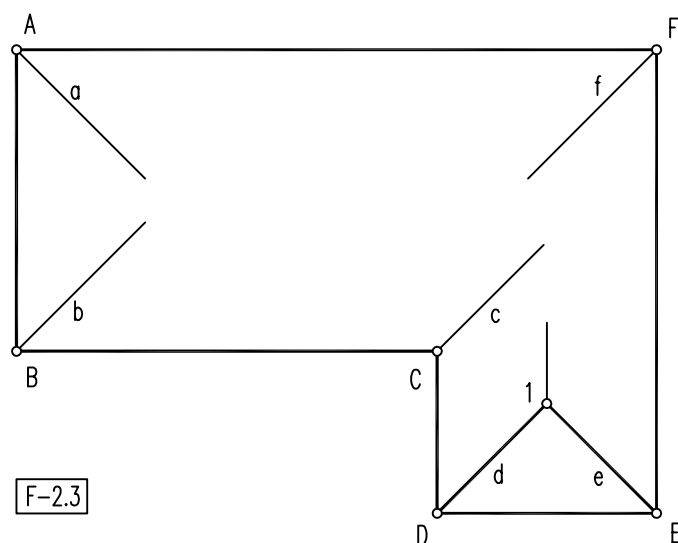
Para pechar a primeira vertente debemos atopar unha da que esteamos seguros. Parece obvio que é a que pechan as lima tesas **d** e **e**.



F-2.2

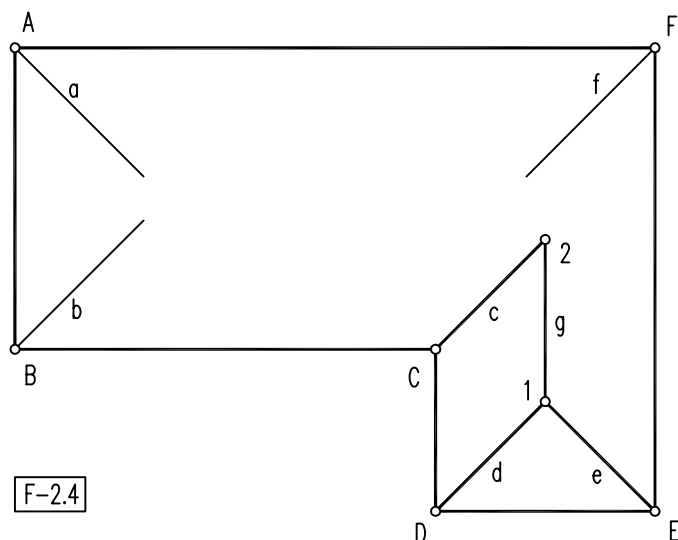
F-2.3.- As rectas **d** e **e** córtanse no punto **1** que nos permite pechar a vertente **DE1**.

Agora facemos a pregunta: **A qué vertentes pertence o punto 1?** O punto **1** é a intersección de **d** (intersección das vertentes de beirados **CD** e **DE**) e **e** (intersección das vertentes de beirados **DE** e **EF**). Como a vertente de beirado **DE** xa está pechada, soamente queda a intersección das vertentes de beirados **CD** e **EF** que son de trazas paralelas polo que a recta intersección será paralela a elas e sairá do punto **1**.



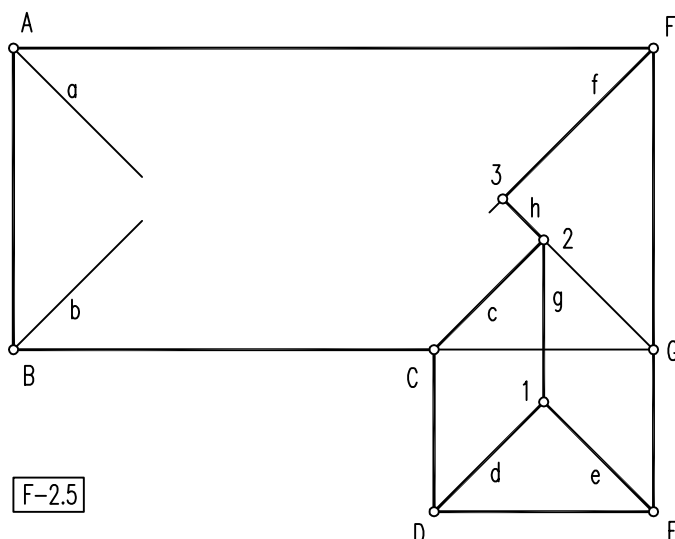
F-2.3

F-2.4.- Continuamos o cumio que sae do punto **1** ate que corte a outra recta. A primeira á que corta é a lima foia **c** no punto **2**, e xa temos outra vertente pechada, a **CD12**.



F-2.4

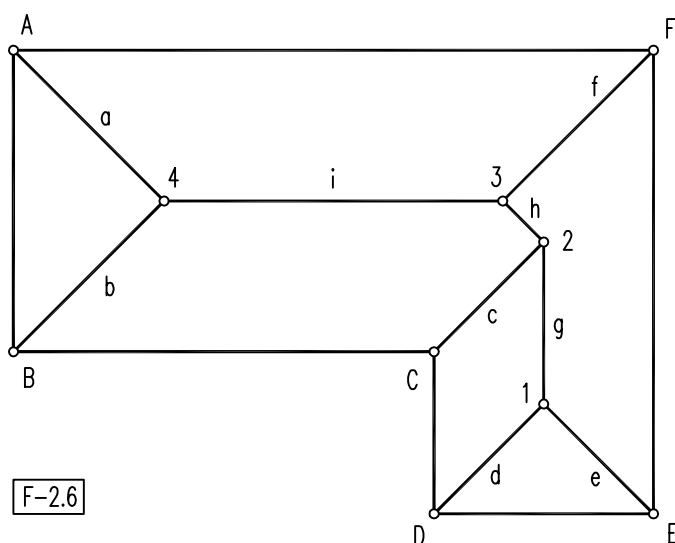
F-2.5.- Facemos de novo a pregunta clave: **A que vertentes pertence o punto 2?** O punto 2 é a intersección de **c** (intersección das vertentes de beirados **BC** e **CD**) e **g** (intersección das vertentes de beirados **CD** e **EF**). Como a vertente de beirado **CD** xa está pechada, soamente queda a intersección das vertentes de beirados **BC** e **EF**. Continuamos **BC** ate **EF** para obter o punto **G**, que é a traza da recta intersección de ámbolos dous planos. Do punto **G**, sairá a recta intersección das vertentes de beirados **BG** e **GF**; o punto 2 pertence á recta intersección polo que, unindo 2 con **G** temos esa recta. Nós vemos a recta **G2** a partir do punto 2 e a continuamos ate cortar á seguinte recta que é a recta **f** no punto 3.



F-2.5

F-2.6.- Se facemos de novo a pregunta clave ó punto 3 e repetimos o proceso dos apartados anteriores, trazaremos o cumio **i** (intersección das vertentes de trazas paralelas de beirados **BC** e **AF**) que, ao continuo cortará ás lima tesas **a** e **b** no punto de peche 4 e teremos **rematado o tellado**.

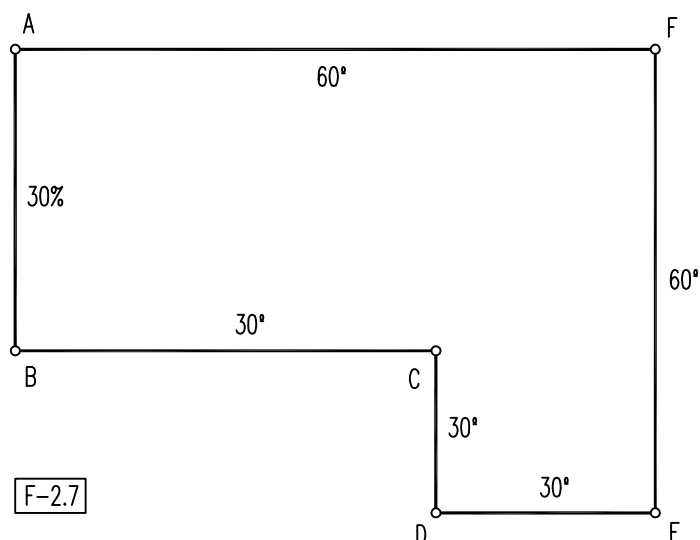
Deberemos facer o trazado con orde e pulcritude ou do contrario puidéramos encadear pequenos erros e, no punto 4, non pecharíamos o tellado.



F-2.6

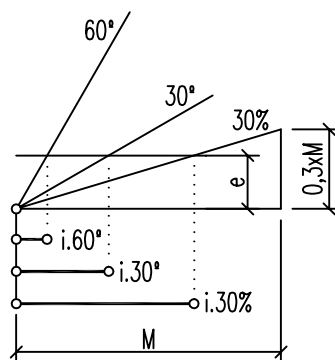
2.2.- Tellados con vertentes de distinta pendiente

F-2.7.- Temos o tellado do que coñecemos o polígono de vértices **ABCDEF**, puntos de intersección dos beirados das vertentes correspondentes. Vemos que temos tres pendentes distintas, dúas están dadas en graos e unha e tanto por cento. Non é normal que mesturemos pendentes en diferentes unidades (graos e tantos por cento) nun mesmo tellado, o facemos aquí como práctica e aprendizaxe.



F-2.7

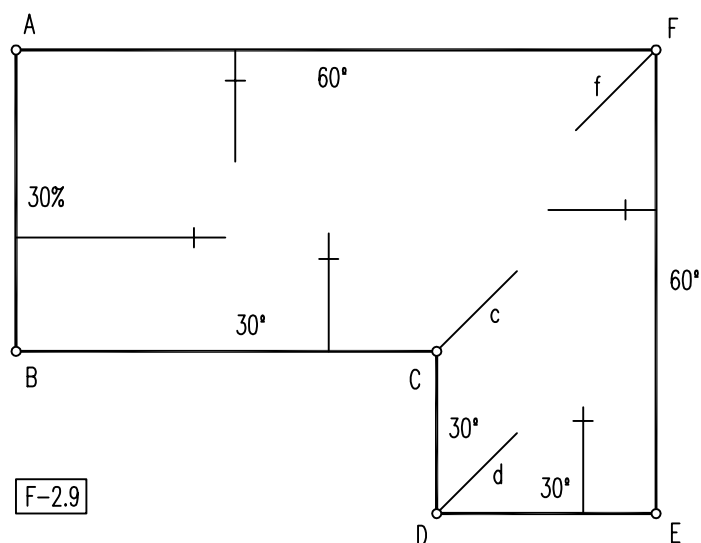
F-2.8.- Debemos obter os intervalos das tres pendentes correspondentes á mesma equidistancia. Marcamos, a partir dun mesmo punto as tres pendentes dadas, 60° , 30° e 30% . Collemos unha equidistancia axeitada para as tres pendentes e obtemos cadanseu intervalo.



F-2.8

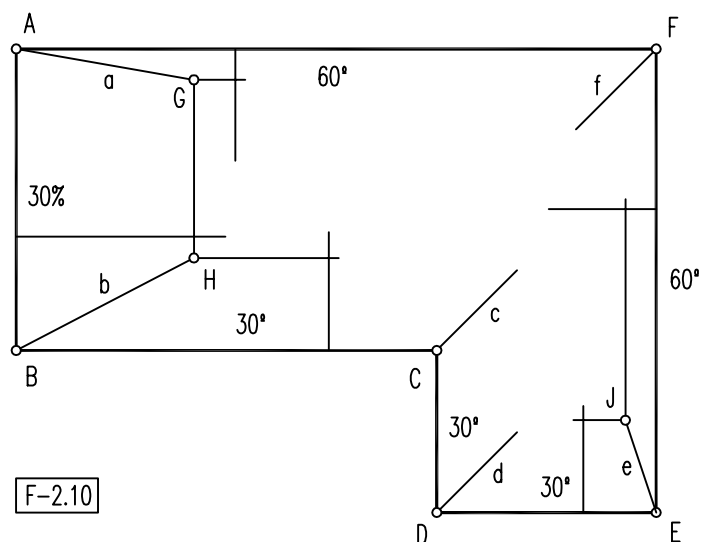
F-2.9.- Nas vertentes adxacentes que teñen a mesma pendente trazamos as bisectrices, obtendo as rectas **c**, **d** e **f**.

No resto das vertentes trazamos rectas de máxima pendente perpendiculares ós beirados ou trazas dos planos respectivos, levando cadanseu intervalo segundo a pendente correspondente.



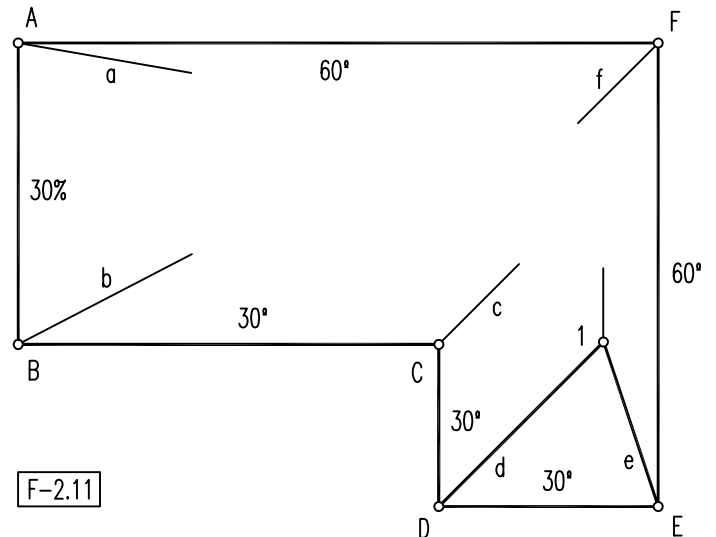
F-2.9

F-2.10.- Trazamos as rectas paralelas ós beirados na cota 1 (se fose moi pequena, podemos trazar as de cota 2 ou máis, en todas elas) e obtemos os puntos **G**, **H** e **J** que, unidos con **A**, **B** e **E** darannos as rectas **a**, **b** e **e** de intersección entre as vertentes correspondentes.



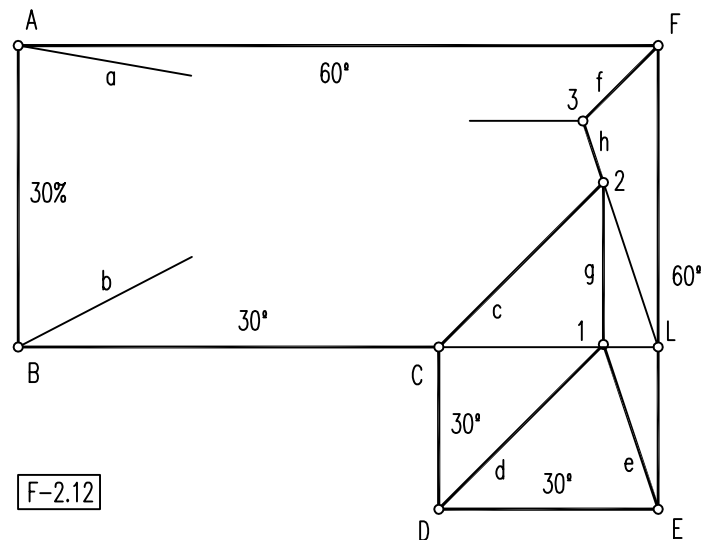
F-2.10

F-2.11.- Buscamos a vertente de inicio e, como parece evidente, obtemos o punto de intersección **1** entre **d** e **e**, que pechará a vertente **DE1**.
A partir do punto **1**, seguindo o método explicado anteriormente, sabemos que a recta do cumio será a intersección das vertentes **CD** e **EF** que son paralelas.



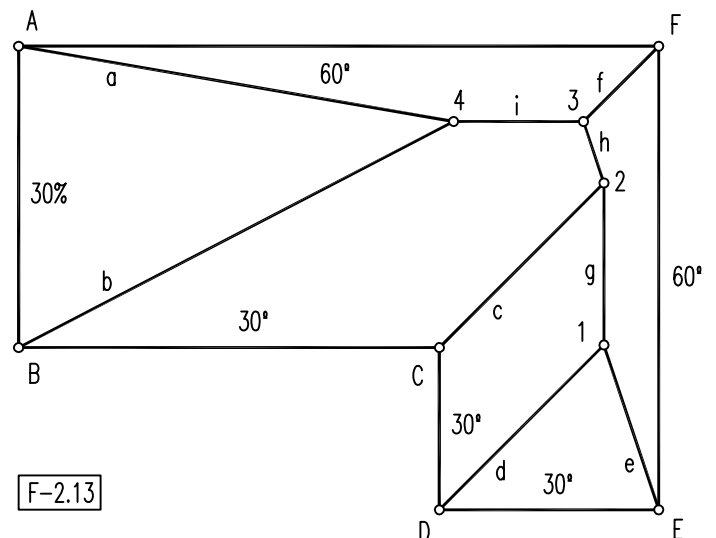
F-2.11

F-2.12.- A partir de **1** sae a recta **g** ate cortar en **2** á lima foia **c**.
A partir do punto **2** teremos a intersección das vertentes **BC** e **EF**. Continuamos **BC** e obtemos o punto **L**; o unimos con **2** formando a recta **h** que cortará á recta **f** en **3**. A partir do punto **3** temos a intersección das vertentes de trazas paralelas **AF** e **BC**.



F-2.12

F-2.13.- A partir do punto **3** sae a recta de cumio **i**, que cortará en **4** ás limas **a** e **b**, rematando o tellado.

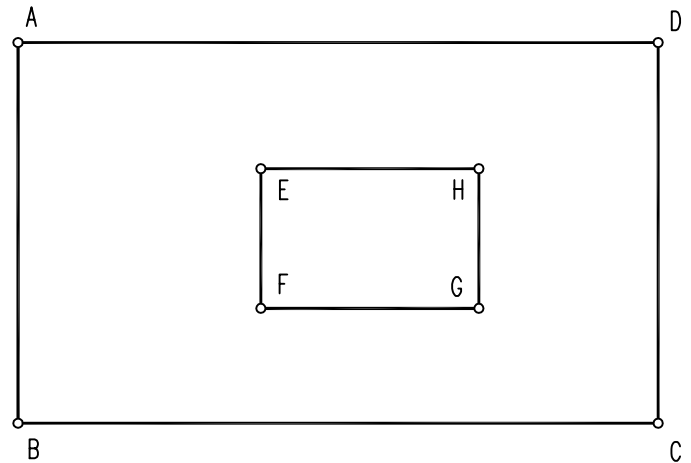


F-2.13

2.3.- Tellados con patio

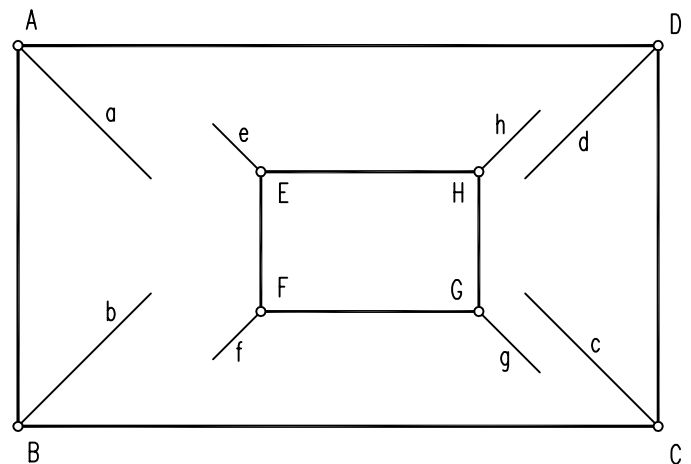
F-2.14.- É moi normal que os edificios de vivendas teñan patios de luces (e por tanto descubertos) interiores. O cálculo e debuxo de estes tellados é moi semellante ao xa vistos.

O rectángulo **ABCD** representa o perímetro exterior do edificio e, polo tanto, os beirados das vertentes do tellado cara ao exterior. O rectángulo **EFGH** é o patio interior. Supoñamos que todas as vertentes teñen a mesma pendente.



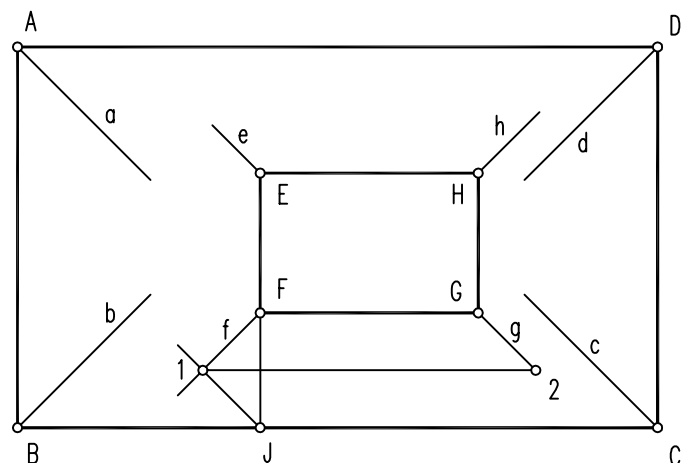
F-2.14

F-2.15.- Facemos as bisectrices dos ángulos correspondentes (tanto exteriores coma interiores) e obtemos as lima tesas **a, b, c, d** e as lima foias **e, f, g e h**.



F-2.15

F-2.16.- As vertentes **BC** e **FG** son de trazas paralelas e terán a intersección en unha paralela a elas equidistante de ámbalas dúas. Polo método xa explicado obtemos o punto **1** e, despois, o **2**.



F-2.16

3 - TERREOS

CONCEPTOS BÁSICOS

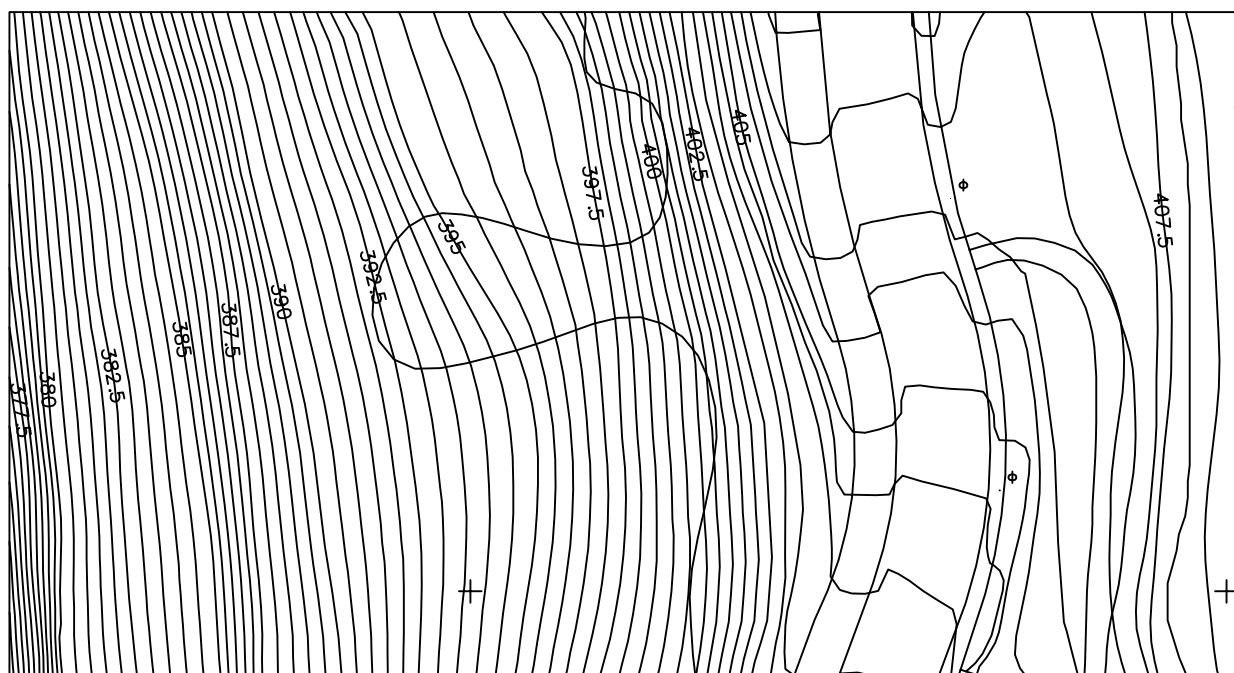
Na representación dun terreo utilízanse as **CURVAS DE NIVEL** que, como o seu nome indica, son unhas curvas pechadas obtidas pola intersección co terreo de planos horizontais situados a unha distancia determinada.

En un **PLANO TOPOGRÁFICO**, (F-2.18) no que se representa o terreo mediante curvas de nivel, utilízase (en función da escala do plano e do grao de exactitude que se requira) unha mesma **EQUIDISTANCIA** entre os planos de corte que dan as CURVAS DE NIVEL.

Cada curva ou cada determinado número de curvas (de cinco en cinco ou de dez en dez) aparece un número que indica a **ALTITUDE** con respecto ó plano de referencia, que tería a cota 0. Nos planos xerais do territorio a numeración das curvas de nivel representa a altura con respecto ó nivel do mar.

O **PERFIL** dun terreo é a sección dese terreo por un plano vertical.

As veces queremos destacar as diferenzas de pendente nun terreo, neste caso usaremos o **PERFIL PERALTADO**, onde a escala das medidas horizontais e verticais son diferentes (a escala máis pequena para as verticais).



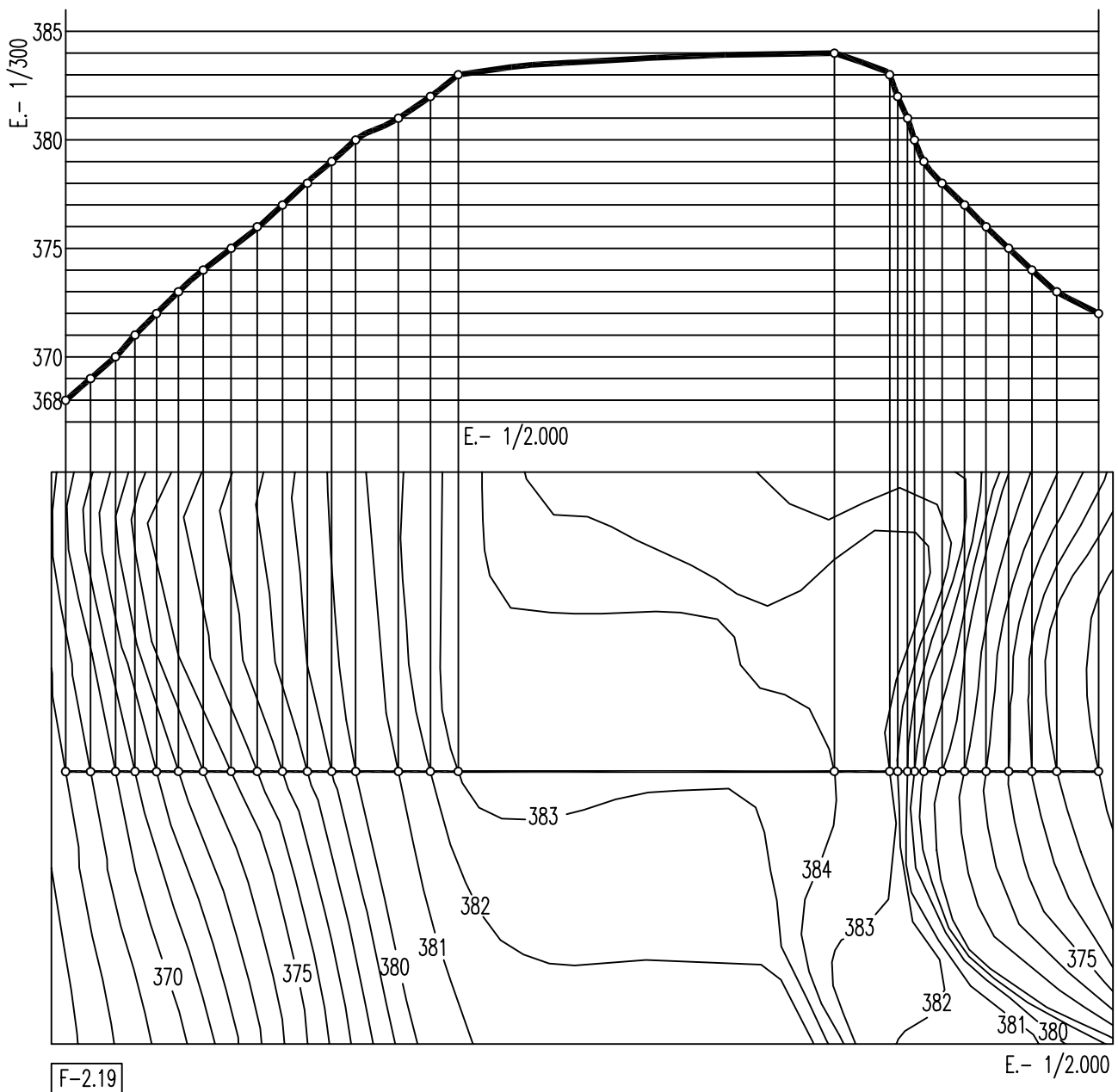
F-2.18

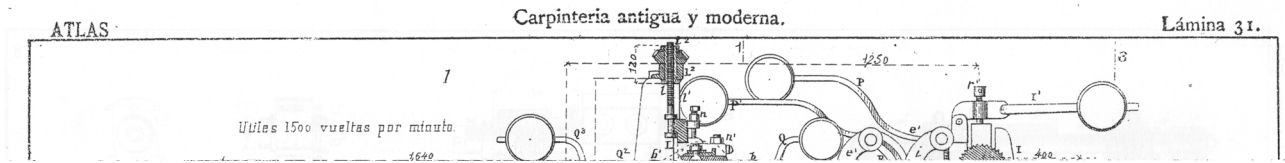
PERFÍS DE TERREOS

Para trazar o **PERFIL** dun terreo calquera (**F-2.19**) collemos un par de eixos cartesianos. No eixo de abscisas (á mesma escala que o plano topográfico do terreo) poñemos os puntos do corte que imos representar. No eixo vertical das ordenadas poñemos (á escala axeitada) as equidistancias verticais correspondentes ás curvas de nivel.

Unha vez marcados os puntos pasamos a curva a man alzada; trátase dun terreo real e non adoitan ser poligonais.

Elección da escala vertical: Non hai unha única solución. Debemos elixila en función da altura total a representar e de xeito que o debuxo final teña nin moita altura que salga do papel nin demasiado pouca que non se aprecien as diferenzas de pendente.





1 - NORMALIZACIÓN

CONCEPTOS BÁSICOS

O sistema diédrico é, de feito, a linguaxe máis internacional e naceu para comunicar ou facer entender obxectos. Para levar a bo termo isto é preciso que todos fagamos os debuxos do mesmo xeito, ou sexa, coa mesma **norma**.

A **NORMALIZACIÓN** establece solucións únicas a situacións ou actividades repetitivas.

A normalización e os organismos encargados dela teñen como finalidade a **elaboración, difusión e aplicación** das normas.

Existen todo tipo de **NORMAS, REGULAMENTOS E ESPECIFICACIÓNS** para cadansúa materia ou actividade.

Existen normas **nacionais e internacionais** (tamén autonómicas ou locais)

O organismo español encargado da elaboración da normativa no noso país é **AENOR** (Asociación Española de Normalización y Certificación) e o conxunto da normativa nacional son as normas **UNE**.

AENOR encárgase tamén de adaptar a normativa española ás directrices europeas.

Unha norma UNE ten tres tipos de documentos e fases de elaboración:

- **Proposta UNE**.- O anteproxecto de unha norma UNE. A norma durante a fase de elaboración e estudo.
- **Norma UNE**.- A norma xa rematada, publicada e de obrigado cumprimento.
- **Instrución UNE**.- Recomendacións ou aplicacións técnicas para o desenvolvemento ou complemento da norma UNE. Axuda e clarifica as dúbidas na aplicación da norma UNE.

FORMATOS

Formato: Tamaño do papel no que debuxamos.

A norma que regula os formatos é a **UNE 1026-2:1983**.

O formato de orixe é un rectángulo cuxa superficie mide **1m²** e cuxa proporción é a $\sqrt{2}$ (o rectángulo está feito co lado do cadrado e a súa diagonal). A este formato o chamamos **A0** e é o formato a partir do cal obtemos tódolos demais de tal xeito que **cada un é o dobre do inferior e a metade do superior**.

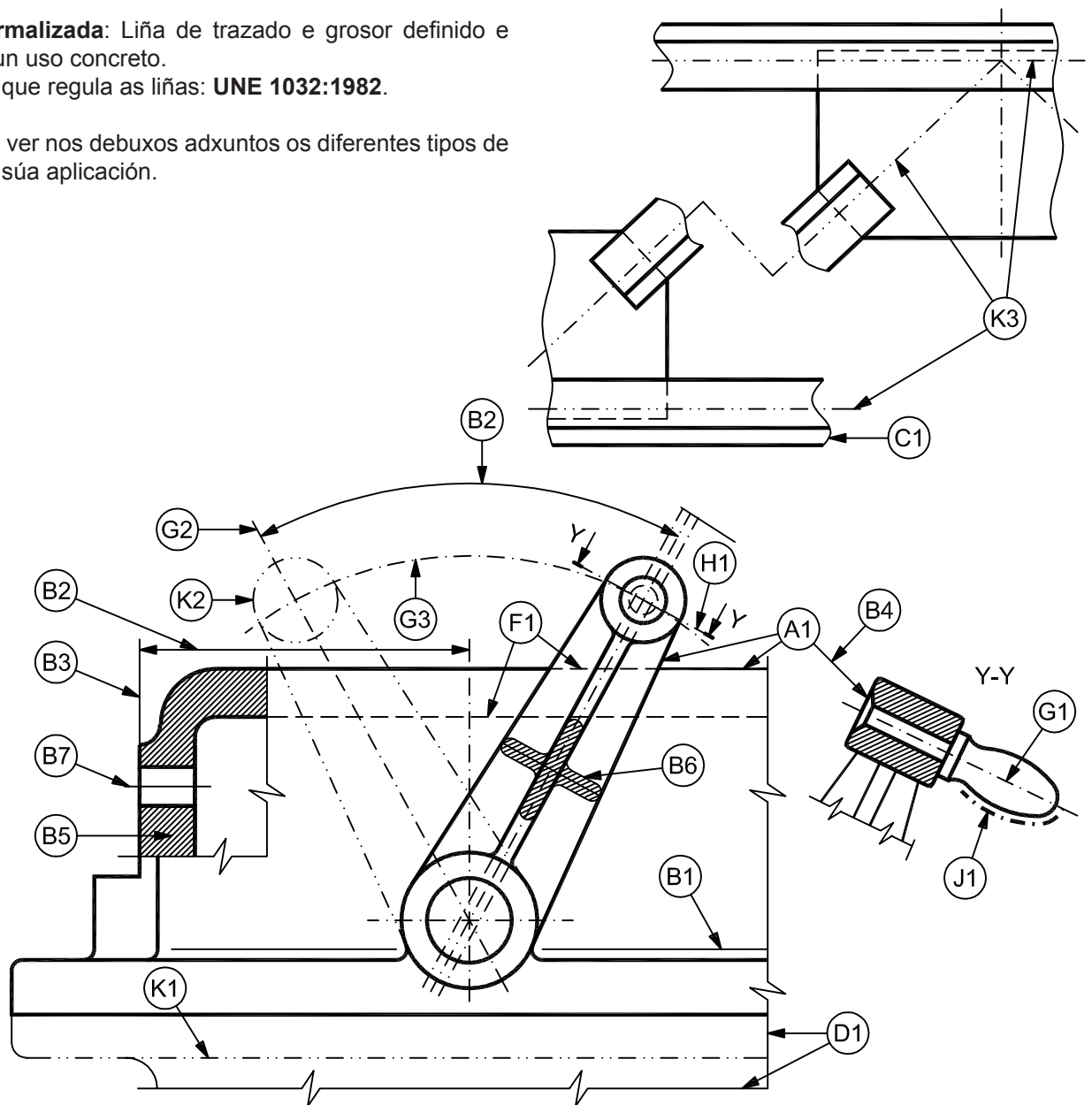
Como podes ver na **F-1.1** o formato **A0** o podemos dividir en **2** formatos **A1** ou en **4** formatos **A2** ou en **8** formatos **A3** e así sucesivamente.

LIÑAS NORMALIZADAS

Liña normalizada: Liña de trazado e grosor definido e que ten un uso concreto.

A norma que regula as liñas: **UNE 1032:1982.**

Podedes ver nos debuxos adxuntos os diferentes tipos de liñas e a súa aplicación.



A —————	A1 CONTORNOS VISTOS A2 ARESTAS VISTAS	F —————	F1 CONTORNOS OCULTOS F2 ARESTAS OCULTAS
B —————	B1 LIÑAS FICTICIAS VISTAS B2 LIÑAS DE COTA B3 LIÑAS DE PROYECCIÓN B4 LIÑAS DE REFERENCIA B5 RAIADOS B6 CONTORNOS DE SECCIÓN ABATIDAS B7 EIXOS CORTOS	G —————	G1 EIXOS DE REVOLUCIÓN G2 TRAZAS DE PLANO DE SIMETRÍA G3 TRAXECTORIAS
C ~~~~~	C1 LÍMITES DE VISTAS OU CORTES PARCIAIS	H —————	H1 TRAZAS DE PLANO DE CORTE
D ————	D1 LÍMITES DE VISTAS OU CORTES PARCIAIS	J - - - - -	J1 TRATAMENTOS SUPERFICIAIS
E - - - - -	E1 CONTORNOS OCULTOS E2 ARESTAS OCULTAS	K —————	K1 CONTORNO DE PEZAS ADXACENTES K2 POSICIÓN INTERMEDIAS OU EXTREMAS DE PEZAS MÓVILES K3 LIÑAS DE CENTROS OU EIXOS DE GRAVIDADE K4 CONTORNOS INICIAIS ANTES DO CONFORMADO K5 PARTES SITUADAS POR DIANTE DO PLANO DE CORTE

0 BOSQUEJO ACOUTADO

Antes de facer os planos definitivos dunha peza ou para traballar sobre unha xa existente, as veces, é conveniente facer antes un **bosquexo acoutado**.

Un **bosquexo** é unha **representación diédrica con vistas feita a man alzada**. As vistas serán iguais e terán a mesma definición que no plano definitivo. Para a anotación usaranse tamén os mesmos criterios e normas que no plano de cotas final, coa salvidade de que están feitas a man alzada.

PROCESO DO BOSQUEJO ACOUTADO:

Primeiro estudamos a peza a representar e decidimos as vistas (partindo do alzado frontal) necesarias e a súa disposición. Deberemos ter en conta o espazo entre vistas para que entren ben as cotas.

F-1.2.- Debuxamos os rectángulos nos que estarán inscritas as vistas. De momento (isto pódese simplificar coa práctica) traballamos a lapis, o que nos permite correccións. Un bosquejo non é un debuxo feito con medidas e a escala pero si debemos manter as proporcións.

F-1.3.- Trazamos os eixos de simetría, eixos secundarios e proporcións dos elementos principais de cada vista. Seguimos debuxando co lapis.

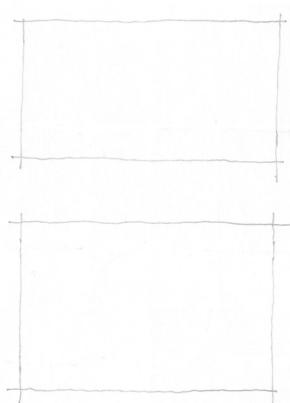
F-1.4.- Rematamos os detalles de cada vista.

F-1.5.- Xa podemos debuxar a tinta as vistas con tódalas liñas definitivas e co tipo de liña axeitado a cada caso (liñas continuas, a trazos, trazo e punto, etc.). Tamén faremos os tratamentos necesarios como é o raiado das partes seccionadas.

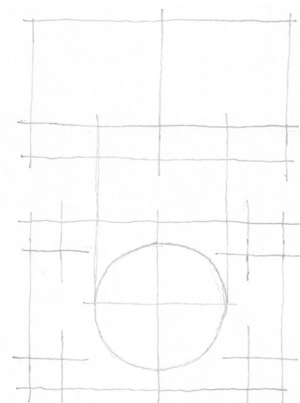
F-1.6.- Estudamos (outra vez a lapis) as cotas que debemos poñer e ónde irán colocadas. Debuxamos soamente as liñas de cota, sen medidas.

F-1.7.- Pasamos a tinta as liñas de cota.

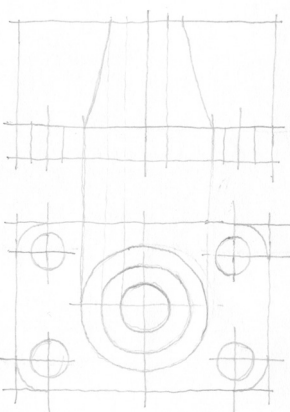
F-1.8.- Rematamos o bosquejo acoutado poñendo os números das cotas (debemos usar tódolos símbolos de anotación precisos). Non debemos esquecer poñer a lenda das unidades nas que están postas as cotas.



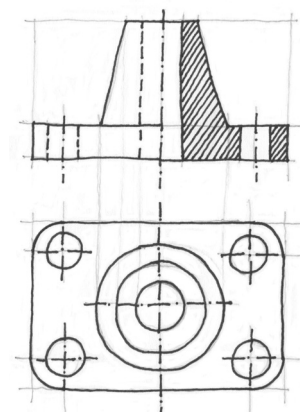
F-1.2



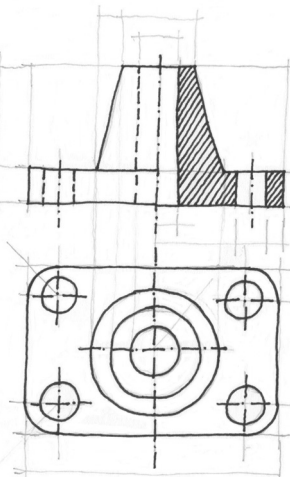
F-1.3



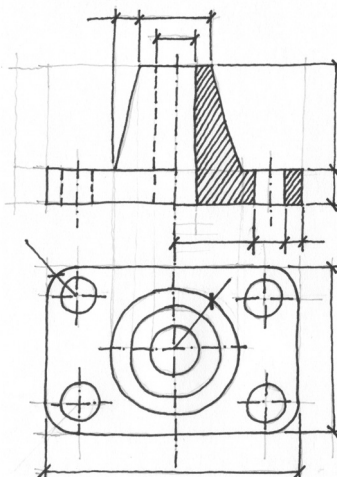
F-1.4



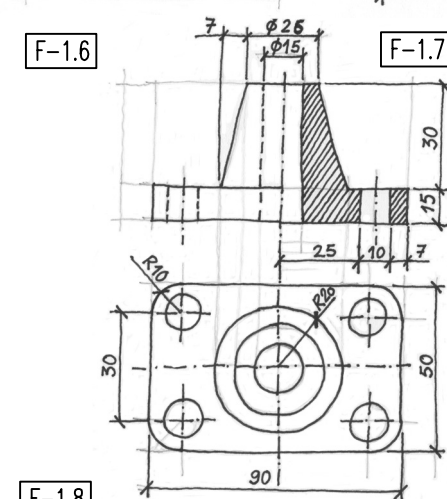
F-1.5



F-1.6



F-1.7



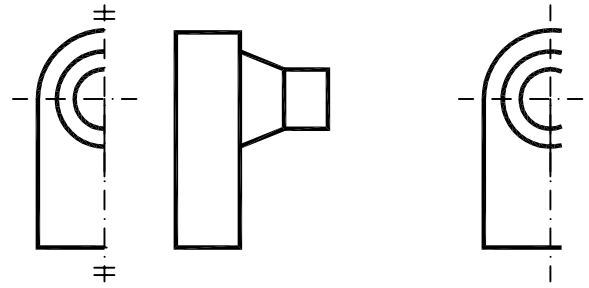
F-1.8

MEDIDAS EN MM

CORTES E SECCIONS

1.1.- Representación de pezas simétricas - F-1.9

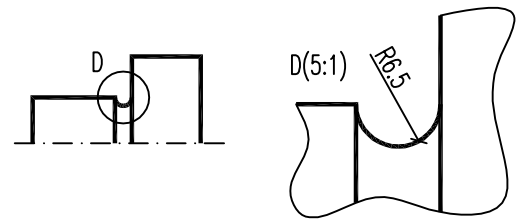
Podemos debuxar soamente a metade da peza ate o plano de simetría. Representamos a simetría con dous trazos paralelos perpendiculares ó eixo nos extremos. Tamén podemos prolongar as liñas un pouco máis aló do eixo de simetría en lugar dos trazos.



F-1.9

1.2.- Vistas parciais ou de detalle - F-1.10

Cando nun debuxo temos un elemento pequeno ou difícil de acoutar podemos facer un detalle parcial do mesmo. O sinalaremos, no debuxo principal mediante un círculo ou cadrado nomeado cunha letra maiúscula. No debuxo do detalle poñeremos a mesma letra e , entre paréntese, a escala de ampliación. O borde exterior do detalle o marcaremos mediante unha liña normalizada tipo C1 (continua fina a man alzada) ou D1 (continua fina con trazos en zigzag).

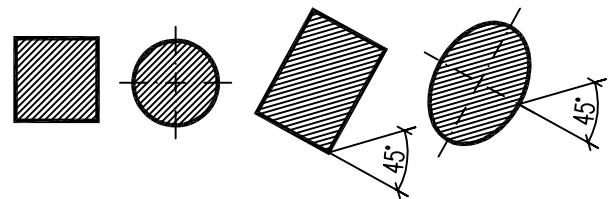


F-1.10

1.3.- Raiados

Xeneralidades do raiado – F-1.11

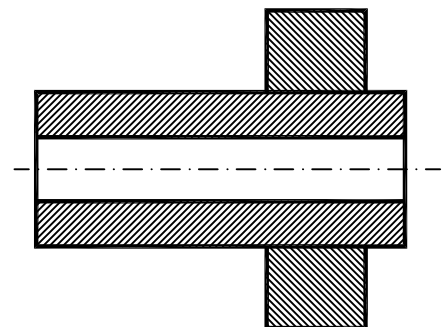
Un raiado de corte ou sección o representaremos mediante liñas finas paralelas á mesma distancia e formando un ángulo de 45° con respecto os bordes principais ou eixos de simetría da vista.



F-1.11

Raiado de pezas xustapostas – F-1.12

Cando temos diferentes pezas xustapostas no mesmo corte ou sección as diferenciaremos poñendo en cada unha un ángulo diferente de raiado ou poñendo as liñas de raiado a distinta separación (adoita quedar mellor o primeiro criterio)



F-1.12

Raiado de grandes superficies – F-1.13

Cando temos que raiar unha superficie grande podemos limita-lo raiado a unha franxa do borde.



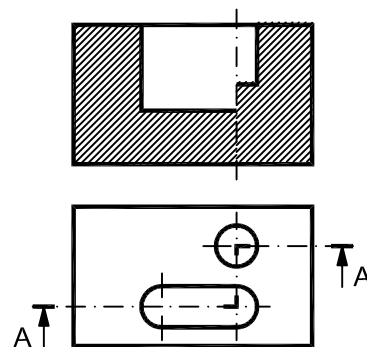
F-1.13

Raiado de cortes por planos paralelos

F-1.14

Nas pezas cortadas por planos paralelos empregaremos o mesmo raiado para tódolos planos, podendo desprazar o raiado na liña de división entre un corte e outro.

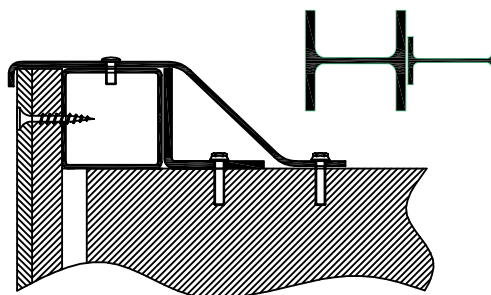
F-1.14



Raiado de pezas delgadas - F-1.15

Nas superficies delgadas seccionadas non raiamos senón que as enchemos de negro. Se temos varias pezas contiguas as separamos un mínimo de 0,7mm.

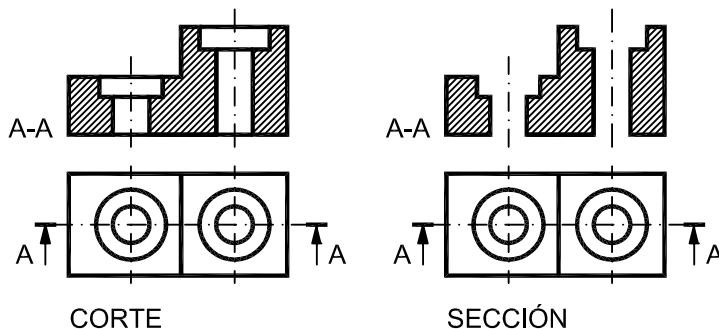
F-1.15



1.4.- Diferencia entre corte e sección - F-1.16

Un **CORTE** é o alzado (ou planta) do elemento seccionado, representando tódalas liñas que vemos e a parte do corte, raiada.

En unha **SECCIÓN** representamos unicamente a parte da intersección entre o plano de corte e a peza.



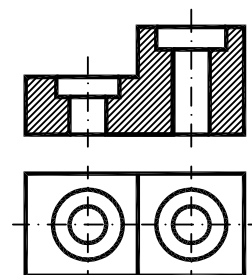
F-1.16

1.5.- Tipos de CORTE

Corte por un plano - F-1.17

Cando cortamos a peza completa por un plano. Se é evidente a colocación do plano de corte non o indicamos.

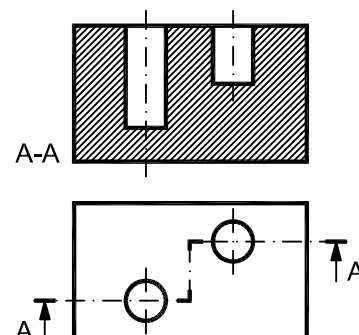
F-1.17



Corte por planos paralelos - F-1.18

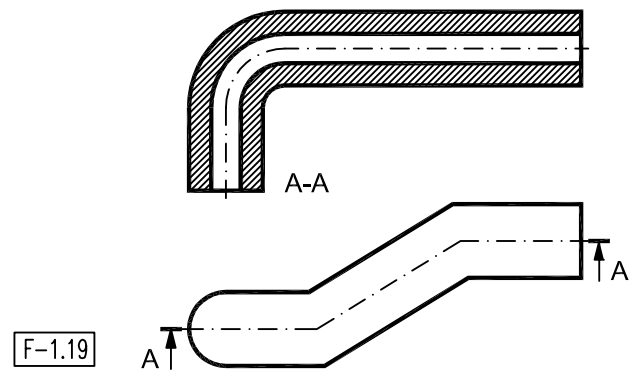
Cando cortamos unha peza por planos paralelos podemos encadear estes (marcando os cambios de dirección mediante liñas grosas) e aforrar así un dos planos.

F-1.18



Corte por planos sucesivos - F-1.19

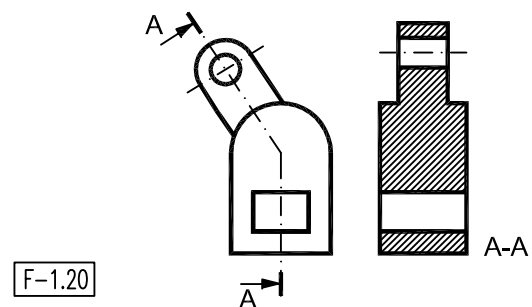
Os planos de corte non son ortogonais pero os representamos coma se foran continuos. Non debemos tomar medidas na vista do corte pois **non está en verdadeira magnitude**.



F-1.19

Corte por planos concorrentes - F-1.20

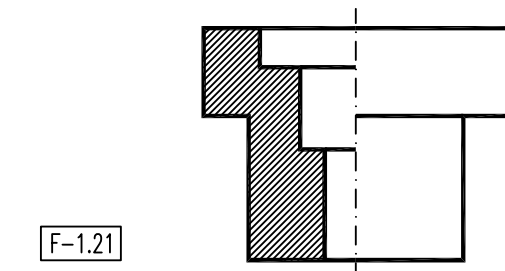
Utilizamos este corte cando os planos concorren no centro ou eixo da peza formando un ángulo diferente de 90°. Un dos planos o representamos abatido. Temos as medidas en verdadeira magnitude en cada un dos planos.



F-1.20

Medio corte - F-1.21

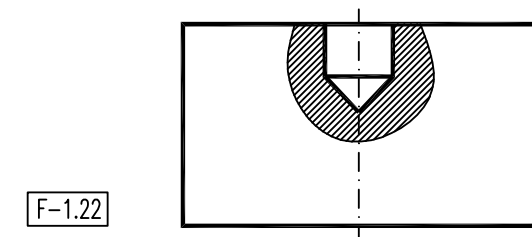
En pezas simétricas representamos unha metade cortada e a outra non. **Na parte non cortada non representamos as arestas ocultas**. Serve para aforrar unha vista.



F-1.21

Corte parcial - F-1.22

Utilizamos este corte cando se refire a unha parte pequena da peza. O borde exterior do detalle o marcamos mediante unha liña normalizada tipo C1 (continua fina a man alzada) ou D1 (continua fina con trazos en zigzag).

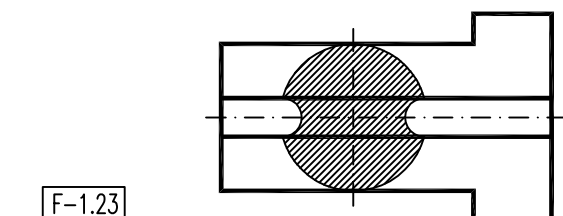


F-1.22

1.6.- Tipos de SECCIÓN

Sección abatida - F-1.23

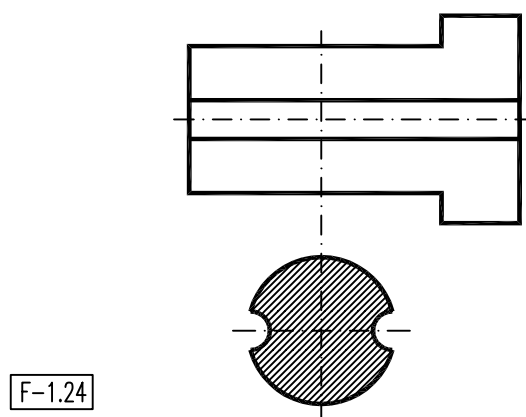
A debuxamos con liña continua fina e a situamos alí onde se produce; non precisa ningunha outra indicación.



F-1.23

Sección abatida e desprazada - F-1.24

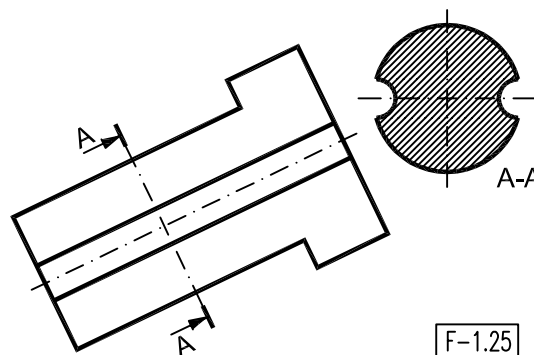
A debuxamos con liña grosa e quedará unida ó plano de corte por medio dunha liña de trazo e punto.



F-1.24

Sección desprazada nunha posición calquera - F-1.25

En este caso indicamos e nomeamos o plano de corte e a sección de xeito tradicional.



F-1.25

2 - ANOTACIÓN

CONCEPTOS BÁSICOS

Acoutar é poñer cotas, ou sexa **poñer no debuxo as medidas necesarias para poder entender e fabricar a peza ou obxecto acoutado con total fidelidade.**

A norma que regula a anotación é a **UNE 1039-75**. Aquí recolleemos o máis salientable dela.

2.1.- Principios de anotación

- 1.- Os debuxos acoutaranse segundo a súa función ou fabricación.
- 2.- Deberán figurar tódalas cotas necesarias para a súa fabricación exacta.
- 3.- Non se repetirá unha cota (agás que sexa indispensable facelo).
- 4.- Unha cota funcional (fundamental para a definición, comprensión ou fabricación da peza) deberá aparecer sempre, sen que sexa admisible por dedución doutras (sumas ou restas) nin por aplicación da escala.
- 5.- Cada cota a poñeremos na vista que mellor defina o elemento correspondente.
- 6.- Tódalas cotas estarán na mesma unidade. Se, excepcionalmente, necesitamos poñer algunha en outra unidade a faremos constar a continuación da cota.
- 7.- Só se poñerán as cotas necesarias.

ELEMENTOS DE ANOTACIÓN

2.2.- Definicións - F-1.26/27

Liña auxiliar de cota.- Son as que delimitan as liñas de cota. Parten dos contornos dos elementos a acoutar. Liña continua fina.

Liña de cota.- Sobre elas van as cotas. Póñense paralelas ó elemento a acoutar. Liña continua fina.

Extremo da liña de cota.- O que remata a liña de cota polos extremos. Poden ser frechas, trazos, puntos ou círculos (indicación da orixe).

Cota.- É o número que indica a cota ou medida. Vai enriba da liña de cota (preferentemente).

Liñas de referencia (F-1.26).- Son as que serven para facer outras indicacións complementarias das cotas; debuxaranse con **liña fina rematada en:**

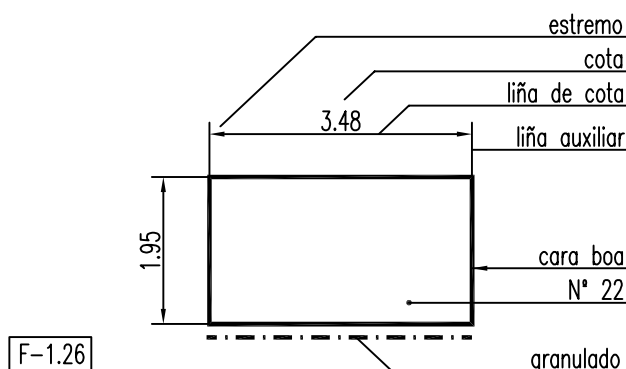
Frecha.- Cando acaba nun contorno ou liña principal da vista.

Punto.- Cando acaba no interior da peza.

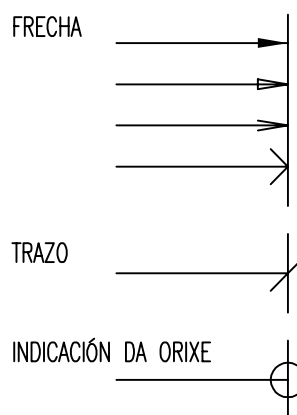
Nada.- Cando acaba en unha liña diferente do contorno da vista.

Tipos e tamaños dos extremos (F-1.27)

Temos diferentes extremos. O máis usado é o primeiro, a frecha negra. **En debuxos de arquitectura e construción en xeral úsase o trazo.**



F-1.26

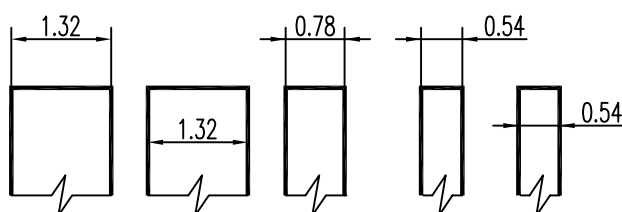


F-1.27

2.3.- Liñas de cota

Colócanse paralelamente á aresta ou dimensión a acoutar. Van rematadas en frechas ou trazos pola parte interior dos extremos coas excepcións indicadas na **F-1.28**:

- Cando non entran a cota e os extremos, a cota queda dentro e os extremos débúxanse por fora.
- Cando non entran nin a cota ni os extremos débúxanse todos por fora.

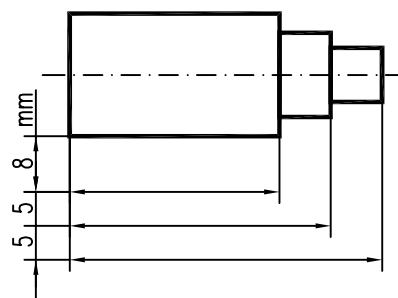


F-1.28

As liñas de cota non se cortarán entre elas nin con outras liñas do debuxo (agás que non quede outra opción).

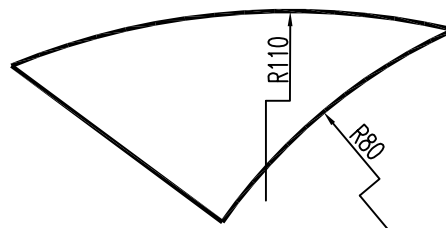
A primeira liña de anotación (**F-1.29**) estará, como mínimo, a **8mm** do contorno da vista e as seguintes a **5mm** como mínimo.

F-1.29



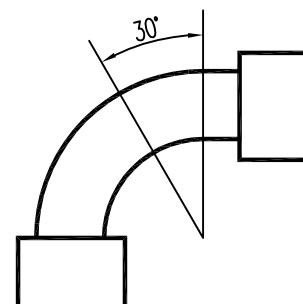
Cando o centro do radio cae fora dos límites do debuxo (**F-1.30**) a liña de cota do mesmo debuxarase quebrada.

F-1.30



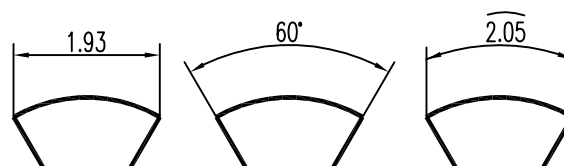
Na medida do posible evitarase a colocación de cotas nun ángulo de 30° na posición que indica **F-1.31**.

F-1.31



As **cordas**, **ángulos** e **arcos** acoutaranse tal e como se indica na **F-1.32**.

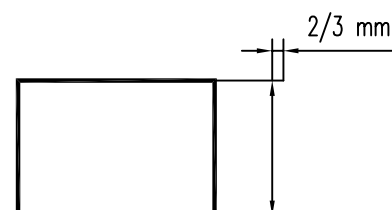
F-1.32



2.4.- Liñas auxiliares de cota

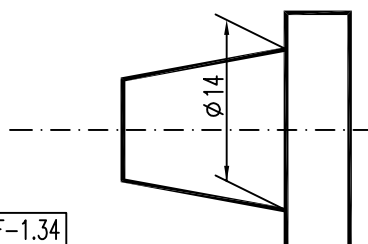
Nacen nas liñas principais da vista e exceden ás liñas de cota en 2 ou 3 mm (**F-1.33**).

F-1.33



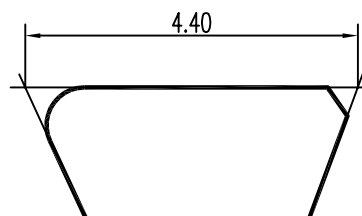
Sempre serán perpendiculares ás liñas de cota pero, as veces, poden formar 60° con elas para manter centrado o número de cota (**F-1.34**).

F-1.34



Cando acoutemos **chafráns** ou **esquinas redondeadas**, as liñas auxiliares rematarán na intersección das liñas principais das vistas (prolongadas con liña fina e pasando un pouco a intersección). (F-1.35).

F-1.35



2.5.- Extremos das liñas de cota

As liñas de cota terminaranse en frechas ou trazos e, no caso de cotas superpostas, indicando a orixe segundo F-1.27.

As **frechas** debuxaranse con trazos curtos, formando un ángulo entre 15° e 90°. Poden ser cheas e pechadas, pechadas ou abertas.

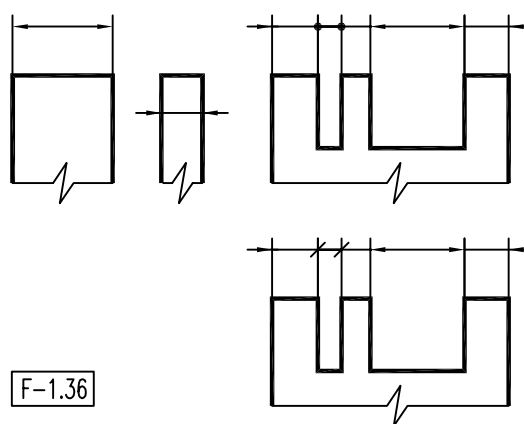
Os **trazos** serán oblicuos, de trazo curto e formarán 45° coa liña de cota.

A **indicación de orixe** a representaremos cun círculo de uns 3mm de diámetro aproximadamente.

A lonxitude do trazo ou da frecha será proporcional ó debuxo e do mesmo tamaño en todo el.

As **frechas** ou **trazos** debuxaranse dentro dos límites das liñas de cota. Se non queda espazo entre as liñas auxiliares para debuxar os extremos e a cota, debuxaranse aqueles por fora, prolongando un pouco a liña de cota. Se tampouco quedara espazo exteriormente substituiremos as frechas por un punto ou un trazo (F-1.36).

F-1.36

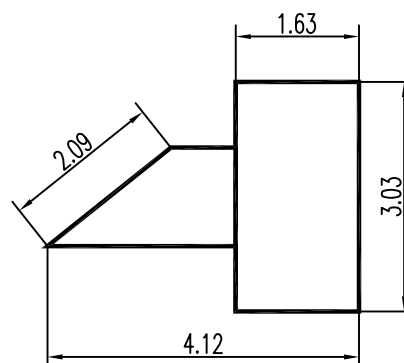


2.6.- Números de cota

Rotularanse en letra cursiva ou normal, sempre coas mesmas unidades. No **debuxo industrial** as cotas pónense en **mm**; en outro caso indicárase a unidade (cotas en cm...).

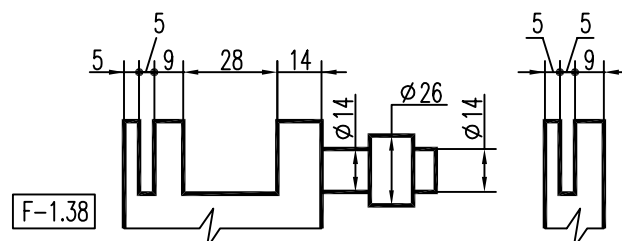
Os números de cota poñeranse (preferentemente) **por riba da liña de cota, centrados** nela e de xeito que se lean **dende abaixo** ou **dende a dereita** (F-1.37).

F-1.37



Cando os números de cota non entren nin sobre nin por fora da liña de cota, indicáranse mediante unha liña de referencia moi curta que remate no número ou cun pequeno acaneo sobre o que irá o número de cota (F-1.38).

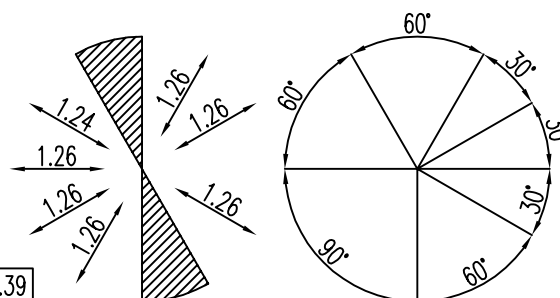
F-1.38



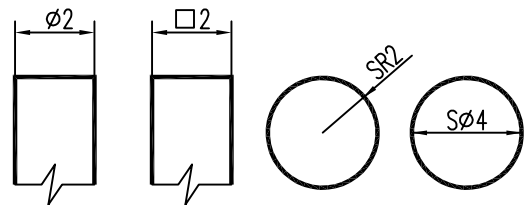
Evitarase, no posible, poñer cotas no ángulo de 30° indicado na F-1.39. Se non o podemos evitar poñeremos a cota para lela dende a esquerda.

A anotación de ángulos farase segundo o indicado na F-1.39.

F-1.39



Usaremos **símbolos** que faciliten ou simplifiquen a anotación. Os máis salientables son os indicados na **F-1.40**.



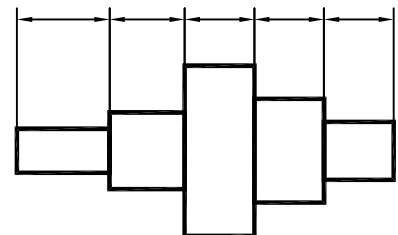
F-1.40

DIÁMETRO	ø
RADIO	R
DIÁMETRO DE ESFERA	Sø
RADIO DE ESFERA	SR
CADRADO	□

TIPOS DE ANOTACIÓN

2.7.- Anotación en serie - F-1.41

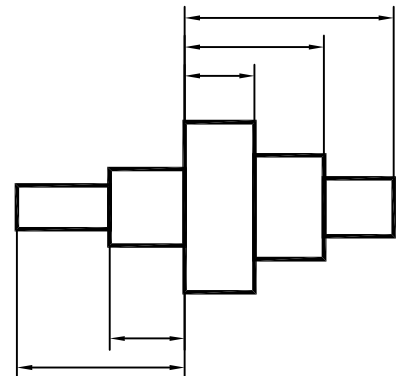
Cada cota empieza onde acaba a anterior. Debemos ter coidado no uso deste sistema pois, se temos un erro na primeira cota, o arrastraremos nas seguintes.



F-1.41

2.8.- Anotación en paralelo - F-1.42

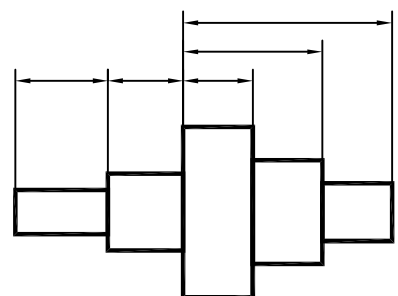
Tódalas cotas parten do mesmo plano (normalmente o de inicio da execución da peza) e son independentes unhas doutras polo que é un sistema máis seguro que o da anotación en serie no tocante os posibles erros.



F-1.42

2.9.- Anotación combinada - F-1.43

É unha mestura dos dous anteriores e adoita ser o máis usado en pezas complexas.

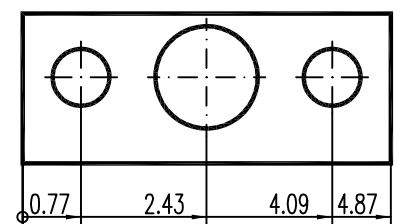


F-1.43

2.10.- Anotación progresiva - F-1.44

Tamén coñecido como **anotación por cotas superpostas**. **Usase cando hai falta de espazo**. Non ten risco de confusión pois mantén a independencia de medidas do sistema paralelo pero ocupa pouco sitio coma o sistema en serie.

Poñemos o **círculo de orixe de anotación** e soamente a frecha ou o trazo da dereita. Os números de cota van a carón do extremo da liña de cota respectiva e **están tomadas dende a orixe de anotación**.



F-1.44

2.11.- Anotación por coordenadas - F-1.45

É moi axeitado para acoutar moitos furados en pranchas grandes.

Marcamos a **orixe de anotación** e os eixos de coordenadas **X** e **Y**. As cotas e o diámetro dos furados irán en unha **táboa anexa** o debuxo.

	X	Y	∅
1			
2			
3			
4			

F-1.45

