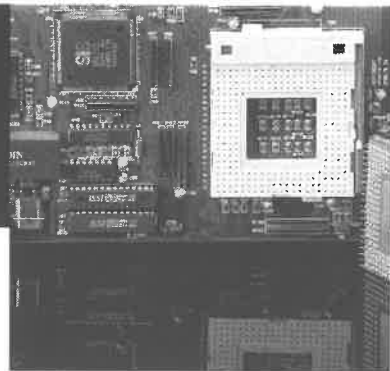




1. Forma binómica do número complexo

Pensa e calcula

Atopa mentalmente cantas solucións teñen as seguintes ecuacións no conxunto dos números reais.

a) $x^2 - 25 = 0$

b) $x^2 + 9 = 0$

Solución:

a) Ten dúas solucións: 5 e -5

b) Non ten solución real.

Aplica a teoría

1. Completa con xes as casas ás que pertencen os números seguintes:

Números	N	Z	Q	R	C
$3/4$			×	×	×
$2 + 5i$					
-4					
π					
$\sqrt{5}$					
23					

Solución:

Números	N	Z	Q	R	C
$3/4$			×	×	×
$2 + 5i$					×
-4		×	×	×	×
π				×	×
$\sqrt{5}$				×	×
23	×	×	×	×	×

2. Escribe cinco números complexos que non sexan reais.

Solución:

$2 + 3i, 5i, \sqrt{-4}, 3 - 4i, \sqrt[4]{-7}$

3. Escribe cinco números imaxinarios puros.

Solución:

$i, 3i, -3i, 5i, -5i$

4. Atopa mentalmente as seguintes raíces:

a) $\sqrt{16}$

b) $\sqrt{-25}$

Solución:

a) ± 4

b) $\pm 5i$

5. Calcula mentalmente x e y para que os seguintes números complexos sexan iguais:

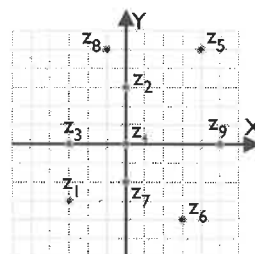
$$z_1 = x - 4i$$

$$z_2 = -3 - yi$$

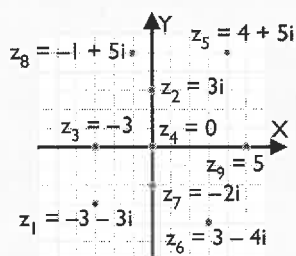
Solución:

$$x = -3, y = 4$$

6. Atopa os números complexos representados no seguinte plano de Gauss polos seus afixos:



Solución:

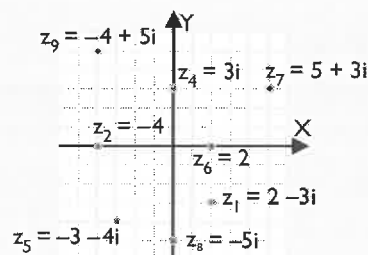


$$\begin{aligned} z_1 &= -3 - 3i & z_2 &= 3i \\ z_3 &= -3 & z_4 &= 0 \\ z_5 &= 4 + 5i & z_6 &= 3 - 4i \\ z_7 &= -2i & z_8 &= -1 + 5i \\ z_9 &= 5 \end{aligned}$$

7. Representa os afixos dos seguintes números complexos no plano de Gauss.

- | | |
|--------------------|----------------|
| a) $z_1 = 2 - 3i$ | b) $z_2 = -4$ |
| c) $z_3 = -4 + 5i$ | d) $z_4 = 3i$ |
| e) $z_5 = -3 - 4i$ | f) $z_6 = 2$ |
| g) $z_7 = 5 + 3i$ | h) $z_8 = -5i$ |

Solución:

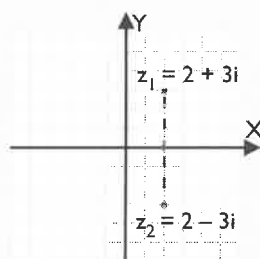


2. Operacións en forma binómica

■ Pensa e calcula

As raíces da ecuación de 2º grao $x^2 - 4x + 13 = 0$ son $x_1 = 2 + 3i$, $x_2 = 2 - 3i$. Representaas no plano de Gauss. Respecto de que recta son simétricas?

Solución:



Son simétricas respecto do eixe de abscisas, X.

● Aplica a teoría

8. Sexan: $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -2 + 5i$

Calcula:

- | | |
|------------------|-------------------|
| a) $z_1 + z_2$ | b) $z_1 - z_2$ |
| c) $2z_1 - 5z_2$ | d) $-3z_1 + 4z_2$ |

Solución:

- | | |
|---------------|----------------|
| a) $1 + i$ | b) $5 - 9i$ |
| c) $16 - 33i$ | d) $-17 + 32i$ |

9. Sexan: $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 4 - 2i$, $z_3 = -1 + 6i$

Calcula:

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $z_1 \cdot z_2$ | b) $z_1 \cdot z_3$ | c) $z_2 \cdot z_3$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|

Solución:

- | |
|----------------|
| a) $22 + 14i$ |
| b) $-33 + 13i$ |
| c) $8 + 26i$ |

10. Calcula:

- a) $(3 + 2i)^2$ b) $(-4 + 7i)^2$
c) $(2 - i)^2$ d) $(1 + i)^2$

Solución:

- a) $5 + 12i$ b) $-33 - 56i$
c) $3 - 4i$ d) $2i$

11. Sexa $z = 4 - 3i$. Calcula:

- a) O oposto de z . b) O conxugado de z .
c) O inverso de z . d) O produto $z \cdot \bar{z}$.

Solución:

- a) $-z = -4 + 3i$ b) $\bar{z} = 4 + 3i$
c) $z^{-1} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$ d) $z \cdot \bar{z} = 25$

12. Sexa: $z_1 = 2 + 6i$, $z_2 = 3 - i$ e $z_3 = -4 + 5i$

Calcula:

- a) z_1/z_2 b) z_1/z_3 c) z_2/z_3

Solución:

- a) $2i$ b) $\frac{22}{41} - \frac{34}{41}i$ c) $-\frac{17}{41} - \frac{11}{41}i$

13. Calcula as seguintes potencias:

- a) i^{259} b) i^{342} c) i^{372} d) i^{109}

Solución:

- a) $-i$ b) -1 c) 1 d) i

14. Dado o número complexo $z = 3 + 5i$, calcula:

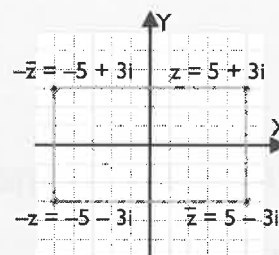
$$z \cdot \bar{z} \cdot z^{-1}$$

Solución:

$$3 - 5i$$

15. Debuxa un rectángulo de centro a orixe de coordenadas e lados paralelos aos eixes, sabendo que un dos vértices é o afixo do número complexo $z = 5 + 3i$. Atopa as coordenadas dos outros tres vértices en función do oposto e/ou do conxugado de z .

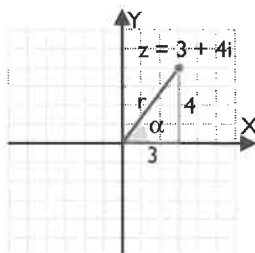
Solución:



3. Forma polar do número complexo

■ Pensa e calcula

Dado o número complexo $z = 3 + 4i$, atopa mentalmente a lonxitude da hipotenusa, r , do triángulo rectángulo seguinte, a tanxente do ángulo α e, utilizando a calculadora, o ángulo α .



Solución:

$$r = 5 \quad \tan \alpha = 4/3 \Rightarrow \alpha = 53^\circ 7' 48''$$

Aplica a teoría

16. Calcula mentalmente o módulo e o argumento dos seguintes números complexos e pásaos a forma polar.

- a) $z_1 = 5i$
- b) $z_2 = -6$
- c) $z_3 = -3i$
- d) $z_4 = 4$

Solución:

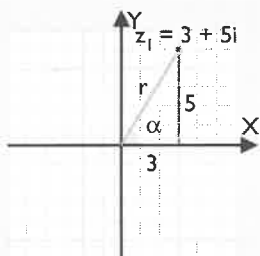
- a) 5_{90°
- b) 6_{180°
- c) 3_{270°
- d) 4_{0°

17. Representa no plano de Gauss os números complexos que aparecen a continuación e pásaos a forma polar e trigonométrica.

- a) $z_1 = 3 + 5i$
- b) $z_2 = -4 - 6i$
- c) $z_3 = -3 + 2i$
- d) $z_4 = 2 - 5i$

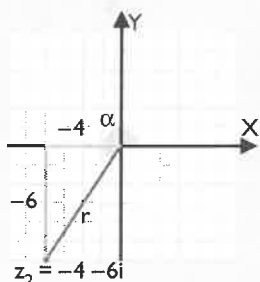
Solución:

a)



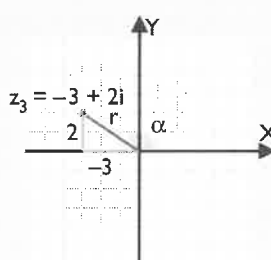
$$z_1 = (\sqrt{34})_{59^\circ 2' 10''} = \sqrt{34}(\cos 59^\circ 2' 10'' + i \sin 59^\circ 2' 10'')$$

b)



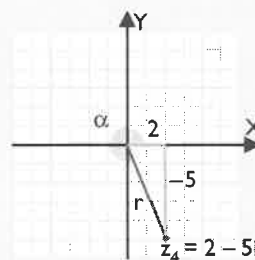
$$z_2 = (2\sqrt{13})_{236^\circ 18' 36''} = 2\sqrt{13}(\cos 236^\circ 18' 36'' + i \sin 236^\circ 18' 36'')$$

c)



$$z_3 = (\sqrt{13})_{146^\circ 18' 36''} = \sqrt{13}(\cos 146^\circ 18' 36'' + i \sin 146^\circ 18' 36'')$$

d)



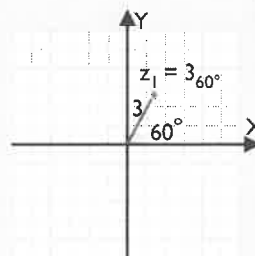
$$z_4 = (\sqrt{29})_{291^\circ 48' 5''} = \sqrt{29}(\cos 291^\circ 48' 5'' + i \sin 291^\circ 48' 5'')$$

18. Representa no plano de Gauss os números complexos que aparecen a continuación e pásaos a forma trigonométrica e binómica.

- a) $z_1 = 3_{60^\circ}$
- b) $z_2 = 4_{225^\circ}$
- c) $z_3 = 5_{330^\circ}$
- d) $z_4 = 6_{150^\circ}$

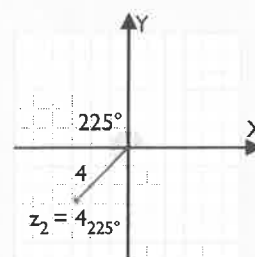
Solución:

a)



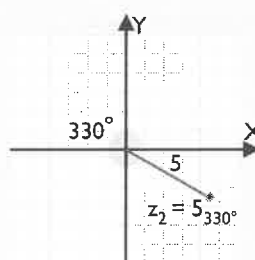
$$z_1 = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

b)



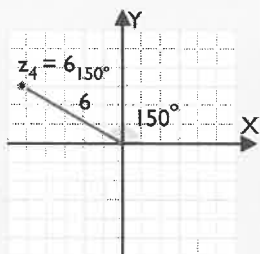
$$z_2 = 4(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$$

c)



$$z_3 = 5(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$$

d)



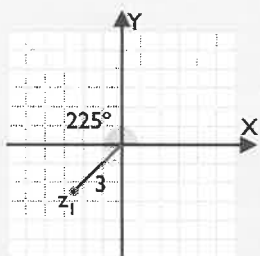
$$z_4 = 6(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -3\sqrt{3} + 3i$$

19. Representa no plano de Gauss os seguintes números complexos e pásaos a forma polar e binómica.

- a) $z_1 = 3(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$
- b) $z_2 = 2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$
- c) $z_3 = 4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
- d) $z_4 = 5(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$

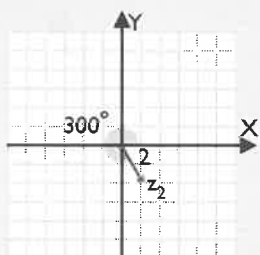
Solución:

a)



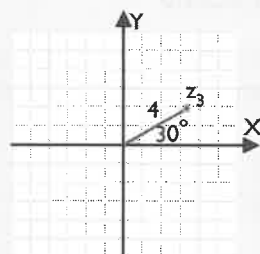
$$z_1 = 3_{225^\circ} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

b)



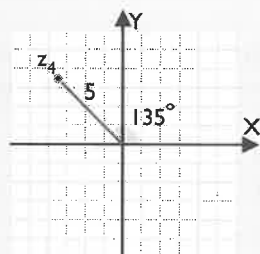
$$z_2 = 2_{300^\circ} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

c)



$$z_3 = 4_{30^\circ} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} + 2i$$

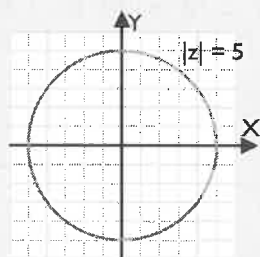
d)



$$z_4 = 5_{135^\circ} = 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

20. Define e representa o lugar xeométrico definido por:
 $|z| = 5$

Solución:



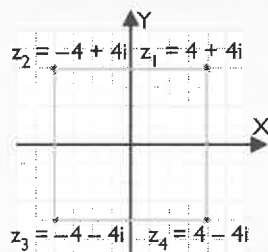
É unha circunferencia de centro a orixe de coordenadas e de radio 5.

4. Operacións en forma polar

Pensa e calcula

Dado o número complexo $z = 4 + 4i$, multiplica reiteradamente tres veces por i . Representa no plano de Gauss o número complexo $z = 4 + 4i$ e os tres números complexos que obtiveches. Une mediante un segmento cada afixo co seguinte, e o último co primeiro. Que figura se obtén?

Solución:



Obtense un cadrado.

Aplica a teoría

21. Sexan: $z_1 = 2_{120^\circ}$, $z_2 = 3_{210^\circ}$ e $z_3 = 4_{315^\circ}$

Calcula:

- a) $z_1 \cdot z_2$ b) $z_1 \cdot z_3$ c) $z_2 \cdot z_3$

Solución:

- a) 6_{330° b) 8_{75° c) 12_{165°

22. Sexan: $z_1 = 6_{225^\circ}$, $z_2 = 3_{150^\circ}$ e $z_3 = 2_{300^\circ}$

Calcula:

- a) z_1/z_2 b) z_1/z_3 c) z_2/z_3

Solución:

- a) 2_{75° b) 3_{285° c) $1,5_{210^\circ}$

23. Sexan: $z_1 = 5_{150^\circ}$, $z_2 = 3_{225^\circ}$ e $z_3 = 2_{45^\circ}$

Calcula:

- a) z_1^3 b) z_2^4 c) z_3^5

Solución:

- a) 125_{90° b) 81_{180° c) 32_{225°

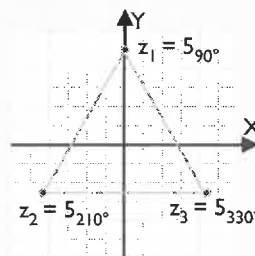
24. Un triángulo equilátero de centro a orixe de coordenadas ten un vértice no punto $A(0, 5)$. Atopa as coordenadas dos outros dous vértices e debuxa o mencionado triángulo.

Solución:

$$z_1 = 5i = 5_{90^\circ}$$

$$z_2 = 5_{90^\circ} \cdot 1_{120^\circ} = 5_{210^\circ}$$

$$z_3 = 5_{210^\circ} \cdot 1_{120^\circ} = 5_{330^\circ}$$



5. Radicación de números complejos

Pensa e calcula

- a) Calcula mentalmente $\sqrt[4]{1}$. Cantas raíces ten?
 b) Observando que $\sqrt[4]{1} = \sqrt{\sqrt{1}}$, calcula mentalmente $\sqrt[4]{1}$. Cantas raíces ten?

Solución:

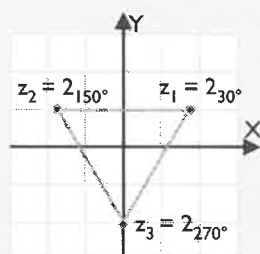
- a) 1 e -1 , ten dúas raíces. b) $1, -1, i$ e $-i$, ten catro raíces.

Aplica a teoría

25. Atopa as raíces cúbicas de $z = 8i$; represéntaaas graficamente e une mediante unha liña poligonal os afixos obtidos. Que polígono regular se obtén?

Solución:

$$\begin{aligned} z &= 8_{90^\circ} \\ z_1 &= 2_{30^\circ} \\ z_2 &= 2_{150^\circ} \\ z_3 &= 2_{270^\circ} \end{aligned}$$

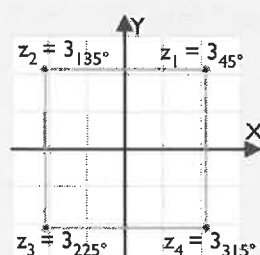


Obtense un triángulo equilátero.

26. Atopa as raíces cuartas de $z = -8i$; represéntaaas graficamente e une mediante unha liña poligonal os afixos obtidos. Que polígono regular se obtén?

Solución:

$$\begin{aligned} z &= 8i_{180^\circ} \\ z_1 &= 3_{45^\circ} \\ z_2 &= 3_{135^\circ} \\ z_3 &= 3_{225^\circ} \\ z_4 &= 3_{315^\circ} \end{aligned}$$

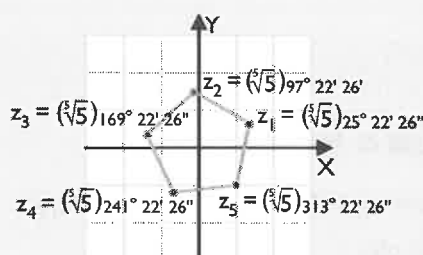


Obtense un cadrado.

27. Atopa as raíces quintas de $z = -3 + 4i$; represéntaaas graficamente e une mediante unha liña poligonal os afixos obtidos. Que polígono regular se obtén?

Solución:

$$\begin{aligned} z &= 5_{126^\circ 52' 12''} \\ z_1 &= (\sqrt[5]{5})_{25^\circ 22' 26''} \\ z_2 &= (\sqrt[5]{5})_{97^\circ 22' 26''} \\ z_3 &= (\sqrt[5]{5})_{169^\circ 22' 26''} \\ z_4 &= (\sqrt[5]{5})_{241^\circ 22' 26''} \\ z_5 &= (\sqrt[5]{5})_{313^\circ 22' 26''} \end{aligned}$$



Obtense un pentágono regular.

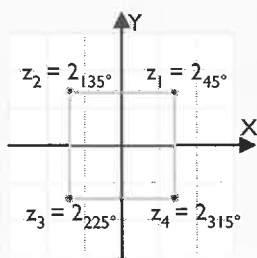
28. Resolve as ecuacións seguintes; representa as raíces graficamente e une mediante unha liña poligonal os afixos obtidos. Que polígono regular se obtén?

a) $z^4 + 16 = 0$

b) $z^4 - 16i = 0$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } z^4 + 16 = 0 &\Rightarrow z = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}_{180^\circ} \\ z_1 &= 2_{45^\circ} \\ z_2 &= 2_{135^\circ} \\ z_3 &= 2_{225^\circ} \\ z_4 &= 2_{315^\circ} \end{aligned}$$



Obtense un cadrado.

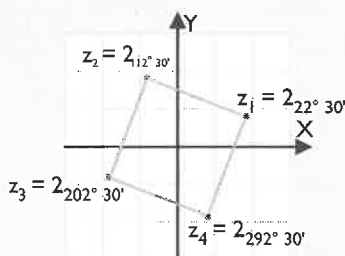
b) $z^4 - 16i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{i}$

$z_1 = 2_{22^\circ 30'}$

$z_2 = 2_{112^\circ 30'}$

$z_3 = 2_{202^\circ 30'}$

$z_4 = 2_{292^\circ 30'}$



Obtense un cadrado.

29. Resolve a ecuación: $x^2 + 6x + 10 = 0$

a) Como son as raíces?

Na parábola correspondente:

b) Atopa o vértice.

c) Atopa o eixe de simetría.

d) Representaa.

Solución:

$x_1 = -3 + i$

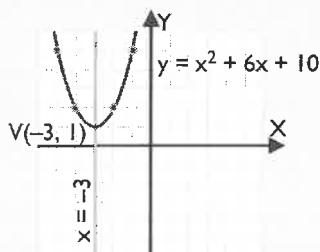
$x_2 = -3 - i$

a) As raíces son complexas conxugadas.

b) $V(-3, 1)$

c) $x = -3$

d)



30. Atopa unha ecuación de 2º grao que teña as seguintes raíces: $2 \pm 3i$

Solución:

$(x - 2)^2 + 3^2 = 0$

$x^2 - 4x + 13 = 0$

31. Atopa unha ecuación de 2º grao que teña as seguintes raíces: $6 \pm \sqrt{5}i$

Solución:

$(x - 6)^2 + (\sqrt{5})^2 = 0$

$x^2 - 12x + 41 = 0$

32. Resolve a ecuación:

$x^2 - 2x + 3 = 0$

a) Como son as raíces?

Na parábola correspondente:

b) Atopa o vértice.

c) Atopa o eixe de simetría.

d) Representaa.

Solución:

$x_1 = 1 + \sqrt{2}i$

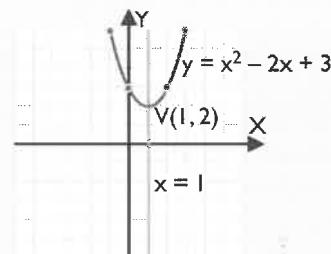
$x_2 = 1 - \sqrt{2}i$

a) As raíces son complexas conxugadas.

b) $V(1, 2)$

c) $x = 1$

d)

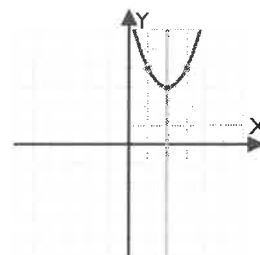


33. Dado o debuxo da parábola seguinte, atopa:

a) O vértice.

b) As raíces.

c) A ecuación da parábola.



Solución:

a) $V(2, 3)$

b) $x_1 = 2 + \sqrt{3}i, x_2 = 2 - \sqrt{3}i$

c) $(x - 2)^2 + 3 = 0 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 7$

Exercicios e problemas

1. Forma binómica do número complexo

34. Completa con xes as casas ás que pertencen os seguintes números:

Números	N	Z	Q	R	C
-7		X	X	X	X
$\sqrt{-13}$					
$-6/5$					
$2 + 5i$					
28					
e					

Solución:

Números	N	Z	Q	R	C
-7		X	X	X	X
$\sqrt{-13}$					X
$-6/5$			X	X	X
$2 + 5i$					X
28	X	X	X	X	X
e				X	X

35. Escribe cinco números complexos que non sexan reais.

Solución:

$$4 + 5i, -7i, \sqrt{-5}, -2 - 3i, \sqrt[6]{-43}$$

36. Escribe cinco números imaxinarios puros.

Solución:

$$7i, -2i, 4i, 9i, -9i$$

37. Atopa mentalmente as seguintes raíces:

- a) $\sqrt{36}$
b) $\sqrt{-64}$

Solución:

- a) ± 6
b) $\pm 8i$

38. Calcula mentalmente x e y para que os seguintes números complexos sexan iguais:

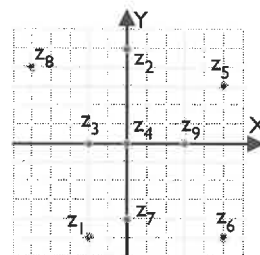
$$z_1 = 8 - xi$$

$$z_2 = y - 5i$$

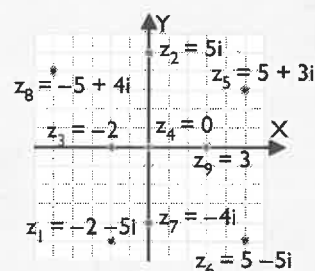
Solución:

$$x = 5, y = 8$$

39. Atopa os números complexos representados no plano de Gauss seguinte polos seus afijos:



Solución:

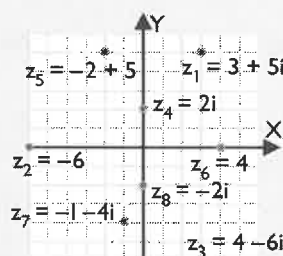


$$\begin{array}{lll} z_1 = -2 - 5i & z_2 = 5i & z_3 = -2 \\ z_4 = 0 & z_5 = 5 + 3i & z_6 = 5 - 5i \\ z_7 = -4i & z_8 = -5 + 4i & z_9 = 3 \end{array}$$

40. Representa os afijos dos seguintes números complexos no plano de Gauss:

- a) $z_1 = 3 + 5i$ b) $z_2 = -6$
c) $z_3 = 4 - 6i$ d) $z_4 = 2i$
e) $z_5 = -2 + 5i$ f) $z_6 = 4$
g) $z_7 = -1 - 4i$ h) $z_8 = -2i$

Solución:



2. Operacións en forma binómica

41. Sexan: $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 5 - 4i$

Calcula:

- a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$
c) $3z_1 - 4z_2$ d) $-5z_1 + 2z_2$

Solución:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 7 - 7i & \text{b) } -3 + i & \text{c) } -14 + 7i & \text{d) } 7i \end{array}$$

42. Sexan: $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = -3 + i$ e $z_3 = 6 - 4i$

Calcula:

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $z_1 \cdot z_3$ c) $z_2 \cdot z_3$

Solución:

a) $-13 + 11i$ b) $22 - 32i$ c) $-14 + 18i$

43. Calcula:

a) $(4 + i)^2$ b) $(-5 + 2i)^2$
c) $(3 - 3i)^2$ d) $(6 + i)^2$

Solución:

a) $15 + 8i$ b) $21 - 20i$
c) $-18i$ d) $35 + 12i$

44. Sexan: $z = -5 + 2i$

Calcula:

- a) O oposto de z .
b) O conxugado de z .
c) O inverso de z .
d) O produto $z \cdot \bar{z}$.

Solución:

a) $-z = 5 - 2i$
b) $\bar{z} = -5 - 2i$
c) $z^{-1} = -\frac{5}{29} - \frac{2}{29}i$
d) $z \cdot \bar{z} = 29$

45. Sexan: $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 2 + i$ e $z_3 = -6 + 4i$

Calcula:

a) z_1/z_2 b) z_1/z_3 c) z_2/z_3

Solución:

a) $\frac{1}{5} - \frac{13}{5}i$
b) $-\frac{19}{26} + \frac{9}{26}i$
c) $-\frac{2}{13} - \frac{7}{26}i$

46. Calcula as seguintes potencias:

a) i^{159} b) i^{242} c) i^{272} d) i^{209}

Solución:

a) $-i$ b) -1 c) 1 d) i

47. Dado o número complexo $z = 4 - 5i$, calcula: $z \cdot \bar{z} \cdot z^{-1}$

Solución:

$4 + 5i$

3. Forma polar do número complexo

48. Calcula mentalmente o módulo e o argumento dos seguintes números complexos, e pásalos a forma polar.

a) $z_1 = -4$
b) $z_2 = 5i$
c) $z_3 = -2i$
d) $z_4 = 3$

Solución:

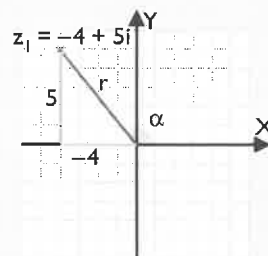
a) 4_{180° b) 5_{90° c) 2_{270° d) 3_{0°

49. Representa no plano de Gauss os seguintes números complexos, e pásalos a forma polar e trigonométrica.

a) $z_1 = -4 + 5i$
b) $z_2 = 3 - 2i$
c) $z_3 = -6 - i$
d) $z_4 = 1 + 5i$

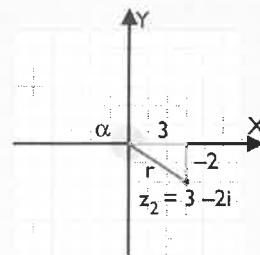
Solución:

a)



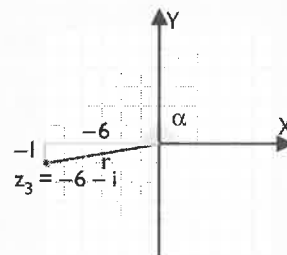
$$z_1 = (\sqrt{41})_{128^\circ 39' 35''} = \sqrt{41}(\cos 128^\circ 39' 35'' + i \sin 128^\circ 39' 35'')$$

b)



$$z_2 = (\sqrt{13})_{326^\circ 18' 36''} = \sqrt{13}(\cos 326^\circ 18' 36'' + i \sin 326^\circ 18' 36'')$$

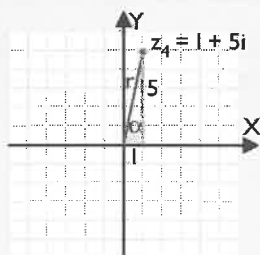
c)



$$z_3 = (\sqrt{37})_{189^\circ 27' 44''} = \sqrt{37}(\cos 189^\circ 27' 44'' + i \sin 189^\circ 27' 44'')$$

Exercicios e problemas

d)



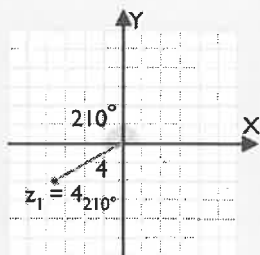
$$z_4 = (\sqrt{26})_{78^\circ 41' 24''} = \sqrt{26}(\cos 78^\circ 41' 24'' + i \sin 78^\circ 41' 24'')$$

50. Representa no plano de Gauss os seguintes números complexos e pásaos a forma trigonométrica e binómica.

- a) $z_1 = 4_{210^\circ}$ b) $z_2 = 5_{135^\circ}$
c) $z_3 = 6_{30^\circ}$ d) $z_4 = 3_{315^\circ}$

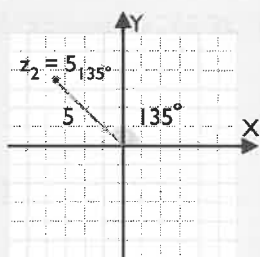
Solución:

a)



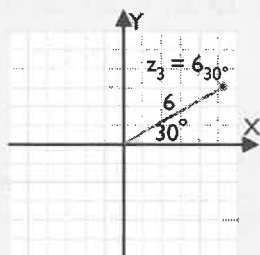
$$z_1 = 4(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} - 2i$$

b)



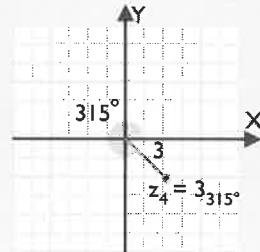
$$z_2 = 5(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

c)



$$z_3 = 6(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\sqrt{3} + 3i$$

d)



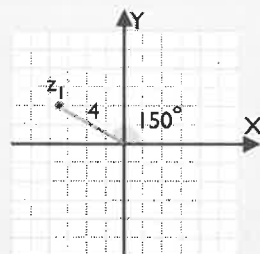
$$z_4 = 3(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

51. Representa no plano de Gauss os seguintes números complexos e pásaos a forma polar e binómica.

- a) $z_1 = 4(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$
b) $z_2 = 3(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$
c) $z_3 = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$
d) $z_4 = 5(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$

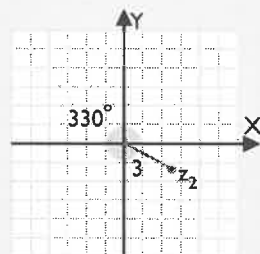
Solución:

a)



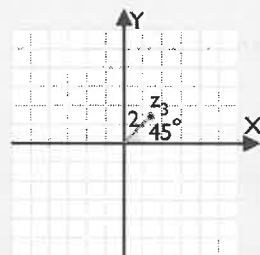
$$z_1 = 4_{150^\circ} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

b)



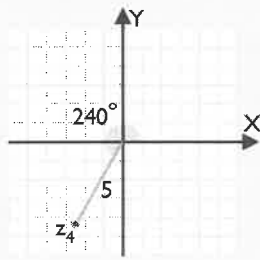
$$z_2 = 3_{330^\circ} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

c)



$$z_3 = 2_{45^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

d)

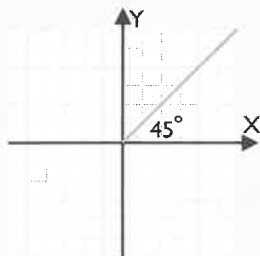


$$z_4 = 5_{240^\circ} = 5\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

52. Define e representa o lugar xeométrico de todos os números complexos que teñen de argumento 45° .

Solución:

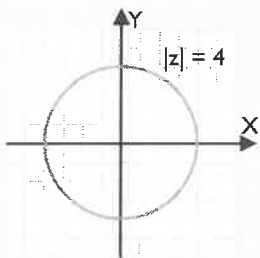
É unha semirrecta, que nace na orixe de coordenadas $O(0,0)$, e o ángulo formado polo semieixe positivo de X e a devandita semirrecta ten unha amplitude de 45° ; é dicir, é a bisectriz do primeiro cuadrante.



53. Define e representa o lugar xeométrico definido por:
 $|z| = 4$

Solución:

É unha circunferencia de centro a orixe de coordenadas e de radio 4.



4. Operacións en forma polar

54. Sexan: $z_1 = 4_{60^\circ}$, $z_2 = 5_{240^\circ}$ e $z_3 = 6_{300^\circ}$

Calcula:

- a) $z_1 \cdot z_2$ b) $z_1 \cdot z_3$ c) $z_2 \cdot z_3$

Solución:

- a) 20_{300° b) 24_{0° c) 30_{180°

55. Sexan: $z_1 = 8_{45^\circ}$, $z_2 = 4_{210^\circ}$ e $z_3 = 2_{330^\circ}$

Calcula:

- a) z_1/z_2 b) z_1/z_3 c) z_2/z_3

Solución:

- a) 2_{195° b) 4_{75° c) 2_{240°

56. Sexan: $z_1 = 6_{120^\circ}$, $z_2 = 5_{315^\circ}$ e $z_3 = 3_{225^\circ}$

Calcula:

- a) z_1^3 b) z_2^4 c) z_3^5

Solución:

- a) 216_{0° b) 625_{180° c) 243_{45°

57. Un cadrado de centro a orixe de coordenadas ten un vértice no punto $A(4,0)$. Atopa as coordenadas dos outros vértices e debuxa o devandito cadrado.

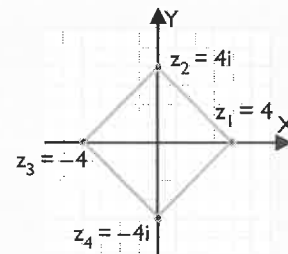
Solución:

$$z_1 = 4 = 4_{0^\circ}$$

$$z_2 = 4_{0^\circ} \cdot i_{90^\circ} = 4_{90^\circ} = 4i$$

$$z_3 = 4_{90^\circ} \cdot i_{90^\circ} = 4_{180^\circ} = -4$$

$$z_4 = 4_{180^\circ} \cdot i_{90^\circ} = 4_{270^\circ} = -4i$$



5. Radicación de números complexos

58. Atopa as raíces cúbicas de $z = -27i$; represéntaaas graficamente e une mediante unha liña poligonal os afixos obtidos. Que polígono regular se obtén?

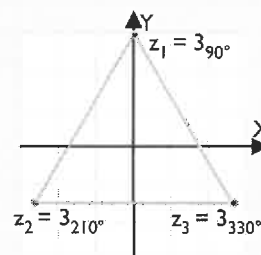
Solución:

$$z = 27_{270^\circ}$$

$$z_1 = 3_{90^\circ}$$

$$z_2 = 3_{210^\circ}$$

$$z_3 = 3_{330^\circ}$$



Obtense un triángulo equilátero.

Exercicios e problemas

59. Atopa as raíces cuartas de $z = 16$; represéntaaas graficamente e une mediante unha liña poligonal os afixos obtidos. Que polígono regular se obtén?

Solución:

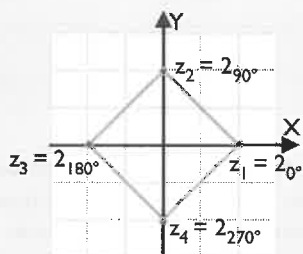
$$z = 16_0^\circ$$

$$z_1 = 2_0^\circ$$

$$z_2 = 2_{90^\circ}$$

$$z_3 = 2_{180^\circ}$$

$$z_4 = 2_{270^\circ}$$



Obtense un cadrado.

60. Atopa as raíces quintas de $z = 3 + 5i$; represéntaaas graficamente e une mediante unha liña poligonal os afixos obtidos. Que polígono regular se obtén?

Solución:

$$z = (\sqrt[5]{34})_{59^\circ 2' 10''}$$

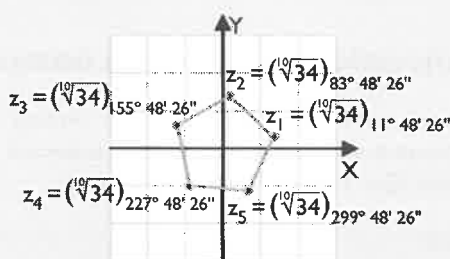
$$z_1 = (\sqrt[5]{34})_{11^\circ 48' 26''}$$

$$z_2 = (\sqrt[5]{34})_{83^\circ 48' 26''}$$

$$z_3 = (\sqrt[5]{34})_{155^\circ 48' 26''}$$

$$z_4 = (\sqrt[5]{34})_{227^\circ 48' 26''}$$

$$z_5 = (\sqrt[5]{34})_{299^\circ 48' 26''}$$



Obtense un pentágono regular.

61. Resolve as ecuacións seguintes; representa as raíces graficamente e une mediante unha liña poligonal os afixos obtidos. Que polígono regular se obtén?

a) $z^4 - 81 = 0$

b) $z^4 + 16i = 0$

Solución:

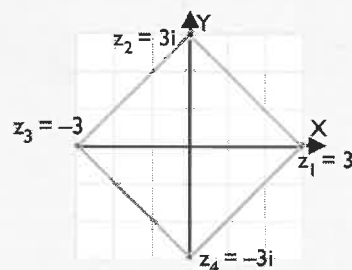
a) $z^4 - 81 = 0 \Rightarrow z^4 = 81 \Rightarrow z = \sqrt[4]{81}$

$$z_1 = 3$$

$$z_2 = 3i$$

$$z_3 = -3$$

$$z_4 = -3i$$



Obtense un cadrado.

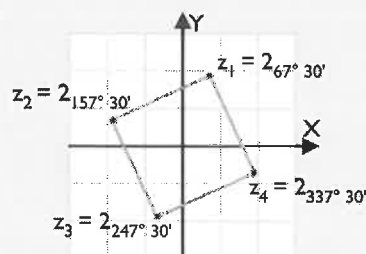
b) $z_4 + 16i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-16i} = \sqrt[4]{16}_{270^\circ}$

$$z_1 = 2_{67^\circ 30'}$$

$$z_2 = 2_{157^\circ 30'}$$

$$z_3 = 2_{247^\circ 30'}$$

$$z_4 = 2_{337^\circ 30'}$$



Obtense un cadrado.

62. Resolve a ecuación:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

a) Como son as raíces?

Na parábola correspondente:

b) Atopa o vértice.

c) Atopa o eixe de simetría.

d) Represéntaa.

Solución:

$$x_1 = 2 + i$$

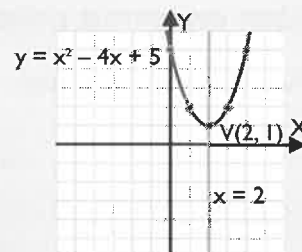
$$x_2 = 2 - i$$

a) Son complexas conxugadas.

b) $V(2, 1)$

c) $x = 2$

d)



63. Resolve a ecuación:

$$x^2 + 4x + 7 = 0$$

a) Como son as raíces?

Na parábola correspondente:

b) Atopa o vértice.

c) Atopa o eixe de simetría.

d) Representaa.

Solución:

$$x_1 = -2 + \sqrt{3}i$$

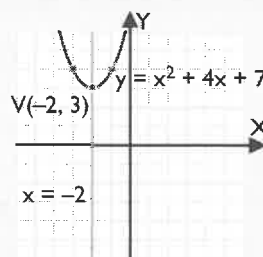
$$x_2 = -2 - \sqrt{3}i$$

a) Son complexas conxugadas.

b) $V(-2, 3)$

c) $x = -2$

d)



64. Atopa unha ecuación de segundo grao que teña as raíces:
 $3 \pm 5i$

Solución:

$$(x - 3)^2 + 5^2 = 0$$

$$x^2 - 6x + 34 = 0$$

65. Atopa unha ecuación de segundo grao que teña as raíces:
 $-2 \pm \sqrt{3}i$

Solución:

$$(x + 2)^2 + (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$x^2 + 4x + 7 = 0$$

Para ampliar

66. As raíces cadradas dos números reais negativos, que clase de números son? Pon un exemplo.

Solución:

Son números imaxinarios puros.

Exemplo:

$$\sqrt{-9} = \pm 3i$$

67. A suma dun número complexo e o seu conxugado, que clase de número é? Pon un exemplo.

Solución:

É un número real.

Exemplo:

$$z = 2 + 3i, \bar{z} = 2 - 3i$$

$$z + \bar{z} = 4$$

68. O produto dun número complexo e o seu conxugado, que clase de número é? Pon un exemplo.

Solución:

É un número real.

$$z = 4 + 5i, \bar{z} = 4 - 5i$$

$$z \cdot \bar{z} = 41$$

69. Dado o número complexo:

$$z = 3 + 5i$$

Calcula:

a) O conxugado do oposto.

b) O oposto do conxugado.

c) Que relación hai entre os resultados obtidos nos dous apartados anteriores?

Solución:

a) $-\bar{z} = -3 + 5i$

b) $-\bar{z} = -3 + 5i$

c) Que son iguais.

70. Calcula x e y para que:

a) $x + 2i + 5 - 3i = 7 + yi$

b) $3 - 5i - 7 + yi = x + 2i$

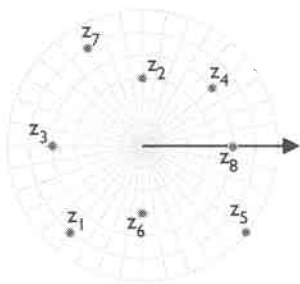
Solución:

a) $x = 2, y = -1$

b) $x = -4, y = 7$

Exercicios e problemas

71. Atopa os números complexos representados en forma polar:



Solución:

$$z_1 = 5_{230^\circ}$$

$$z_3 = 4_{180^\circ}$$

$$z_5 = 6_{320^\circ}$$

$$z_7 = 5_{120^\circ}$$

$$z_2 = 3_{90^\circ}$$

$$z_4 = 4_{40^\circ}$$

$$z_6 = 3_{270^\circ}$$

$$z_8 = 4_{0^\circ}$$

72. Representa os números complexos que aparecen a continuación no eixe polar.

a) $z_1 = 5_{330^\circ}$

b) $z_2 = 4_{180^\circ}$

c) $z_3 = 3_{150^\circ}$

d) $z_4 = 5_{90^\circ}$

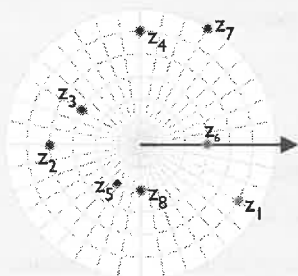
e) $z_5 = 2_{240^\circ}$

f) $z_6 = 3_{0^\circ}$

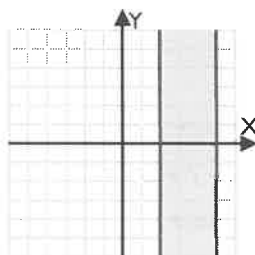
g) $z_7 = 6_{60^\circ}$

h) $z_8 = 2_{270^\circ}$

Solución:



73. Escribe a condición que deben cumprir os números complexos representados na seguinte figura:



Solución:

Que a parte real estea comprendida entre 2 e 5.

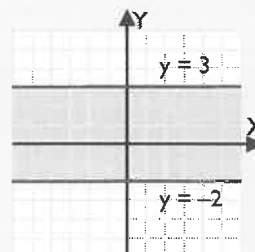
$$2 \leq \text{Real}(z) \leq 5$$

74. Define e representa o lugar xeométrico de todos os números complexos cuxa parte imaxinaria está comprendida entre -2 e 3 .

Solución:

É unha franxa horizontal, os números complexos que están comprendidos entre as rectas $y = -2$ e $y = 3$, incluídas as rectas.

$$-2 \leq \text{Imaginaria}(z) \leq 3$$



75. Se o produto de dous números complexos non reais é un número real, que relación hai entre os seus argumentos? Pon un exemplo.

Solución:

A suma dos argumentos ten que ser 180° ou 360° .

$$2_{60^\circ} \cdot 3_{120^\circ} = 6_{180^\circ} = -6$$

76. Resolve as ecuacións seguintes. Representa as raíces graficamente e une mediante unha liña poligonal os afixos obtidos. Que polígono regular se obtén?

a) $z^6 - 1 = 0$

b) $z^6 + i = 0$

Solución:

$$a) z^6 - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1}_{0^\circ}$$

$$z_1 = 1_{0^\circ}$$

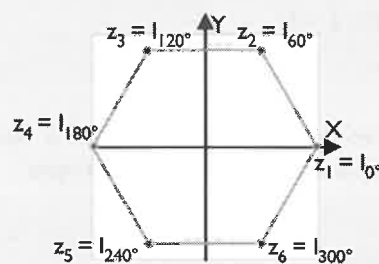
$$z_2 = 1_{60^\circ}$$

$$z_3 = 1_{120^\circ}$$

$$z_4 = 1_{180^\circ}$$

$$z_5 = 1_{240^\circ}$$

$$z_6 = 1_{300^\circ}$$



Obtense un hexágono regular.

$$b) z^6 + i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{-i} = \sqrt[6]{1} \angle_{270^\circ}$$

$$z_1 = \angle_{45^\circ}$$

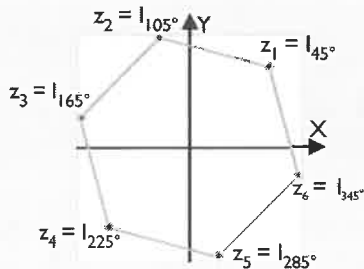
$$z_2 = \angle_{105^\circ}$$

$$z_3 = \angle_{165^\circ}$$

$$z_4 = \angle_{225^\circ}$$

$$z_5 = \angle_{285^\circ}$$

$$z_6 = \angle_{345^\circ}$$



Obtense un hexágono regular.

77. Resolva as ecuacións seguintes. Representa as raíces graficamente e une mediante unha liña poligonal os afixos obtidos. Que polígono regular se obtén?

$$a) z^6 + i = 0$$

$$b) z^6 - i = 0$$

Solución:

$$a) z^6 + i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{-i} = \sqrt[6]{1} \angle_{180^\circ}$$

$$z_1 = \angle_{30^\circ}$$

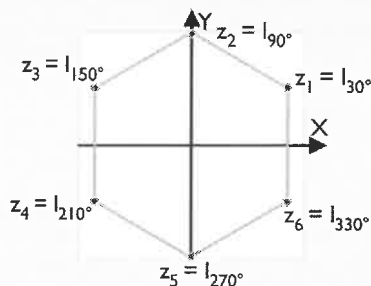
$$z_2 = \angle_{90^\circ}$$

$$z_3 = \angle_{150^\circ}$$

$$z_4 = \angle_{210^\circ}$$

$$z_5 = \angle_{270^\circ}$$

$$z_6 = \angle_{330^\circ}$$



Obtense un hexágono regular.

$$b) z^6 - i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{i} = \sqrt[6]{1} \angle_{90^\circ}$$

$$z_1 = \angle_{15^\circ}$$

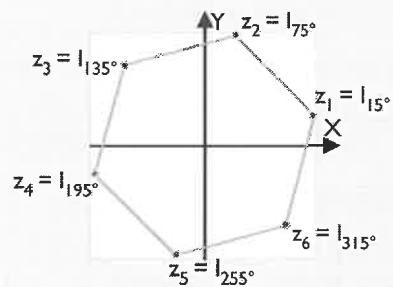
$$z_2 = \angle_{75^\circ}$$

$$z_3 = \angle_{135^\circ}$$

$$z_4 = \angle_{195^\circ}$$

$$z_5 = \angle_{255^\circ}$$

$$z_6 = \angle_{315^\circ}$$



Obtense un hexágono regular.

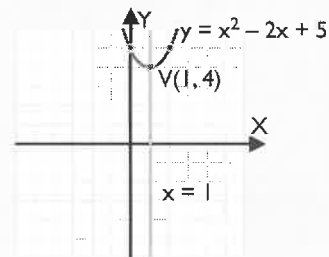
78. Atopa a ecuación dunha parábola que ten o vértice no punto $V(1, 4)$ e que non corta o eixe de abscisas.

Solución:

As raíces son: $1 \pm 2i$

$$(x - 1)^2 + 2^2 = x^2 - 2x + 5$$

$$y = x^2 - 2x + 5$$



79. Resolva as seguintes ecuacións:

$$a) x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$

$$b) x^4 + 5x^2 + 4 = 0$$

Solución:

$$a) x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3i, x_4 = -3i$$

$$b) x_1 = i, x_2 = -i, x_3 = 2i, x_4 = -2i$$

80. Resolva as seguintes ecuacións:

$$a) x^4 + 13x^2 + 36 = 0$$

$$b) x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Solución:

$$a) x_1 = 2i, x_2 = -2i, x_3 = 3i, x_4 = -3i$$

$$b) x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = i, x_4 = -i$$

Problemas

81. Atopa un número que sumado co seu inverso dea 1. Que tipo de números son o resultado?

Solución:

$$z + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0$$

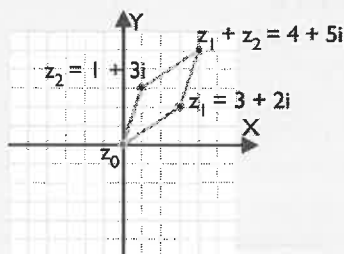
$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

O resultado son dous números complexos conxugados, tal que a suma das súas partes reais é un.

82. Dados os números complexos $z_0 = 0, z_1 = 3 + 2i, z_2 = 1 + 3i$, atopa $z_1 + z_2$ e representa os afijos de z_0, z_1, z_2 e $z_1 + z_2$. Úneos mediante segmentos nesta orde: $z_0, z_1, z_1 + z_2, z_2$ e z_0 . Que polígono se obtén?

Solución:

$$z_1 + z_2 = 4 + 5i$$



Obtense un paralelogramo; é equivalente á suma de vectores.

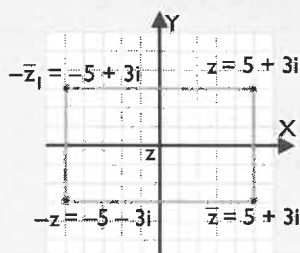
83. Dado o número complexo $z = 5 + 3i$, calcula o conxugado, $\bar{z}$, o oposto, $-z$, e o oposto do conxugado, $-\bar{z}$. Representa os catro números complexos no plano de Gauss e úneos na seguinte orde: $z, \bar{z}, -z, -\bar{z}$. Que polígono se obtén?

Solución:

$$\bar{z} = 5 - 3i$$

$$-z = -5 - 3i$$

$$-\bar{z} = -5 + 3i$$



Obtense un rectángulo.

84. Resolve a seguinte ecuación sabendo que z é un número complexo: $2z + 6 - 3i = 5z - 3 + 3i$

Solución:

$$z = 3 - 2i$$

85. Dados os números complexos $z_1 = 4 + xi, z_2 = x - i$, atopa x para que $z_1 \cdot z_2$ sexa:

- a) Un número real.
b) Un número imaxinario puro.

Solución:

$$z_1 \cdot z_2 = 5x + (x^2 - 4)i$$

$$a) x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$b) 5x = 0 \Rightarrow x = 0$$

86. Dados os números complexos $z_1 = 2 - 6i, z_2 = x + 3i$, atopa x para que z_1/z_2 sexa:

- a) Un número real.
b) Un número imaxinario puro.

Solución:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2x - 18}{x^2 + 9} - \frac{6x + 6}{x^2 + 9}i$$

$$a) 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$b) 2x - 18 = 0 \Rightarrow x = 9$$

87. Dado o número complexo $z = x - 3i$, atopa x para que $(x - 3i)^2$ sexa:

- a) Un número real.
b) Un número imaxinario puro.

Solución:

$$(x - 3i)^2 = x^2 - 9 - 6xi$$

$$a) -6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$b) x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

88. Resolve a seguinte ecuación:

$$(x - 5i)(3 + yi) = 22 - 7i$$

Solución:

$$3x + 5y + (xy - 15)i = 22 - 7i$$

Tránsformase no sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 22 \\ xy - 15 = -7 \end{cases}$$

$$x_1 = 4, y_1 = 2$$

$$x_2 = 10/3, y_2 = 12/5$$

89. Dados os números complexos $z_1 = x + i, z_2 = 2 + i$, atopa x para que o afixo de $z_1 \cdot z_2$ estea na bisectriz do Iº cuadrante.

Solución:

$$z_1 \cdot z_2 = 2x - 1 + (x + 2)i \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x - 1 = x + 2 \Rightarrow x = 3$$

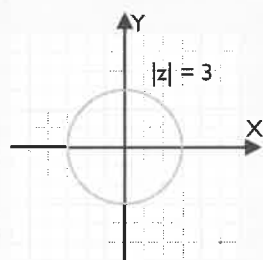
Comprobación:

$$z_1 \cdot z_2 = 5 + 5i$$

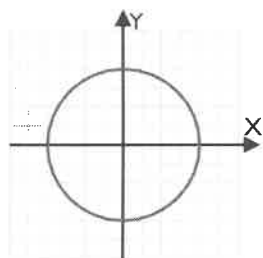
90. Define e representa o lugar xeométrico definido por:
 $|z| = 3$.

Solución:

É unha circunferencia con centro na orixe de coordenadas e radio 3.



91. Escribe a condición que deben cumprir os números complexos representados na seguinte figura:

**Solución:**

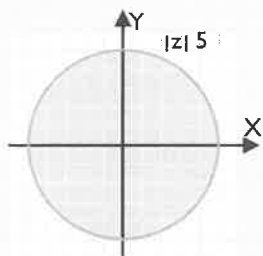
Que o seu módulo sexa 4.

$$|z| = 4$$

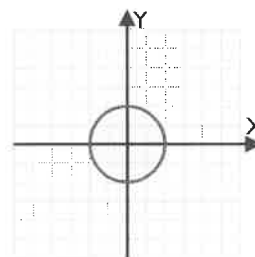
92. Define e representa o lugar xeométrico definido por:
 $|z| \leq 5$

Solución:

É o círculo de centro a orixe de coordenadas e radio 5, é dicir, a circunferencia e o seu interior.



93. Escribe a condición que deben cumprir os números complexos representados na seguinte figura:

**Solución:**

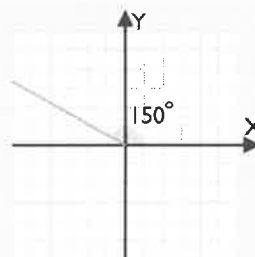
Que o seu módulo sexa menor ou igual ca 2.

$$|z| \leq 2$$

94. Define e representa o lugar xeométrico de todos os números complexos que teñen de argumento 150° .

Solución:

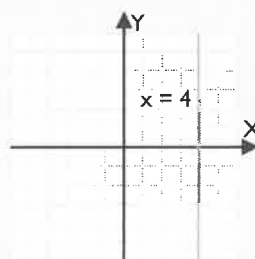
É unha semirrecta que nace na orixe de coordenadas, e o ángulo que forma o semieixe positivo de X con esta semirrecta ten de amplitude 150° .



95. Define e representa o lugar xeométrico de todos os números complexos que teñen de parte real 4.

Solución:

É unha recta vertical de abscisa 4.

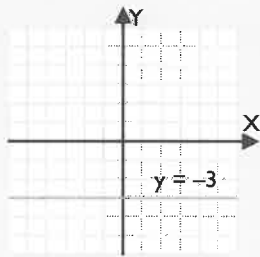


96. Define e representa o lugar xeométrico de todos os números complexos que teñen de parte imaxinaria -3 .

Exercicios e problemas

Solución:

É unha recta horizontal de ordenada -3 .



97. Dado o número complexo:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

calcula z^{50} . Dá o resultado en forma binómica.

Solución:

$$z = 1_{45^\circ}$$

$$z^{50} = (1_{45^\circ})^{50} = 1_{50 \cdot 45^\circ} = 1_{90^\circ} = i$$

98. Aplicando a fórmula de Moivre, expresa $\sin 2\alpha$ e $\cos 2\alpha$ en función do $\sin \alpha$ e do $\cos \alpha$.

Solución:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$$

Se se desenvolve o cadrado do primeiro membro e se igualan as partes reais e imaxinarias, obtense:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

99. Atopa os vértices dun hexágono regular, sabendo que un deles é o punto $A(5, 0)$.

Solución:

$$A(5, 0) \Rightarrow z = 5_{0^\circ}$$

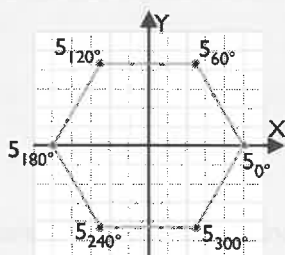
$$5_{0^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = 5_{60^\circ}$$

$$5_{60^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = 5_{120^\circ}$$

$$5_{120^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = 5_{180^\circ}$$

$$5_{180^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = 5_{240^\circ}$$

$$5_{240^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = 5_{300^\circ}$$



100. Atopa a ecuación dunha parábola que ten o vértice no punto $V(3, 2)$ e que non corta o eixe de abscisas.

Solución:

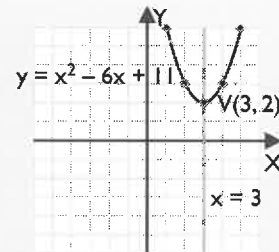
As raíces son:

$$x_1 = 3 + \sqrt{2}i$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{2}i$$

$$(x - 3)^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 11 = 0$$

$$y = x^2 - 6x + 11$$



101. Atopa as raíces cúbicas de i e de $-i$, represéntaaas graficamente nos mesmos eixes coordenados e forma o polígono que se obtén unindo os afijos de cada unha das raíces.

Solución:

$$z = i = 1_{90^\circ}$$

$$z_1 = 1_{30^\circ}$$

$$z_2 = 1_{150^\circ}$$

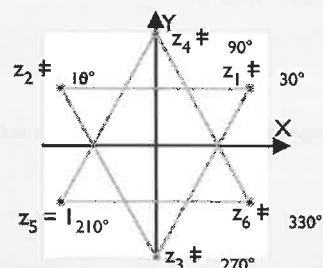
$$z_3 = 1_{270^\circ}$$

$$z = -i = 1_{270^\circ}$$

$$z_4 = 1_{90^\circ}$$

$$z_5 = 1_{210^\circ}$$

$$z_6 = 1_{330^\circ}$$



Para profundar

102. En que números complexos coincide o seu inverso co seu conxugado? Representa graficamente a solución.

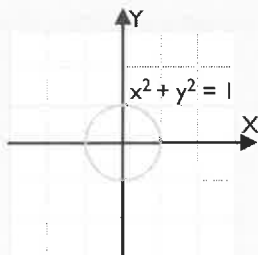
Solución:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i = x - yi$$

Para que as partes reais e imaxinarias sexan iguais ten que ser:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Son os números complexos que teñen de módulo un, é dicir, os números complexos que están sobre a circunferencia unidade.

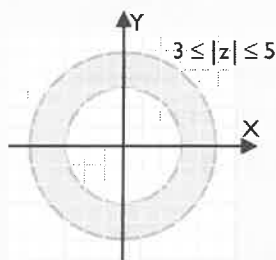


103. Define e representa o lugar xeométrico determinado por:

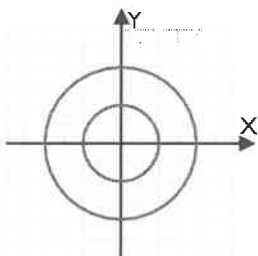
$$3 \leq |z| \leq 5$$

Solución:

Son os números complexos cuxo módulo está comprendido entre 3 e 5, é dicir, unha coroa circular de radios 3 e 5, co centro na orixe de coordenadas.



104. Escribe a condición que deben cumprir os números complexos representados na seguinte figura:

**Solución:**

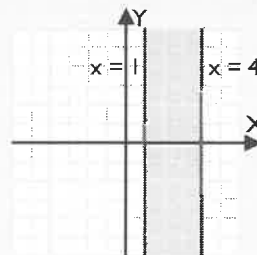
$$2 \leq |z| \leq 4$$

105. Define e representa o lugar xeométrico de todos os números complexos cuxa parte real está comprendida entre 1 e 4.

Solución:

É unha franxa vertical comprendida entre as rectas $x = 1$ e $x = 4$.

$$1 \leq \text{Real}(z) \leq 4$$



106. Dado o número complexo:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

calcula z^{50} . Dá o resultado en forma binómica.

Solución:

$$z = 1_{315^\circ}$$

$$z^{50} = (1_{315^\circ})^{50} = 1_{50 \cdot 315^\circ} = 1_{270^\circ} = -i$$

107. Se o cociente de dous números complexos non reais é un número real, que relación hai entre os seus argumentos? Pon un exemplo.

Solución:

A diferenza dos seus argumentos ten que ser 0° ou 180° .

$$6_{30^\circ} : 2_{30^\circ} = 3_{0^\circ} = 3$$

$$6_{210^\circ} : 2_{30^\circ} = 3_{180^\circ} = -3$$

108. Atopa un número complexo cuxo cadrado sexa un número real negativo.

Solución:

$$z = 5i$$

$$z^2 = -25$$

109. Atopa un número complexo cuxo cadrado sexa un número imaxinario puro.

Solución:

$$z = 3_{45^\circ}$$

$$z^2 = 9_{90^\circ} = 9i$$

110. Aplicando a fórmula de Moivre, expresa $\sin 3\alpha$ e $\cos 3\alpha$ en función do seno α e do cos α . Debes ter en conta que: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Exercicios e problemas

Solución:

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha$$

Se se desenvolve o primeiro cubo e se igualan as partes reais e imaxinarias, obtense:

$$\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$$

111. Atopa os vértices dun cadrado de centro a orixe de coordenadas, sabendo que un dos vértices é o punto A(3, 4). Fai o debuxo.

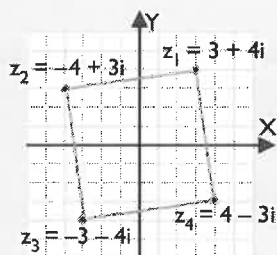
Solución:

$$z_1 = 3 + 4i$$

$$z_2 = z_1 \cdot i = -4 + 3i$$

$$z_3 = z_2 \cdot i = -3 - 4i$$

$$z_4 = z_3 \cdot i = 4 - 3i$$



112. Atopa os vértices dun pentágono regular sabendo que un deles é o punto A(0, 4).

Solución:

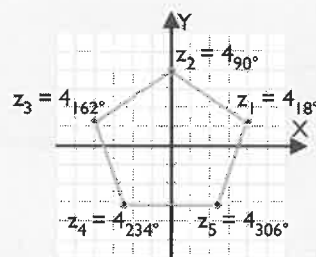
$$A(0, 4) \Rightarrow z = 4_{90^\circ}$$

$$4_{90^\circ} \cdot 1_{72^\circ} = 4_{162^\circ}$$

$$4_{162^\circ} \cdot 1_{72^\circ} = 4_{234^\circ}$$

$$4_{234^\circ} \cdot 1_{72^\circ} = 4_{306^\circ}$$

$$4_{306^\circ} \cdot 1_{72^\circ} = 4_{18^\circ}$$



113. Atopa a ecuación dunha parábola que ten o vértice no punto V(-3, 1) e que non corta o eixe de abscisas.

Solución:

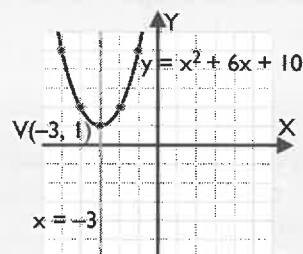
As raíces son:

$$x_1 = -3 + i$$

$$x_2 = -3 - i$$

$$(x + 3)^2 + 1 = x^2 + 6x + 10$$

$$y = x^2 + 6x + 10$$



114. Resolve as seguintes ecuacións:

a) $x^3 - 7x^2 + 19x - 13 = 0$

b) $x^3 + 6x + 20 = 0$

Solución:

a) $x_1 = 1, x_2 = 3 + 2i, x_3 = 3 - 2i$

b) $x_1 = -2, x_2 = 1 + 3i, x_3 = 1 - 3i$

Paso a paso

115. Multiplica os seguintes números complexos:

$$z_1 = 2 + 3i$$

$$z_2 = 4 + 5i$$

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

116. Divide os seguintes números complexos:

$$z_1 = 2 + 3i$$

$$z_2 = 4 + 5i$$

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

117. Calcula a seguinte potencia: $(2 + 3i)^5$ **Solución:**

Resolto no libro do alumnado.

118. Resolve a ecuación: $x^2 - 6x + 13 = 0$

Representa a parábola correspondente e fai a interpretación gráfica.

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

119. Representa o lugar xeométrico definido pola expresión: $|z| = 5$ **Solución:**

Resolto no libro do alumnado.

120. **Internet.** Abre: www.xerais.es, elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.**Practica**121. Sexan: $z_1 = 5 - 4i$ e $z_2 = -2 + 3i$

Calcula:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $7z_1 - 4z_2$

d) $-5z_1 + 9z_2$

Solución:

a) $3 - i$

b) $7 - 7i$

c) $43 - 40i$

d) $-43 + 47i$

122. Sexan: $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 4 - 2i$ e $z_3 = -1 + 6i$

Calcula:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $z_1 \cdot z_3$

c) $z_2 \cdot z_3$

Solución:

a) $22 + 14i$

b) $-33 + 13i$

c) $8 + 26i$

123. Calcula:

a) $(3 + 2i)^7$

b) $(-4 + 7i)^8$

c) $(2 - i)^9$

d) $(1 + i)^{10}$

Solución:

a) $-4449 - 6554i$

b) $-9470207 - 15131424i$

c) $-718 + 1199i$

d) $32i$

124. Sexan: $z_1 = 5 + 6i$, $z_2 = 8 - 9i$ e $z_3 = -4 + 3i$

Calcula:

a) z_1/z_2

b) z_1/z_3

c) z_2/z_3

Solución:

a) $-\frac{14}{145} + \frac{93}{145}i$

b) $-\frac{2}{25} - \frac{39}{25}i$

c) $-\frac{59}{25} + \frac{12}{25}i$

125. Resolve as seguintes ecuacións:

a) $z^2 = -3$

b) $z^2 = -i$

c) $z^3 = 1$

d) $z^3 = i$

Solución:

a) $z_1 = -\sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{3}i$

b) $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

c) $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = 1$

d) $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_3 = -i$

126. Resolve as seguintes ecuacións:

- a) $z^4 = 81$
- b) $z^4 = -16$
- c) $z^4 + 5z^2 - 36 = 0$
- d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

Solución:

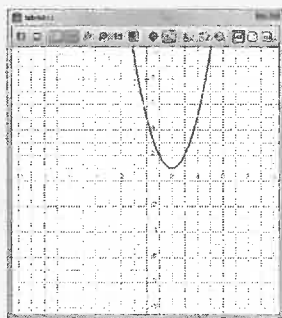
- a) $z_1 = -3i, z_2 = 3i, z_3 = -3, z_4 = 3$
- b) $z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
 $z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, z_4 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$
- c) $z_1 = -3i, z_2 = 3i, z_3 = -2, z_4 = 2$
- d) $z_1 = -3i, z_2 = 3i, z_3 = -2i, z_4 = 2i$

127. Resolve a ecuación: $x^2 - 4x + 5 = 0$

Representa a parábola correspondente e fai a interpretación gráfica.

Solución:

$$x_1 = 2 - i, x_2 = 2 + i$$



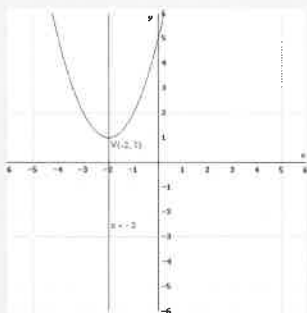
128. Resolve a ecuación:

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

Representa a parábola correspondente e fai a interpretación gráfica.

Solución:

$$x_1 = -2 - i, x_2 = -2 + i$$



129. Atopa unha ecuación de 2º grao que teña as raíces complexas conxugadas $3 \pm 4i$.

Solución:

$$(x - 3)^2 + 16 = 0$$

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

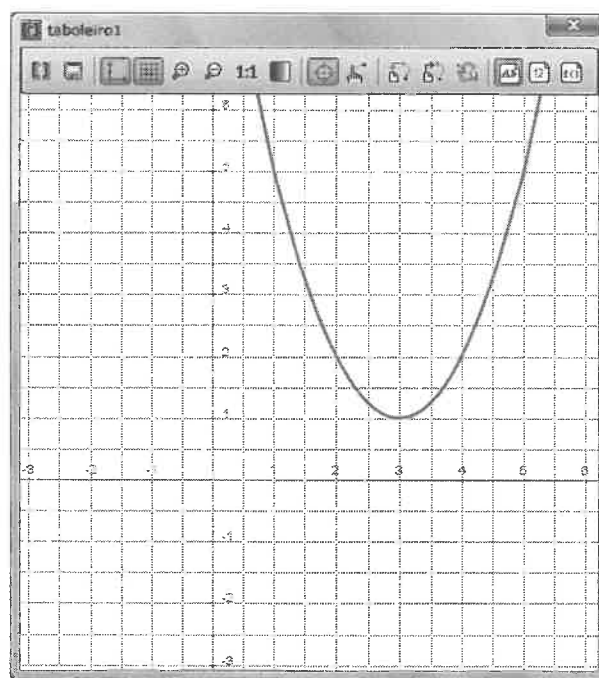
130. Atopa unha ecuación de 2º grao que teña as raíces: $6 \pm \sqrt{5}i$

Solución:

$$(x - 6)^2 + 5 = 0$$

$$x^2 - 12x + 41 = 0$$

131. Mediante *ensaio-erro* atopa a fórmula da seguinte parábola:



Solución:

$$y = x^2 - 6x + 10$$