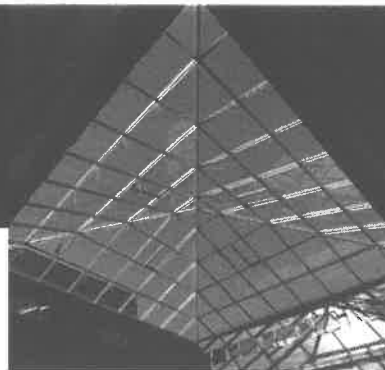




1. Resolución de triángulos rectángulos

Pensa e calcula

Calcula mentalmente a incógnita que se pide nos seguintes triángulos rectángulos:

a) $b = 6$ m, $c = 8$ m; atopa a hipotenusa a .

b) $B = 35^\circ$; atopa o outro ángulo agudo C .

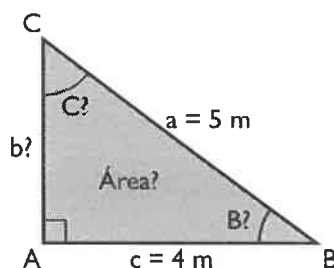
Solución:

a) $a = 10$ m

b) $c = 55^\circ$

Aplica a teoría

1. Nun triángulo rectángulo coñécense a hipotenusa $a = 5$ m e un cateto $c = 4$ m. Calcula os demais elementos.

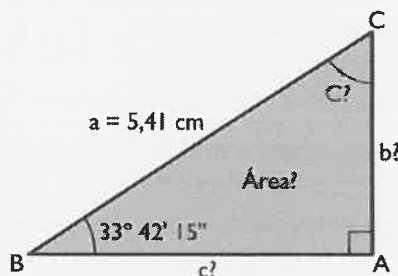


Solución:

Datos	Incógnita	Fórmulas	Resolución
$a = 5$ m	b	$b^2 = a^2 - c^2$	$b = 3$ m
$c = 4$ m	B	$\cos B = \frac{c}{a}$	$\cos B = \frac{4}{5} \Rightarrow B = 36^\circ 52' 12''$
	C	$C = 90^\circ - B$	$C = 53^\circ 7' 48''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ m}^2$

2. Nun triángulo rectángulo coñécense a hipotenusa $a = 5,41$ m e o ángulo $B = 33^\circ 42' 15''$. Calcula os demais elementos.

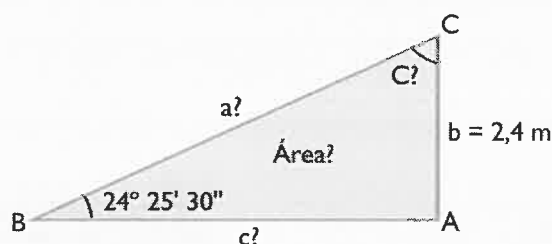
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 5,41 \text{ m}$	C	$C = 90^\circ - B$	$C = 90^\circ - 33^\circ 42' 15'' = 56^\circ 17' 45''$
$B = 33^\circ 42' 15''$	b	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \text{ sen } B$	$b = 5,41 \text{ sen } 33^\circ 42' 15'' = 3 \text{ m}$
	c	$\text{cos } B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \text{ cos } B$	$c = 5,41 \text{ cos } 33^\circ 42' 15'' = 4,5 \text{ m}$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4,5 = 6,75 \text{ m}^2$

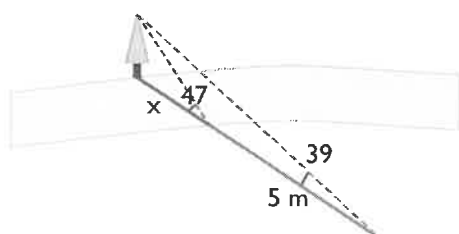
3. Nun triángulo rectángulo coñécese un ángulo agudo $B = 24^\circ 25' 30''$ e o cateto oposto $b = 2,4 \text{ m}$. Calcula os demais elementos.

Solución:

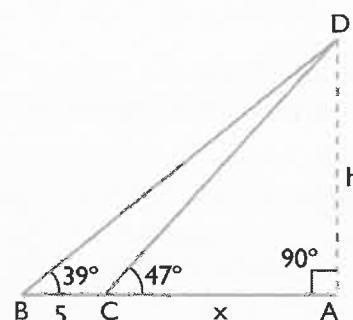


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 2,4 \text{ m}$	C	$C = 90^\circ - B$	$C = 90^\circ - 24^\circ 25' 30'' = 65^\circ 34' 30''$
$B = 24^\circ 25' 30''$	a	$\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\text{sen } B}$	$a = 5,8 \text{ m}$
	c	$\text{tan } B = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\text{tan } B}$	$c = 5,28 \text{ m}$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 5,28 = 6,34 \text{ m}^2$

4. Quérese medir a anchura dun río. Para isto obsérvase unha árbore que está na outra beira. Mídese o ángulo de elevación dende esta beira á parte máis alta da árbore e obtense 47° . Afastándose 5 m do río, vólvese medir o ángulo de elevación e obtense 39° . Calcula a anchura do río.



Solución:



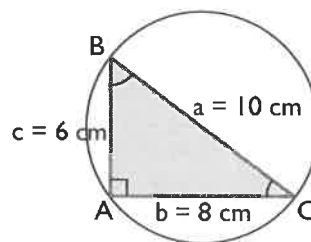
$$\left. \begin{array}{l} \tan 47^\circ = \frac{h}{x} \\ \tan 39^\circ = \frac{h}{5+x} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 15,42 \text{ m}$$

2. Teorema dos senos

Pensa e calcula

Observa o triángulo rectángulo do debuxo e calcula mentalmente o valor de k .

$$k = \frac{a}{\sin A}$$



Solución:

$$k = 10 \text{ cm}$$

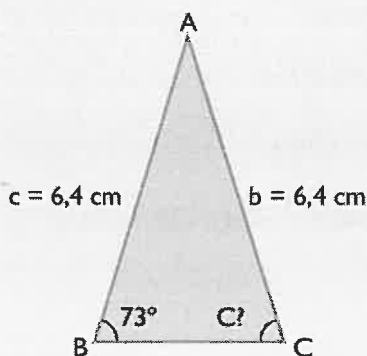
Aplica a teoría

5. Nun triángulo coñécese:

$$b = 6,4 \text{ cm}, c = 6,4 \text{ cm} \text{ e } B = 73^\circ$$

Calcula mentalmente o ángulo C . Cantas solucións ten o devandito ángulo?

Solución:



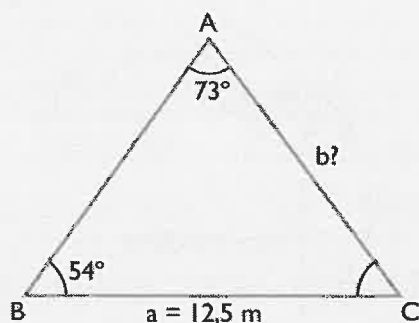
O triángulo é isósceles.

$C = 73^\circ$. A solución é única.

6. Nun triángulo coñécese: $a = 12,5 \text{ m}$, $A = 73^\circ$ e $B = 54^\circ$.

Calcula o lado b . Cantas solucións ten?

Solución:



$$\frac{12,5}{\sin 73^\circ} = \frac{b}{\sin 54^\circ} \Rightarrow b = \frac{12,5 \cdot \sin 54^\circ}{\sin 73^\circ} = 10,57 \text{ m}$$

Ten unha solución.

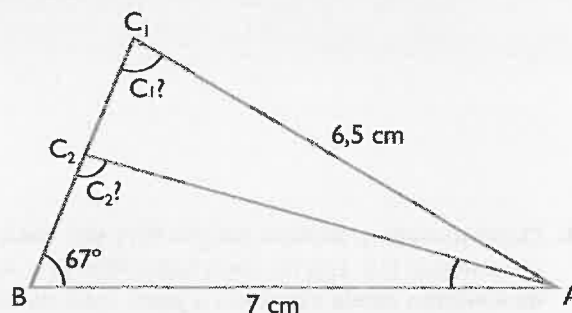
7. Nun triángulo coñécese:

$$b = 6,5 \text{ cm}, c = 7 \text{ cm} \text{ e } B = 67^\circ$$

Calcula o ángulo C . Cantas solucións ten?

Solución:

Datos:



$$\frac{6,5}{\sin 67^\circ} = \frac{7}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{7 \cdot \sin 67^\circ}{6,5}$$

$$C_1 = 82^\circ 26' 32'' \Rightarrow B + C_1 < 180^\circ$$

$$C_2 = 97^\circ 33' 28'' \Rightarrow B + C_2 < 180^\circ$$

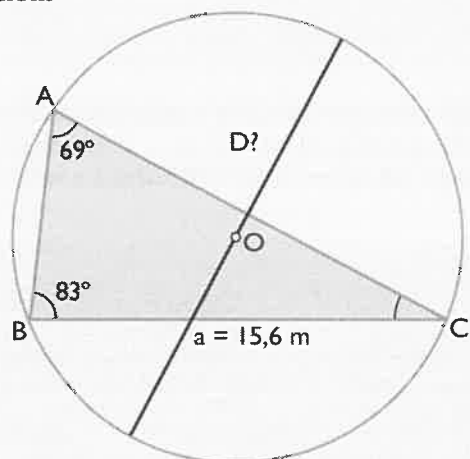
Ten dúas solucións.

8. Dun triángulo coñécese:

$$a = 15,6 \text{ m}, A = 69^\circ \text{ e } B = 83^\circ$$

Atopa a lonxitude do diámetro da circunferencia circuncrita.

Solución:



$$D = \frac{15,6}{\sin 69^\circ} = 16,71 \text{ m}$$

9. Nun triángulo coñécese:

$$a = 5 \text{ m}, b = 8 \text{ m e } A = 72^\circ$$

Calcula o ángulo B. Cantas solucións ten?

Solución:

$$\frac{5}{\sin 72^\circ} = \frac{8}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{8 \cdot \sin 72^\circ}{5} = 1,52$$

Non ten solución porque: $\sin B = 1,52 > 1$

10. Nun triángulo coñécese:

$$b = 7,5 \text{ cm}, A = 98^\circ \text{ e } B = 87^\circ$$

Calcula o lado a. Cantas solucións ten?

Solución:

Non hai solución porque:

$$A + B = 98^\circ + 87^\circ = 185^\circ > 180^\circ$$

3. Teorema do coseno

■ Pensa e calcula

Un triángulo é acutángulo, rectángulo ou obtusángulo segundo o cadrado do lado maior sexa, respectivamente, menor, igual ou maior que a suma dos cadrados dos outros dous lados.

Clasifica mentalmente os seguintes triángulos:

a) $a = 2 \text{ m}, b = 3 \text{ m}, c = 4 \text{ m}$

b) $a = 3 \text{ m}, b = 4 \text{ m}, c = 5 \text{ m}$

c) $a = 4 \text{ m}, b = 5 \text{ m}, c = 6 \text{ m}$

Solución:

a) $16 > 13 \Rightarrow$ Obtusángulo.

b) $25 = 25 \Rightarrow$ Rectángulo.

c) $36 < 41 \Rightarrow$ Acutángulo.

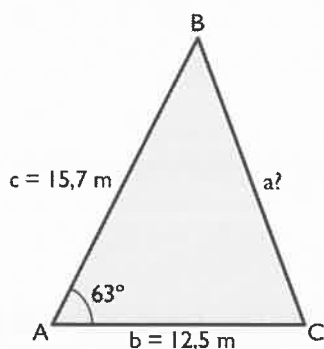
● Aplica a teoría

11. Nun triángulo coñécese:

$$b = 12,5 \text{ m}, c = 15,7 \text{ m e } A = 63^\circ$$

Calcula o lado a.

Solución:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = 12,5^2 + 15,7^2 - 2 \cdot 12,5 \cdot 15,7 \cdot \cos 63^\circ$$

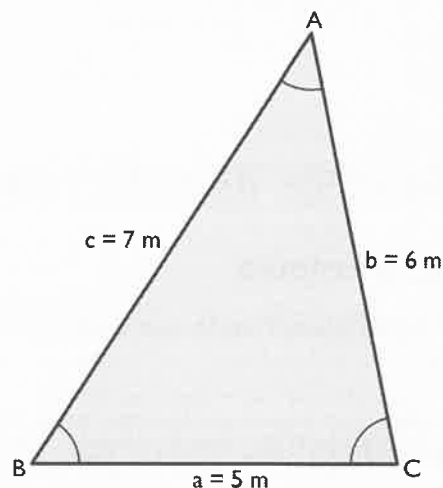
$$a = 14,98 \text{ m}$$

12. Nun triángulo coñécese os tres lados:

$$a = 5 \text{ m}, b = 6 \text{ m e } c = 7 \text{ m}$$

Calcula o ángulo A.

Solución:



$$\cos A = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = 0,7143$$

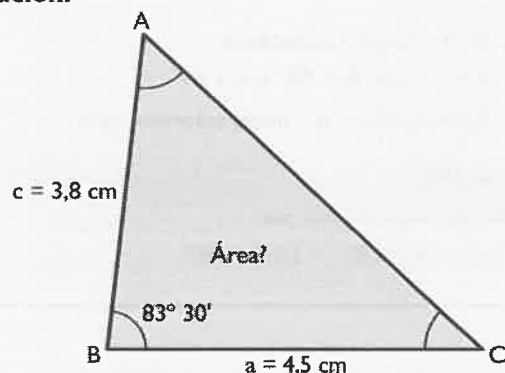
$$A = 44^\circ 24' 51''$$

13. Nun triángulo coñécese:

$$a = 4,5 \text{ cm}, c = 3,8 \text{ cm e } B = 83^\circ 30'$$

Calcula a súa área.

Solución:



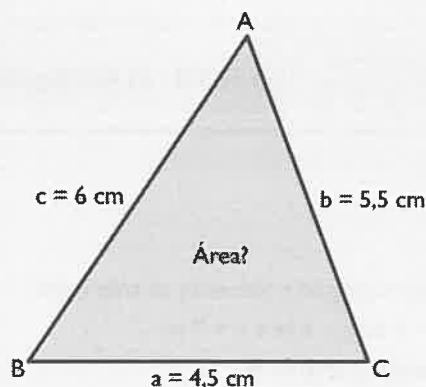
$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 3,8 \cdot \sin 83^\circ 30' = 8,5 \text{ cm}^2$$

14. Nun triángulo coñécese os tres lados:

$$a = 4,5 \text{ cm}, b = 5,5 \text{ cm e } c = 6 \text{ cm}$$

Calcula a área.

Solución:



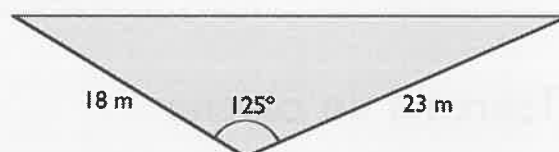
$$\text{Semiperímetro} = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \sqrt{8(8 - 4,5)(8 - 5,5)(8 - 6)} = 11,83 \text{ cm}^2$$

15. Un terreo ten forma de triángulo. Coñécese dous lados, que miden 18 m e 23 m, e o ángulo que forman, que é de 125° . O m^2 vale 30 €. Calcula o valor do terreo.



Solución:



$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 23 \cdot \sin 125^\circ = 169,56 \text{ m}^2$$

$$\text{Prezo} = 169,56 \cdot 30 = 5\,086,8 \text{ €}$$

4. Resolución de triángulos non rectángulos

Pensa e calcula

Nun triángulo calquera, sábese que $\sin A = 1/2$. Calcula mentalmente canto mide o ángulo A. Cantas solucións pode ter, unha ou dúas?

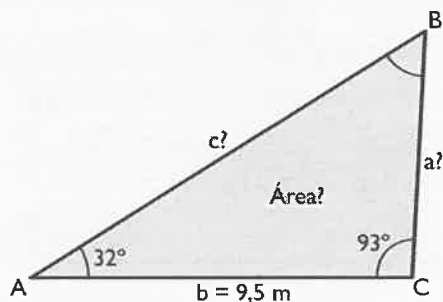
Solución:

Ten dúas solucións: $A = 30^\circ$ e $A = 150^\circ$

● Aplica a teoría

16. Resolve un triángulo no que se coñecen: $b = 9,5$ m, $A = 32^\circ$ e $C = 93^\circ$

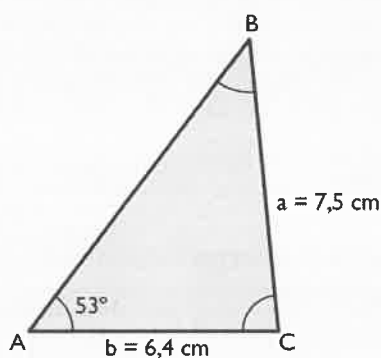
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 9,5$ m	B	$B = 180^\circ - (A + C)$	$B = 180^\circ - (32^\circ + 93^\circ) = 55^\circ$
$A = 32^\circ$	a	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$	$a = \frac{9,5 \cdot \sin 32^\circ}{\sin 55^\circ} = 6,15$ m
$C = 93^\circ$	c	$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$	$c = \frac{6,15 \cdot \sin 93^\circ}{\sin 32^\circ} = 11,59$ m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \sin C$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 6,15 \cdot 9,5 \cdot \sin 93^\circ = 29,17$ m ²

17. Resolve un triángulo no que se coñecen: $a = 7,5$ cm, $b = 6,4$ cm e $A = 53^\circ$

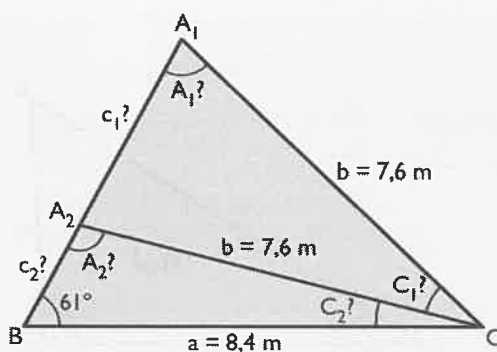
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 7,5$ cm	B	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$	$\sin B = \frac{6,4 \cdot \sin 53^\circ}{7,5} = B_1 = 42^\circ 57' 40''$ Como o ángulo suplementario de B_1 ten o mesmo seno, pode existir un B_2 . $B_2 = 180^\circ - 42^\circ 57' 40'' = 137^\circ 2' 20''$ (Non é válido)
$b = 6,4$ cm	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$C = 180^\circ - (53^\circ + 42^\circ 57' 40'') = 84^\circ 2' 20''$
$A = 53^\circ$	c	$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$	$c = \frac{7,5 \cdot \sin 84^\circ 2' 20''}{\sin 53^\circ} = 9,34$ cm
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \sin C$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 6,4 \cdot \sin 84^\circ = 23,87$ cm ²

18. Resolve un triángulo no que se coñecen: $a = 8,4$ m, $b = 7,6$ m e $B = 61^\circ$

Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 8,4$ m $b = 7,6$ m $B = 61^\circ$	A	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A = \frac{a \cdot \sin B}{b}$	$\sin A = \frac{8,4 \cdot \sin 61^\circ}{7,6} = A_1 = 75^\circ 10' 8''$ Como o ángulo suplementario de A_1 ten o mesmo seno, pode existir un A_2 . $A_2 = 180^\circ - 75^\circ 10' 8'' = 104^\circ 49' 52''$
	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$C_1 = 180^\circ - (75^\circ 10' 8'' + 61^\circ) = 43^\circ 49' 52''$ $C_2 = 180^\circ - (104^\circ 49' 52'' + 61^\circ) = 14^\circ 10' 8''$
	c	$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{b \cdot \sin C}{\sin B}$	$c_1 = \frac{7,6 \cdot \sin 43^\circ 49' 52''}{\sin 61^\circ} = 6,02$ m $c_2 = \frac{7,6 \cdot \sin 14^\circ 10' 8''}{\sin 61^\circ} = 2,13$ m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \sin C$	$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 8,4 \cdot 7,6 \cdot \sin 43^\circ 49' 52'' = 22,11$ m ² $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 8,4 \cdot 7,6 \cdot \sin 14^\circ 10' 8'' = 7,81$ m ²

19. Resolve un triángulo no que se coñecen:

$a = 7$ cm, $c = 5$ cm e $C = 65^\circ$

Solución:

$$\frac{7}{\sin A} = \frac{5}{\sin 65^\circ}$$

$$\sin A = \frac{7 \cdot \sin 65^\circ}{5} = 1,27$$

Non ten solución.

5. Terceiro e cuarto casos de resolución de triángulos

Pensa e calcula

Clasifica os seguintes triángulos en posibles e imposibles. Razona a resposta.

a) Triángulo 1: $a = 5$ m, $b = 7$ m, $c = 9$ m

b) Triángulo 2: $a = 5$ m, $b = 10$ m, $c = 20$ m

Solución:

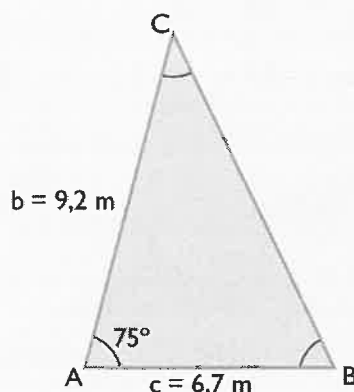
a) É posible: $5 + 7 > 9$. A suma dos dous lados menores é superior ao maior.

b) É imposible: $5 + 10 < 20$

Aplica la teoría

20. Resuelve un triángulo no que se conocen: $b = 9,2$ m, $c = 6,7$ m e $A = 75^\circ$

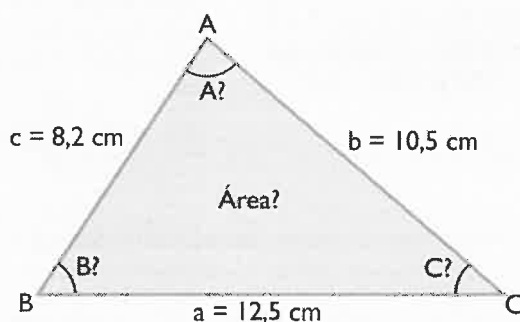
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 9,2$ m $c = 6,7$ m $A = 75^\circ$	a	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$	$a = \sqrt{9,2^2 + 6,7^2 - 2 \cdot 9,2 \cdot 6,7 \cdot \cos 75^\circ}$ $a = 9,88$ m
	C	$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$	$\sin C = \frac{6,7 \cdot \sin 75^\circ}{9,88} \Rightarrow C = 40^\circ 55' 19''$
	B	$B = 180^\circ - (A + C)$	$B = 180^\circ - (75^\circ + 40^\circ 55' 19'')$ $B = 64^\circ 4' 41''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \sin A$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 9,2 \cdot 6,7 \cdot \sin 75^\circ = 29,77 \text{ m}^2$

21. Resuelve un triángulo no que se conocen: $a = 12,5$ cm, $b = 10,5$ cm e $c = 8,2$ cm

Solución:



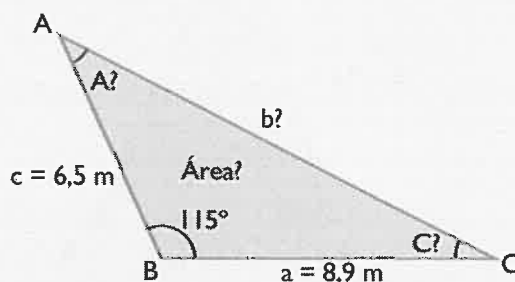
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 12,5$ cm $b = 10,5$ cm $c = 8,2$ cm	A	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$\cos A = \frac{10,5^2 + 8,2^2 - 12,5^2}{2 \cdot 10,5 \cdot 8,2}$ $A = 82^\circ 54' 53''$
	B	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$	$\sin B = \frac{10,5 \cdot \sin 82^\circ 54' 53''}{12,5}$ $B = 56^\circ 28' 8''$
	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$C = 180^\circ - (82^\circ 54' 53'' + 56^\circ 28' 8'')$ $C = 40^\circ 36' 59''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \sin C$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 12,5 \cdot 10,5 \cdot \sin 40^\circ 36' 59''$ $\text{Área} = 42,72 \text{ cm}^2$

22. Resolve un triángulo no que se coñecen: $a = 5,3$ cm, $b = 9,5$ cm e $c = 4,1$ cm
 Cantas solucións ten?

Solución: Non ten solución porque: $5,3 + 4,1 < 9,5$

23. Resolve un triángulo no que se coñecen: $a = 8,9$ m, $c = 6,5$ m e $B = 115^\circ$

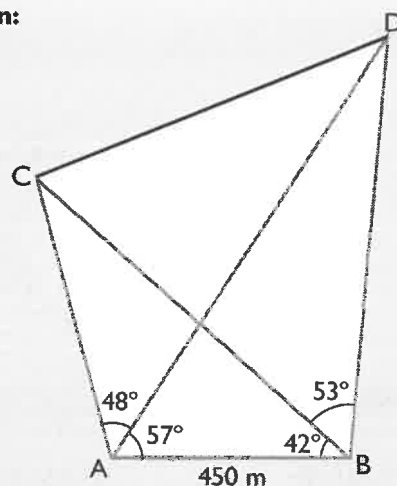
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 8,9$ m	b	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$	$b = \sqrt{8,9^2 + 6,5^2 - 2 \cdot 8,9 \cdot 6,5 \cdot \cos 115^\circ}$ $b = 13,05$ m
$c = 6,5$ m	A	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A = \frac{a \cdot \sin B}{b}$	$\sin A = \frac{8,9 \cdot \sin 115^\circ}{13,05} \Rightarrow A = 38^\circ 10' 38''$
$B = 115^\circ$	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$C = 180^\circ - (38^\circ 10' 38'' + 115^\circ)$ $C = 26^\circ 49' 22''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ac \sin B$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 8,9 \cdot 6,5 \cdot \sin 115^\circ = 26,21$ m ²

24. Atopa a distancia que hai entre dous barcos C e D, sabendo que medimos a distancia que hai entre A e B e obtivemos 450 m, e que co teodolito obtivemos que $CAD = 48^\circ$, $BAD = 57^\circ$, $ABC = 42^\circ$ e $CBD = 53^\circ$.

Solución:

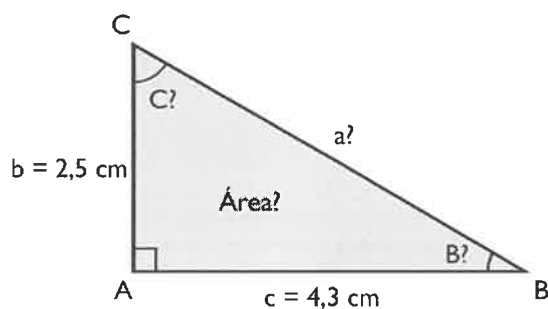


a) No triángulo ABC calcúlase AC.	$ACB = 180^\circ - (48^\circ + 57^\circ + 42^\circ) = 33^\circ$ $\frac{450}{\sin 33^\circ} = \frac{AC}{\sin 42^\circ} \Rightarrow AC = \frac{450 \cdot \sin 42^\circ}{\sin 33^\circ} = 553$ m
b) No triángulo ABD calcúlase AD.	$ADB = 180^\circ - (57^\circ + 42^\circ + 53^\circ) = 28^\circ$ $\frac{450}{\sin 28^\circ} = \frac{AD}{\sin 53^\circ} \Rightarrow AD = \frac{450 \cdot \sin 53^\circ}{\sin 28^\circ} = 955$ m
c) No triángulo ACD calcúlase CD.	$CD^2 = 553^2 + 955^2 - 2 \cdot 553 \cdot 955 \cdot \cos 48^\circ$ $CD = 715$ m

Exercicios e problemas

1. Resolución de triángulos rectángulos

25. Nun triángulo rectángulo coñécese os dous catetos $b = 2,5$ cm e $c = 4,3$ cm. Calcula os demais elementos.

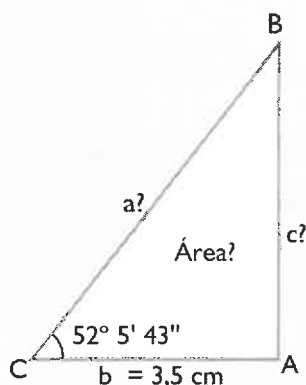


Solución:

Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 2,5$ cm	a	$a^2 = b^2 + c^2$	$a = 4,97$ cm
$c = 4,3$ cm	B	$\tan B = \frac{b}{c}$	$\tan B = \frac{2,5}{4,3} \Rightarrow B = 30^\circ 10' 25''$
	C	$C = 90^\circ - B$	$C = 59^\circ 49' 35''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 4,3 = 5,38$ cm ²

26. Nun triángulo rectángulo coñécese un ángulo agudo, $C = 52^\circ 5' 43''$, e o cateto contiguo, $b = 3,5$ cm. Calcula os demais elementos.

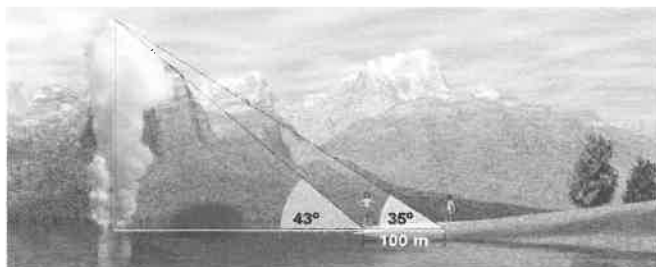
Solución:



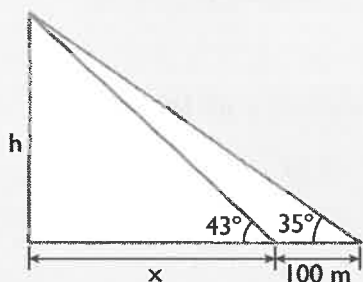
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 3,5$ cm	B	$B = 90^\circ - C$	$B = 90^\circ - 52^\circ 5' 43'' = 37^\circ 54' 17''$
$C = 52^\circ 5' 43''$	a	$\cos C = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\cos C}$	$a = \frac{3,5}{\cos 52^\circ 5' 43''} = 5,7$ cm
	c	$\tan C = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \tan C$	$c = 3,5 \cdot \tan 52^\circ 5' 43'' = 4,5$ cm
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 4,5 = 7,88$ cm ²

Exercicios e problemas

27. No centro dun lago sae verticalmente un chorro de auga e quérese medir a súa altura. Para isto mídese o ángulo de elevación dende a beira á parte máis alta do chorro de auga e obtense 43° ; tras distanciarse 100 m do lago, vólvese medir o ángulo de elevación e obtense 35° . Calcula a altura do chorro de auga.



Solución:



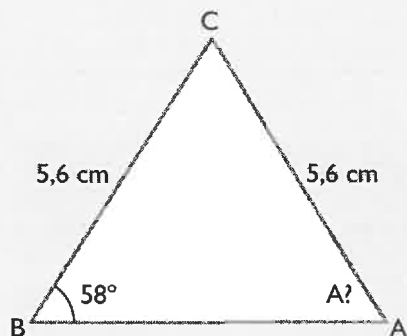
$$\left. \begin{aligned} \tan 43^\circ &= \frac{h}{x} \\ \tan 35^\circ &= \frac{h}{100 + x} \end{aligned} \right\} h = 281,07$$

Altura = 281,07 m

2. Teorema dos senos

28. Nun triángulo coñécese:
 $a = 5,6$ cm, $b = 5,6$ cm e $B = 58^\circ$
 Calcula mentalmente o ángulo **A**. Cantas solucións ten o devandito ángulo?

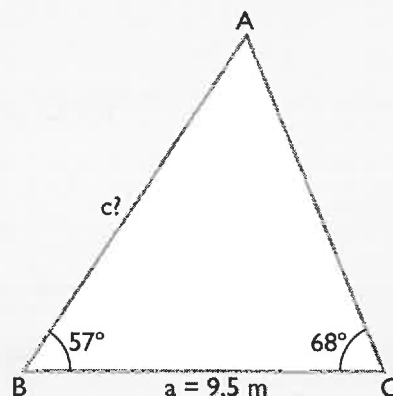
Solución:



O triángulo é isósceles.
 $A = 58^\circ$
 A solución é única.

29. Nun triángulo coñécese:
 $a = 9,5$ m, $B = 57^\circ$ e $C = 68^\circ$
 Calcula o lado **c**. Cantas solucións ten?

Solución:



$$A = 180^\circ - (57^\circ + 68^\circ) = 55^\circ$$

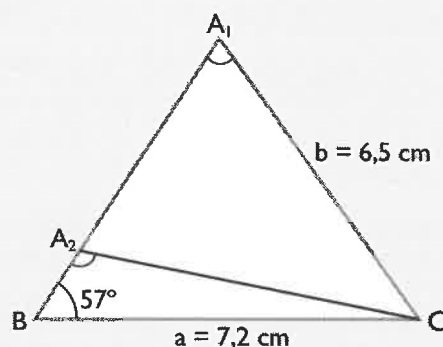
$$\frac{9,5}{\sin 55^\circ} = \frac{c}{\sin 68^\circ}$$

$$c = \frac{9,5 \cdot \sin 68^\circ}{\sin 55^\circ} = 10,75 \text{ m}$$

Ten unha solución.

30. Nun triángulo coñécese:
 $a = 7,2$ cm, $b = 6,5$ cm e $B = 57^\circ$
 Calcula o ángulo **A**. Cantas solucións ten?

Solución:



$$\frac{7,2}{\sin A} = \frac{6,5}{\sin 57^\circ} \Rightarrow \sin A = \frac{7,2 \cdot \sin 57^\circ}{6,5}$$

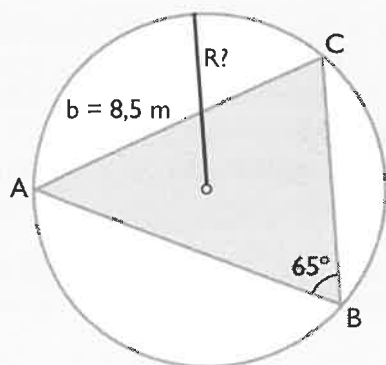
$$A_1 = 68^\circ 16' 40'' \Rightarrow A_1 + B < 180^\circ$$

$$A_2 = 111^\circ 43' 20'' \Rightarrow A_2 + B < 180^\circ$$

Ten dúas solucións.

31. Dun triángulo coñécese:
 $b = 8,5$ m e $B = 65^\circ$
 Encontra a lonxitude do radio da circunferencia circuncrita.

Solución:



$$D = 8,5 / \sin 65^\circ = 9,38 \text{ m}$$

$$R = 9,38 / 2 = 4,69 \text{ m}$$

32. Nun triángulo coñécese: $b = 7 \text{ cm}$, $c = 8,5 \text{ cm}$ e $B = 92^\circ$.
Calcula o ángulo **C**. Cantas solucións ten?

Solución:

$$\frac{7}{\sin 92^\circ} = \frac{8,5}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{8,5 \cdot \sin 92^\circ}{7} = 1,21$$

No ten solución porque: $\sin C = 1,21 > 1$

33. Nun triángulo coñécese::
 $c = 7,5 \text{ m}$, $B = 125^\circ$ e $C = 73^\circ$
Calcula o lado **b**. Cantas solucións ten?

Solución:

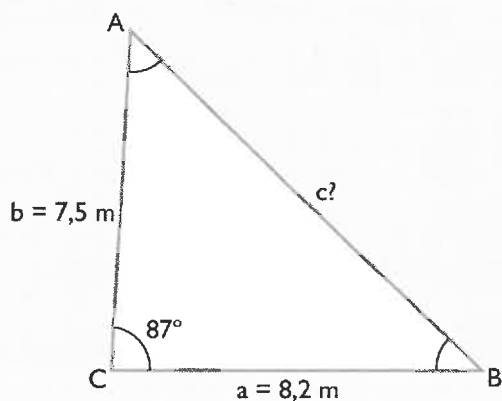
$$B + C = 125^\circ + 73^\circ = 198^\circ > 180^\circ$$

Non ten solución.

3. Teorema do coseno

34. Nun triángulo coñécese::
 $a = 8,2 \text{ m}$, $b = 7,5 \text{ m}$ e $C = 87^\circ$
Calcula o lado **c**.

Solución:



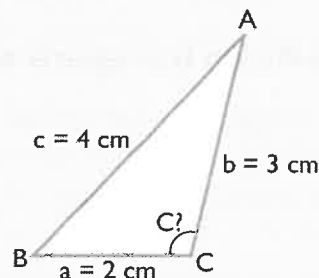
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c = \sqrt{8,2^2 + 7,5^2 - 2 \cdot 8,2 \cdot 7,5 \cdot \cos 87^\circ}$$

$$c = 10,82 \text{ m}$$

35. Nun triángulo coñécese os tres lados:
 $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ e $c = 4 \text{ cm}$
Calcula o ángulo **C**.

Solución:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

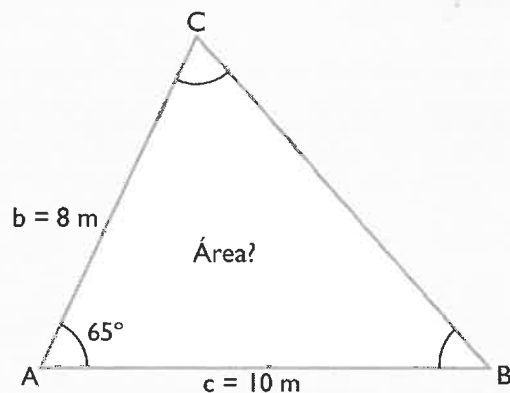
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos C = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$C = 104^\circ 28' 39''$$

36. Nun triángulo coñécese:
 $b = 8 \text{ m}$, $c = 10 \text{ m}$ e $A = 65^\circ$
Calcula a súa área.

Solución:



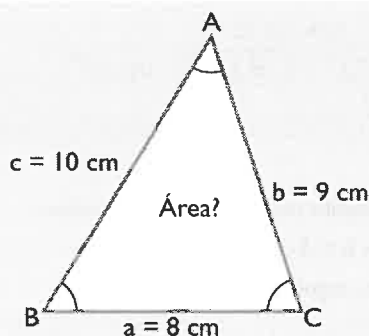
$$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sin 65^\circ = 36,25 \text{ m}^2$$

37. Nun triángulo coñécese os tres lados:
 $a = 8 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$ e $c = 10 \text{ cm}$
Calcula a área.

Exercicios e problemas

Solución:



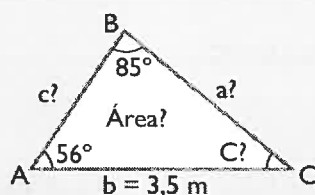
$$\text{Semiperímetro} = 13,5$$

$$\text{Área} = \sqrt{13,5(13,5 - 8)(13,5 - 9)(13,5 - 10)} = 34,2 \text{ cm}^2$$

4. Resolución de triángulos no rectángulos

38. Resuelve un triángulo no que se coñecen: $b = 3,5 \text{ m}$, $A = 56^\circ$ e $B = 85^\circ$

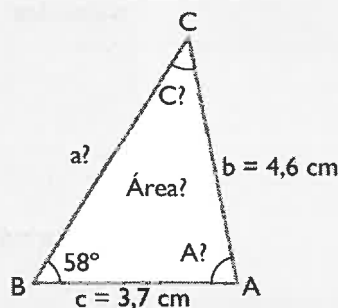
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 3,5 \text{ m}$ $A = 56^\circ$ $B = 85^\circ$	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$C = 180^\circ - (56^\circ + 85^\circ) = 39^\circ$
	a	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$	$a = \frac{3,5 \cdot \sin 56^\circ}{\sin 85^\circ} = 2,91 \text{ m}$
	c	$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{b \cdot \sin C}{\sin B}$	$c = \frac{3,5 \cdot \sin 39^\circ}{\sin 85^\circ} = 2,21 \text{ m}$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \sin C$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2,91 \cdot 3,5 \cdot \sin 39^\circ = 3,2 \text{ m}^2$

39. Resuelve un triángulo no que se coñecen: $b = 4,6 \text{ cm}$, $c = 3,7 \text{ cm}$ e $B = 58^\circ$

Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 4,6 \text{ cm}$ $c = 3,7 \text{ cm}$ $B = 58^\circ$	C	$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin C = \frac{c \cdot \sin B}{b}$	$\sin C = \frac{3,7 \cdot \sin 58^\circ}{4,6} \Rightarrow C_1 = 43^\circ 36''$ Como o ángulo suplementario de C_1 ten o mesmo seno, pode existir un C_2 . $C_2 = 180^\circ - 43^\circ 36'' = 136^\circ 59' 24''$ (Non é válido)
	A	$A = 180^\circ - (B + C)$	$A = 180^\circ - (58^\circ + 43^\circ 36'') = 78^\circ 59' 24''$
	a	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$	$a = \frac{4,6 \cdot \sin 78^\circ 59' 24''}{\sin 58^\circ} = 5,32 \text{ cm}$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ac \sin B$	$A = \frac{1}{2} \cdot 5,32 \cdot 3,7 \cdot \sin 58^\circ = 8,35 \text{ cm}^2$

40. Resuelve un triángulo no que se coñecen:

$$b = 5,2 \text{ m}$$

$$c = 4,3 \text{ m}$$

$$C = 73^\circ$$

Cantas solucións ten?

Solución:

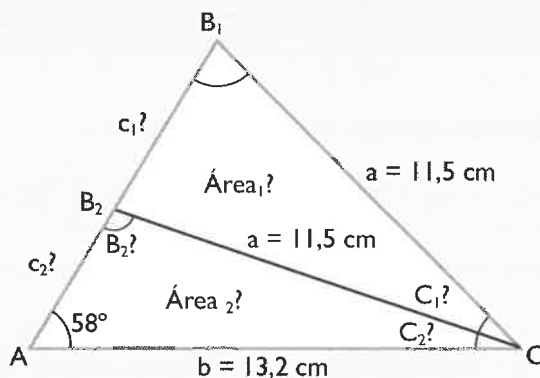
$$\frac{5,2}{\sin B} = \frac{4,3}{\sin 73^\circ}$$

$$\sin B = \frac{5,2 \cdot \sin 73^\circ}{4,3} = 1,16$$

Non ten solución porque: $\sin B = 1,16 > 1$

41. Resuelve un triángulo no que se coñecen: $a = 11,5 \text{ cm}$, $b = 13,2 \text{ cm}$ e $A = 58^\circ$

Solución:

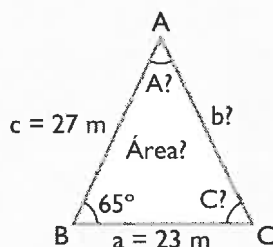


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 11,5 \text{ cm}$	B	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$	$\sin B = \frac{13,2 \cdot \sin 58^\circ}{11,5} \Rightarrow B_1 = 76^\circ 45' 29''$
$b = 13,2 \text{ cm}$			Como o ángulo suplementario de B_1 ten o mesmo seno, pode existir un B_2 .
$A = 58^\circ$	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$B_2 = 180^\circ - 76^\circ 45' 29'' = 103^\circ 14' 31''$
			$C_1 = 180^\circ - (58^\circ + 76^\circ 45' 29'') = 45^\circ 14' 31''$
			$C_2 = 180^\circ - (58^\circ + 103^\circ 14' 31'') = 18^\circ 45' 29''$
	c	$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$	$c_1 = \frac{11,5 \cdot \sin 45^\circ 14' 31''}{\sin 58^\circ} = 9,63 \text{ cm}$
			$c_2 = \frac{11,5 \cdot \sin 18^\circ 45' 29''}{\sin 58^\circ} = 4,36 \text{ cm}$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \sin C$	$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 11,5 \cdot 13,2 \cdot \sin 45^\circ 14' 31'' = 53,9 \text{ cm}^2$
			$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 11,5 \cdot 13,2 \cdot \sin 18^\circ 45' 29'' = 24,41 \text{ cm}^2$

5. Terceiro e cuarto casos de resolución de triángulos

42. Resuelve un triángulo no que se coñecen: $a = 23 \text{ m}$, $c = 27 \text{ m}$ e $B = 65^\circ$

Solución:

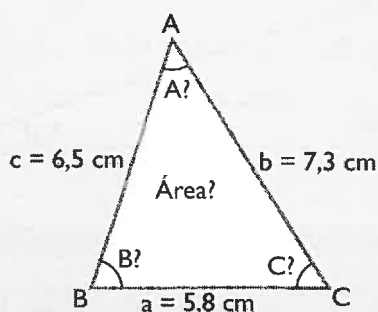


Exercicios e problemas

Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 23 \text{ m}$	b	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$	$b = \sqrt{23^2 + 27^2 - 2 \cdot 23 \cdot 27 \cdot \cos 65^\circ}$ $b = 27,08 \text{ m}$
$c = 27 \text{ m}$	A	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A = \frac{a \cdot \sin B}{b}$	$\sin A = \frac{23 \cdot \sin 65^\circ}{27,08} \Rightarrow A = 50^\circ 19' 56''$
$B = 65^\circ$	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$C = 180^\circ - (50^\circ 19' 56'' + 65^\circ)$ $C = 64^\circ 40' 4''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ac \sin B$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 23 \cdot 27 \cdot \sin 65^\circ = 281,41 \text{ m}^2$

43. Resolve un triángulo no que se coñecen: $a = 5,8 \text{ cm}$, $b = 7,3 \text{ cm}$ e $c = 6,5 \text{ cm}$

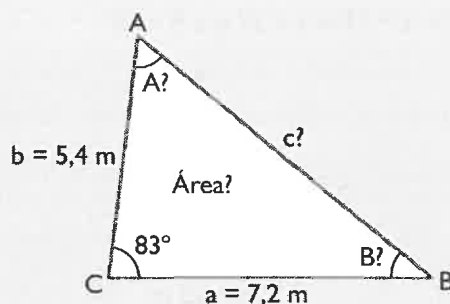
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 5,8 \text{ cm}$	A	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$\cos A = \frac{7,3^2 + 6,5^2 - 5,8^2}{2 \cdot 7,3 \cdot 6,5}$ $A = 49^\circ 17' 15''$
$b = 7,3 \text{ cm}$	B	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$	$\sin B = \frac{7,3 \cdot \sin 49^\circ 17' 15''}{5,8}$ $B = 72^\circ 33' 31''$
$c = 6,5 \text{ cm}$	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$C = 180^\circ - (49^\circ 17' 15'' + 72^\circ 33' 31'')$ $C = 58^\circ 9' 14''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \sin C$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 5,8 \cdot 7,3 \cdot \sin 58^\circ 9' 14''$ $\text{Área} = 17,98 \text{ cm}^2$

44. Resolve un triángulo no que se coñecen: $a = 7,2 \text{ m}$, $b = 5,4 \text{ m}$ e $C = 83^\circ$

Solución:



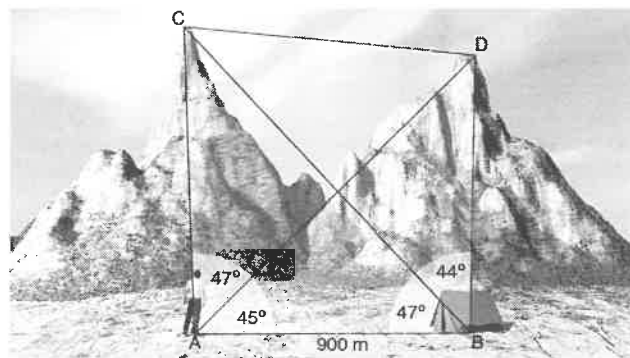
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 7,2 \text{ m}$	c	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$	$c = \sqrt{7,2^2 + 5,4^2 - 2 \cdot 7,2 \cdot 5,4 \cdot \cos 83^\circ}$ $c = 8,46 \text{ m}$
$b = 5,4 \text{ m}$	A	$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{a \cdot \sin C}{c}$	$\sin A = \frac{7,2 \cdot \sin 83^\circ}{8,46} \Rightarrow A = 57^\circ 38' 31''$
$C = 83^\circ$	B	$B = 180^\circ - (A + C)$	$B = 180^\circ - (57^\circ 38' 31'' + 83^\circ)$ $B = 39^\circ 21' 29''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \sin C$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 7,2 \cdot 5,4 \cdot \sin 83^\circ = 19,3 \text{ m}^2$

45. Resuelve un triángulo no que se coñecen: $a = 47 \text{ cm}$, $b = 52 \text{ cm}$ e $c = 99 \text{ cm}$. Cantas solucións ten?

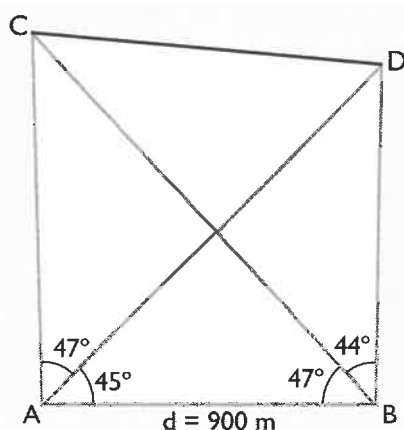
Solución:

Non ten solución porque: $47 + 52 = 99$

46. Atopa a distancia que hai entre os picos de dúas montañas C e D, sabendo que se mediu nunha chaira próxima a distancia que hai entre A e B e se obtivo 900 m, e que co teodolito se obtivo que $CAD = 47^\circ$, $BAD = 45^\circ$, $ABC = 47^\circ$ e $CBD = 44^\circ$.



Solución:

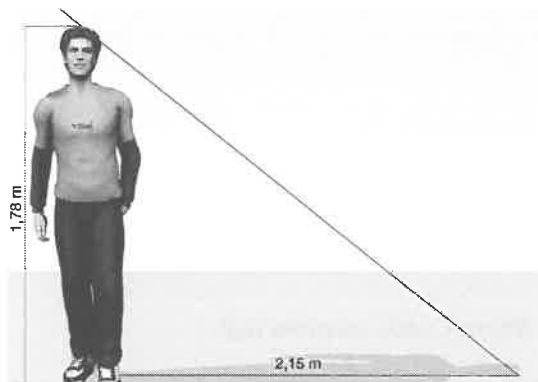


a) No triángulo ABC calcúlase AC.	$ACB = 180^\circ - (47^\circ + 45^\circ + 47^\circ) = 41^\circ$ $\frac{900}{\sin 41^\circ} = \frac{AC}{\sin 47^\circ} \Rightarrow AC = \frac{900 \cdot \sin 47^\circ}{\sin 41^\circ} = 1003 \text{ m}$
b) No triángulo ABD calcúlase AD.	$ADB = 180^\circ - (45^\circ + 47^\circ + 44^\circ) = 44^\circ$ $\frac{900}{\sin 44^\circ} = \frac{AD}{\sin 91^\circ} \Rightarrow AD = \frac{900 \cdot \sin 91^\circ}{\sin 44^\circ} = 1295 \text{ m}$
c) No triángulo ACD calcúlase CD.	$CD^2 = 1003^2 + 1295^2 - 2 \cdot 1003 \cdot 1295 \cdot \cos 47^\circ$ $CD = 955 \text{ m}$

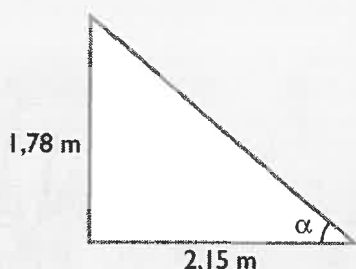
Exercicios e problemas

Para ampliar

47. Unha persoa que mide 1,78 m proxecta unha sombra de 2,15 m. Cal é o ángulo de elevación do Sol nese preciso momento?



Solución:



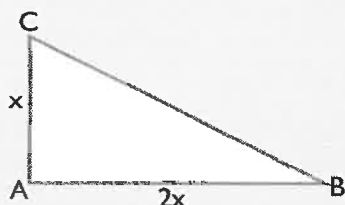
Ángulo de elevación = α

$$\tan \alpha = 1,78/2,15$$

$$\alpha = 39^\circ 37' 18''$$

48. Nun triángulo rectángulo, un cateto mide o dobre que o outro. Calcula a amplitude dos seus ángulos agudos.

Solución:

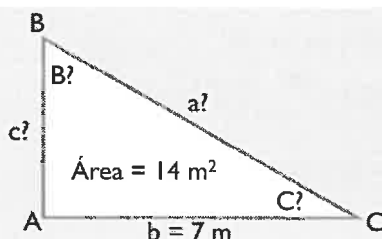


$$\tan B = 1/2 \Rightarrow B = 26^\circ 33' 54''$$

$$C = 63^\circ 26' 6''$$

49. Nun triángulo rectángulo, un cateto mide 7 m e a área 14 m^2 . Atopa os demais elementos do triángulo rectángulo.

Solución:



$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c$$

$$14 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot c \Rightarrow c = 4 \text{ m}$$

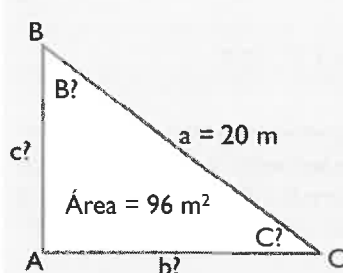
$$\tan B = 7/4 \Rightarrow B = 60^\circ 15' 18''$$

$$C = 29^\circ 44' 42''$$

$$a = \sqrt{7^2 + 4^2} = 8,06 \text{ m}$$

50. Nun triángulo rectángulo, a hipotenusa mide 20 m e a área 96 m^2 . Atopa os demais elementos do triángulo rectángulo.

Solución:



$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} b \cdot c &= 96 \\ b^2 + c^2 &= 20^2 \end{aligned} \right\}$$

obtense:

$$b = 16 \text{ m}, c = 12 \text{ m}$$

$$\tan B = \frac{16}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 53^\circ 7' 48'', C = 36^\circ 52' 12''$$

51. Calcula mentalmente o radio dunha circunferencia circunscrita a un triángulo no que un lado mide 7 m e o ángulo oposto 30° .

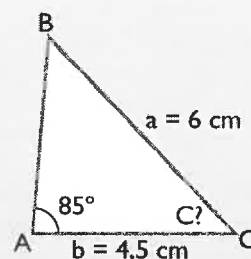
Solución:

$$D = \frac{7}{\sin 30^\circ} = 7 : \frac{1}{2} = 7 \cdot 2 = 14 \text{ m}$$

$$\text{Radio} = 14/2 = 7 \text{ m}$$

52. Nun triángulo coñécese: $a = 6 \text{ cm}$, $b = 4,5 \text{ cm}$ e $A = 85^\circ$. Calcula o ángulo C. Cantas solucións ten?

Solución:



$$\frac{6}{\sin 85^\circ} = \frac{4,5}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{4,5 \cdot \sin 85^\circ}{6}$$

$$B_1 = 48^\circ 20' 38''$$

$$B_2 = 131^\circ 39' 22'' \text{ (Non é válido)}$$

$$C = 46^\circ 39' 22''$$

Ten unha solución.

Problemas

53. Unha cinta transportadora de carbón chega dende un porto de mar ata unha central térmica. Se a cinta mide 350 m e se quere que eleve o carbón a 50 m de altura, que ángulo de elevación debe levar a cinta?



Solución:



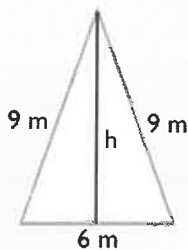
Ángulo de elevación = x

$$\operatorname{sen} x = 50/350$$

$$x = 8^\circ 12' 48''$$

54. Dado un triángulo isósceles no que os lados iguais miden 9 m e o desigual 6 m, calcula a altura relativa ao lado desigual.

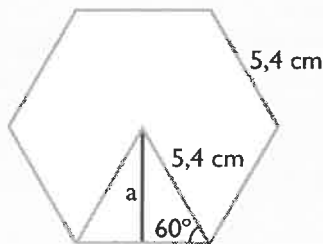
Solución:



$$\text{Altura} = h = \sqrt{9^2 - 3^2} = 8,49 \text{ m}$$

55. Calcula o apotema e a área dun hexágono regular cuxo lado mide 5,4 cm.

Solución:



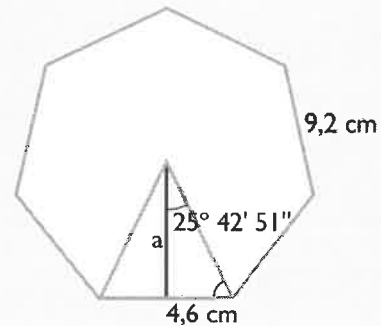
$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{a}{5,4}$$

$$a = 5,4 \operatorname{sen} 60^\circ = 4,68 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 5,4 \cdot 4,68}{2} = 75,82 \text{ cm}^2$$

56. Calcula o apotema e a área dun heptágono regular cuxo lado mide 9,2 cm.

Solución:

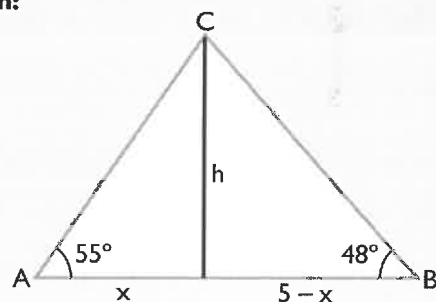


$$\tan 25^\circ 42' 51'' = \frac{4,6}{a} \Rightarrow a = \frac{4,6}{\tan 25^\circ 42' 51''} = 9,55 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{7 \cdot 9,2 \cdot 9,55}{2} = 307,51 \text{ cm}^2$$

57. Dúas persoas están nunha praia e ven un globo dende os puntos A e B, de forma que as dúas persoas e o globo están nun plano perpendicular ao chan. A distancia entre as dúas persoas é de 5 km, o ángulo de elevación do globo dende o punto A é de 55° , e dende o punto B, de 48° . Calcula a altura á que se encontra o mencionado globo.

Solución:



Ao resolver o sistema:

$$\left. \begin{aligned} \tan 55^\circ &= h/x \\ \tan 48^\circ &= \frac{h}{(5-x)} \end{aligned} \right\}$$

obtense:

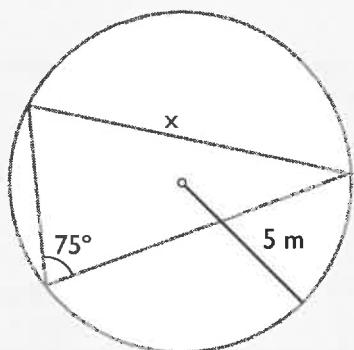
$$x = 2,187 \text{ km}$$

$$h = 3,124 \text{ km}$$

58. Un ángulo dun triángulo mide de amplitude 75° e o radio da circunferencia circunscrita mide 5 m. Atopa a medida do lado oposto ao ángulo dado.

Exercicios e problemas

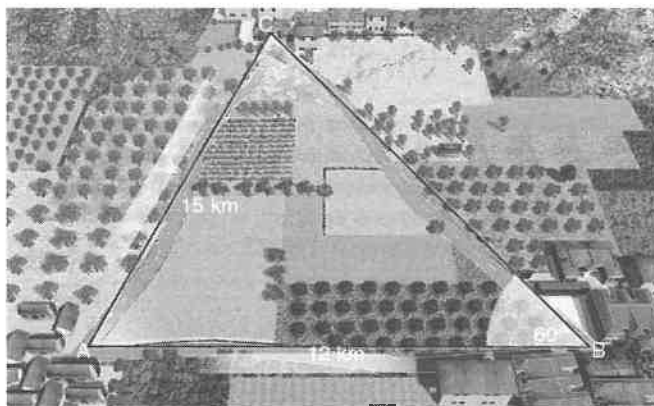
Solución:



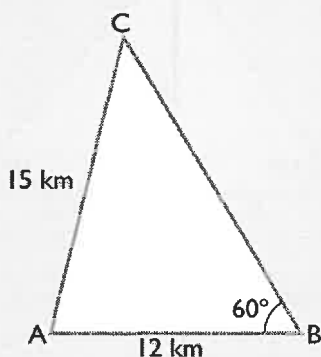
$$\frac{x}{\sin 75^\circ} = 2R$$

$$x = 10 \cdot \sin 75^\circ = 9,66 \text{ m}$$

59. Tres vilas A, B e C están unidas por estradas rectas que forman un triángulo; a distancia de A ata B é de 12 km, de A ata C de 15 km e o ángulo ABC mide 60° . Calcula a distancia da vila B á C.



Solución:



$$\frac{15}{\sin 60^\circ} = \frac{12}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{12 \cdot \sin 60^\circ}{15} \Rightarrow C = 43^\circ 51' 14''$$

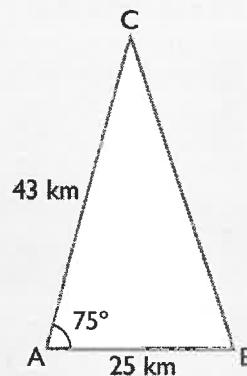
$$A = 180^\circ - (60^\circ + 43^\circ 51' 14'') = 76^\circ 8' 46''$$

$$\frac{BC}{\sin 76^\circ 8' 46''} = \frac{15}{\sin 60^\circ}$$

$$BC = \frac{15 \cdot \sin 76^\circ 8' 46''}{\sin 60^\circ} = 16,82 \text{ km}$$

60. Tres aldeas A, B e C están formando un triángulo. Se a distancia $AB = 25 \text{ km}$, a distancia $AC = 43 \text{ km}$ e o ángulo que se forma en A é de 75° , cal é a distancia que hai entre as aldeas C e B?

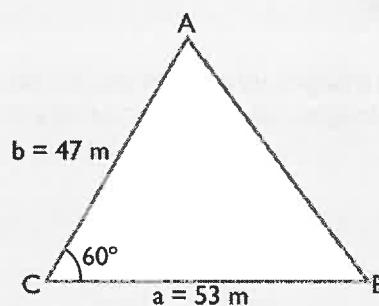
Solución:



$$CB = \sqrt{25^2 + 43^2 - 2 \cdot 25 \cdot 43 \cdot \cos 75^\circ} = 43,79 \text{ km}$$

61. Unha parcela ten forma de triángulo, da que se coñecen: $a = 53 \text{ m}$, $b = 47 \text{ m}$ e $C = 60^\circ$. Calcula a área da parcela.

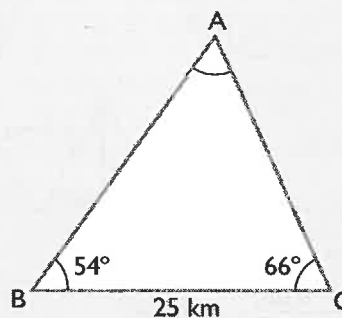
Solución:



$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 53 \cdot 47 \cdot \sin 60^\circ = 1078,63 \text{ m}^2$$

62. Un sinal de socorro dun teléfono móbil A escóitase dende dúas antenas B e C separadas entre si 25 km. O ángulo B mide 54° e o ángulo C mide 66° . Calcula as distancias que hai dende cada unha das antenas B e C ao teléfono móbil.

Solución:

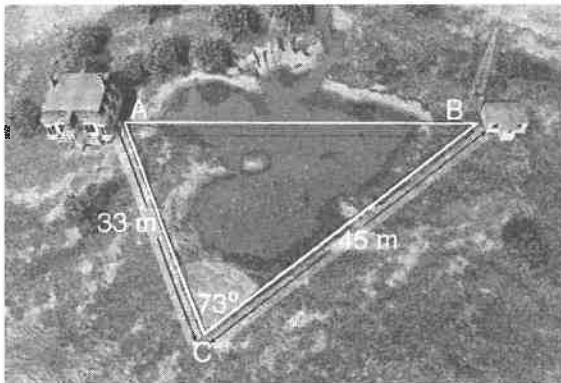


$$A = 180^\circ - (54^\circ + 66^\circ) = 60^\circ$$

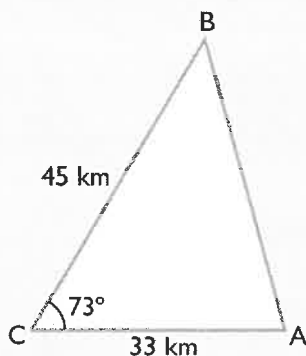
$$\frac{AB}{\sin 66^\circ} = \frac{25}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AB = \frac{25 \cdot \sin 66^\circ}{\sin 60^\circ} = 26,372 \text{ km}$$

$$\frac{AC}{\sin 54^\circ} = \frac{25}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = \frac{25 \cdot \sin 54^\circ}{\sin 60^\circ} = 23,354 \text{ km}$$

63. Dúas torres de alta tensión A e B atópanse separadas por un lago. Tómake un punto auxiliar C e mídense as distancias $AC = 33 \text{ m}$, $BC = 45 \text{ m}$ e o ángulo $C = 73^\circ$. Atopa a distancia que hai entre as devanditas torres.



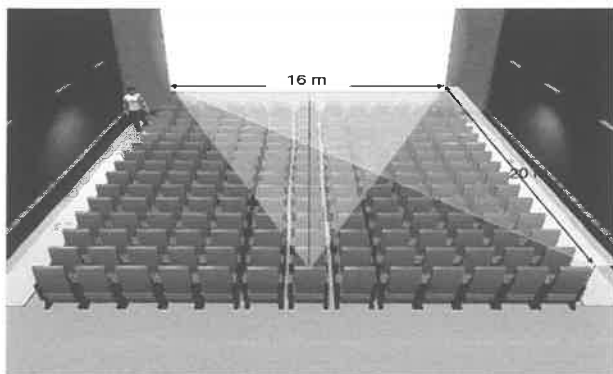
Solución:



$$AB = \sqrt{33^2 + 45^2 - 2 \cdot 33 \cdot 45 \cdot \cos 73^\circ} = 47,39 \text{ m}$$

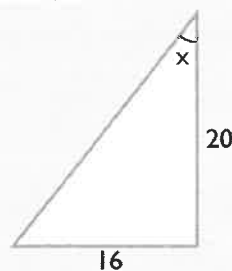
64. A pantalla dun cine ocupa unha lonxitude de 16 m. Se a fila 15 está situada a 20 m da pantalla, atopa o ángulo baixo o que ve un espectador a pantalla e di en que lugar terá mellor visión se está colocado en:

- Unha butaca totalmente lateral.
- Unha butaca totalmente centrada.

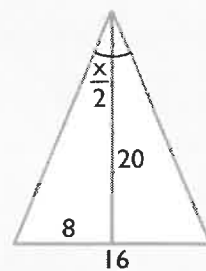


Solución:

a)



b)



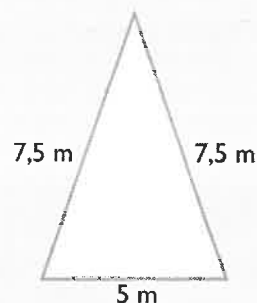
$$\text{a) } \tan x = 16/20 \Rightarrow x = 38^\circ 39' 35''$$

$$\text{b) } \tan x/2 = 8/20 \Rightarrow x/2 = 21^\circ 48' 5'' \Rightarrow x = 43^\circ 36' 10''$$

Vese mellor nunha butaca centrada porque o ángulo é maior.

65. Calcula a área dun triángulo isósceles no que os lados iguais miden 7,5 m, e o desigual, 5 m.

Solución:

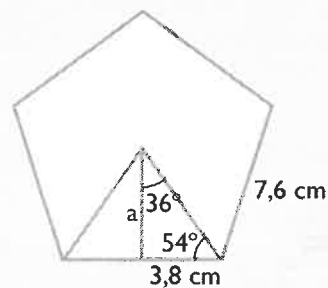


$$\text{Semiperímetro} = 10 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \sqrt{10(10 - 7,5)(10 - 5)} = 17,68 \text{ m}^2$$

66. Calcula a área dun pentágono regular cuxo lado mide 7,6 cm.

Solución:



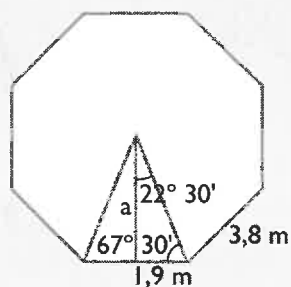
$$\tan 54^\circ = \frac{a}{3,8} \Rightarrow a = 3,8 \cdot \tan 54^\circ = 5,23 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{5 \cdot 7,6 \cdot 5,23}{2} = 99,37 \text{ cm}^2$$

67. Calcula a área dun octógono regular cuxo lado mide 3,8 m.

Exercicios e problemas

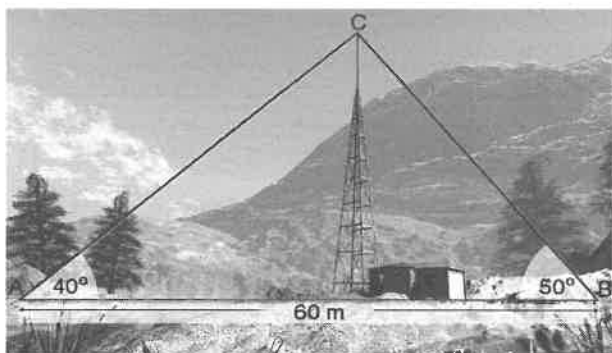
Solución:



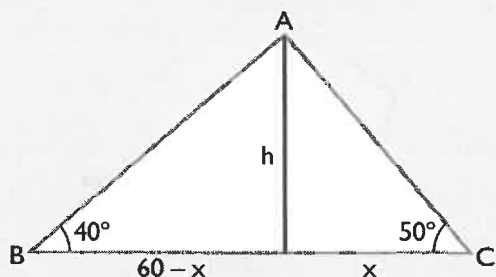
$$\tan 67^\circ 30' = \frac{a}{1,9} \Rightarrow a = 1,9 \cdot \tan 67^\circ 30' = 4,59 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{8 \cdot 3,8 \cdot 4,59}{2} = 69,77 \text{ m}^2$$

68. Unha antena de radio está suxeita por dous cables que van dende a parte máis alta ata o chan. Os puntos de suxeición dos cables e o pé da antena están aliñados. Medíronse os ángulos que forma a horizontal con cada un dos cables e son 40° e 50° . Sabendo que a distancia entre os pés dos cables é de 60 m, calcula a altura da antena.



Solución:



Ao resolver o sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \tan 40^\circ = h/(60 - x) \\ \tan 50^\circ = h/x \end{array} \right\}$$

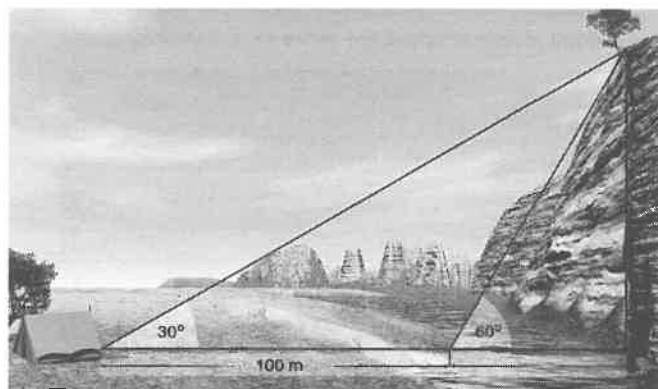
obtense:

$$x = 24,8 \text{ m}$$

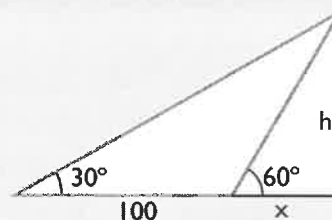
$$h = 29,5 \text{ m}$$

Para profundar

69. Nunha chaira hai unha montaña cortada verticalmente nunha orela dun río. Dende a outra orela vese o punto máis alto da montaña baixo un ángulo de 60° . Afastándose do río perpendicularmente 100 m, o ángulo de elevación mide 30° . Calcula:
- A anchura do río.
 - A altura da montaña.



Solución:



Ao resolver o sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \tan 60^\circ = h/x \\ \tan 30^\circ = h/(100 + x) \end{array} \right\}$$

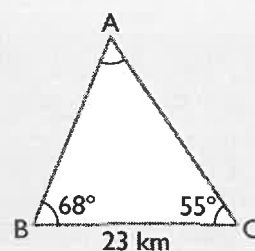
obtense:

$$x = 50 \text{ m}$$

$$h = 86,6 \text{ m}$$

70. Un barco A emite un sinal de socorro que se recibe en dúas estacións de radio B e C. Coñécense os ángulos $\angle ABC = 68^\circ$, $\angle ACB = 55^\circ$ e a distancia entre as estacións de radio, que é de 23 km. Calcula a distancia que hai dende o barco a cada unha das estacións de radio.

Solución:

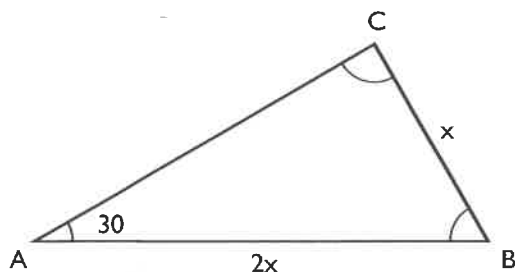


O ángulo A = $180^\circ - (68^\circ + 55^\circ) = 57^\circ$

$$\frac{AC}{\sin 68^\circ} = \frac{23}{\sin 57^\circ} \Rightarrow AC = \frac{23 \cdot \sin 68^\circ}{\sin 57^\circ} = 25,427 \text{ km}$$

$$\frac{AB}{\sin 55^\circ} = \frac{23}{\sin 57^\circ} \Rightarrow AB = \frac{23 \cdot \sin 55^\circ}{\sin 57^\circ} = 22,465 \text{ km}$$

71. Nun triángulo un dos lados é o dobre doutro e o ángulo oposto a este lado menor mide 30° . Calcula canto mide cada un dos outros ángulos.



Solución:

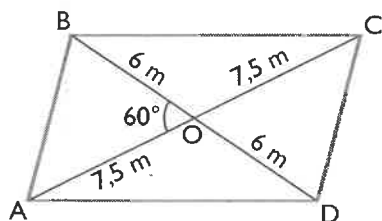
$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{2x}{\sin C}$$

$$\sin C = 2 \sin 30^\circ = 1$$

$$C = 90^\circ$$

$$B = 60^\circ$$

72. As diagonais dun romboide miden 15 m e 12 m e forman un ángulo de 60° . Calcula canto miden os lados.



Solución:

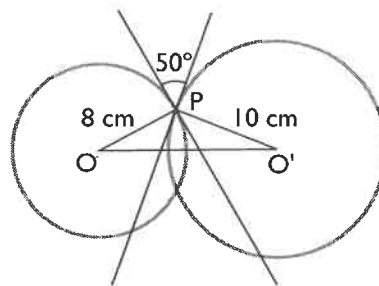
Aplicando o teorema do coseno no triángulo AOB.

$$AB = \sqrt{7,5^2 + 6^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ} = 6,87 \text{ m}$$

Aplicando o teorema do coseno no triángulo AOD.

$$AD = \sqrt{7,5^2 + 6^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ} = 11,72 \text{ m}$$

73. Dúas circunferencias, cuxos radios son de 8 cm e 10 cm, córtanse. O ángulo que forman as tanxentes respectivas no punto de intersección mide 50° . Atopa a distancia entre os dous centros das circunferencias.



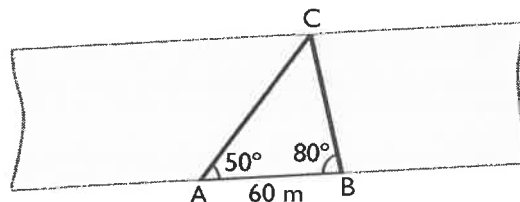
Solución:

$$\angle OPO' = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

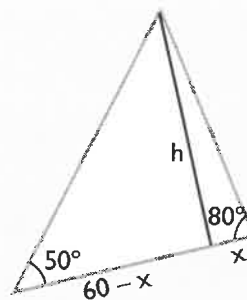
Aplicando o teorema do coseno no triángulo OPO'.

$$OO' = \sqrt{8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 130^\circ} = 16,34 \text{ cm}$$

74. Sobre unha das beiras paralelas dun río tomáronse dous puntos, A e B, a 60 m de distancia entre si. Dende estes puntos mirouse un obxecto, C, sobre a outra beira. As visuais dende os puntos A e B a C forman coa liña AB uns ángulos de 50° e 80° , respectivamente. Calcula a anchura do río.



Solución:



Ao resolver o sistema:

$$\left. \begin{aligned} \tan 80^\circ &= \frac{h}{x} \\ \tan 50^\circ &= \frac{h}{60-x} \end{aligned} \right\}$$

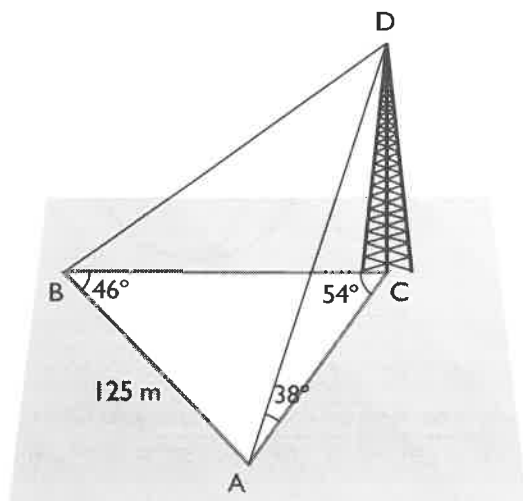
obtense:

$$x = 10,42 \text{ m}$$

$$h = 59,09 \text{ m}$$

75. Deséxase atopar dende o punto A a distancia a unha torre e a súa altura. Por imposibilidade de medir a base sobre o plano vertical que pasa por A e D tomáronse as seguintes medidas. A lonxitude $AB = 125 \text{ m}$ no plano horizontal. O ángulo de elevación dende A ata D é de 38° ; e no triángulo ABC, o ángulo B = 46° e o ángulo ACB = 54° . Atopa a distancia AC e a altura CD.

Exercicios e problemas



Solución:

No triángulo ABC:

$$A = 180^\circ - (46^\circ + 54^\circ) = 80^\circ$$

$$\frac{AC}{\sin 46^\circ} = \frac{125}{\sin 54^\circ} \Rightarrow AC = \frac{125 \cdot \sin 46^\circ}{\sin 54^\circ} = 111,14 \text{ m}$$

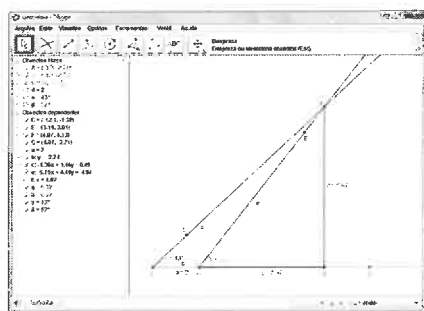
$$\tan 38^\circ = \frac{CD}{111,14} \Rightarrow CD = 111,14 \cdot \tan 38^\circ = 86,83 \text{ m}$$



Paso a paso

76. Medir a altura dunha montaña

Na chaira, dende un punto calquera, mídese o ángulo B de elevación e obtense 43° ; tras achegarse á montaña 200 m, vólvese medir o ángulo C de elevación e obtense 52° . Atopa a altura da mencionada montaña.



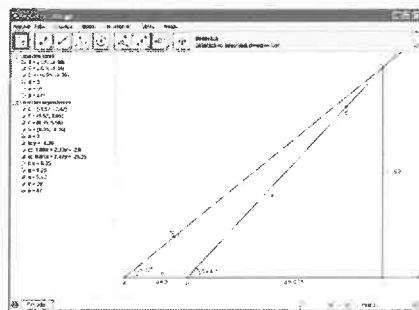
Solución:

Resolto no libro do alumnado.

Xeometría dinámica: interactividade

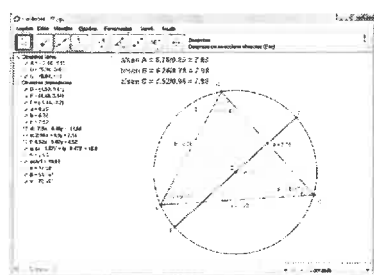
- Emprega o mesmo debuxo para calcular a anchura dun río sobre o que se mediu o ángulo de elevación dende unha orela á parte máis alta dunha árbore que está na outra orela, que resultou ser de 47° . Distanciándose 5 m do río e volvendo medir o ángulo de elevación, obtense 39° .
- Pecha o documento.

Solución:



A anchura do río é: 9,25 m

77. Teorema dos senos



Solución:

Resolto no libro do alumnado.

Xeometría dinámica: interactividade

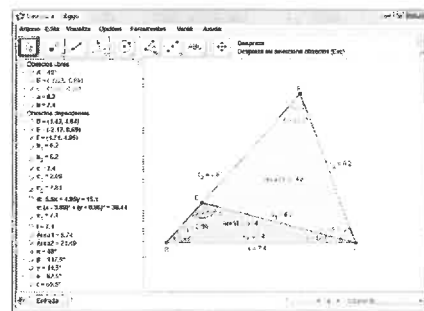
- Arrastra un vértice calquera para modificar o triángulo. Que lle segue sucedendo ao cociente que se obtén ao dividir cada lado polo seno do ángulo oposto e o valor do diámetro?
- Cando un ángulo é recto, que particularidade ten o lado oposto?
- Pecha o documento.

Solución:

- O cociente é igual ao diámetro.
- É o diámetro da circunferencia circunscrita.

78. Caso 2

Resolve un triángulo no que se coñecen: $a = 6,2$ cm, $b = 7,4$ cm e $A = 48^\circ$. Cantas solucións ten?



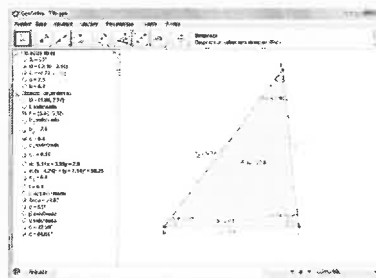
Solución:

Resolto no libro do alumnado.

Xeometría dinámica: interactividade

Edita os valores dos lados e do ángulo, pon $a = 7,5$ cm, $b = 6,4$ cm e $A = 53^\circ$. Cantas solucións hai?

Solución:



Hai unha única solución.

- Internet. Abre: www.xerais.es, elixe Matemáticas, curso e tema.

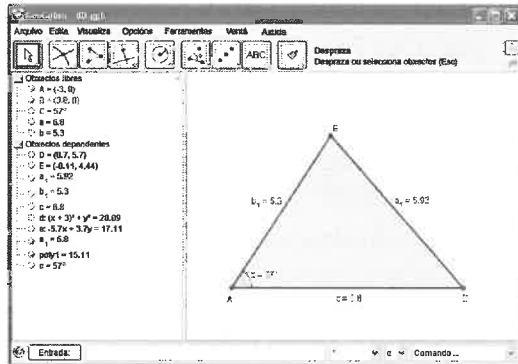
Practica

80. Teorema do coseno

Debuxa un triángulo no que se coñecen:

$$a = 6,8 \text{ cm}, b = 5,3 \text{ cm e } C = 57^\circ$$

Calcula o lado c .



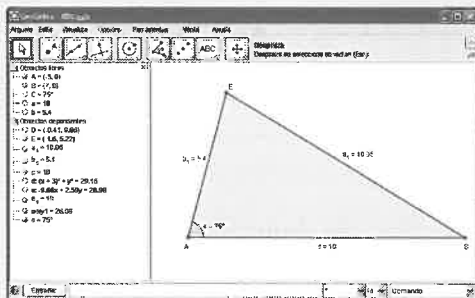
Solución:

Resolto no libro do alumnado.

Xeometría dinámica: interactividade

Edita os valores dos lados e do ángulo seguintes:
 $a = 10 \text{ cm}$, $b = 5,4 \text{ cm}$ e $C = 75^\circ$. Seguen sendo iguais os valores que se obteñen do lado c ?

Solución:



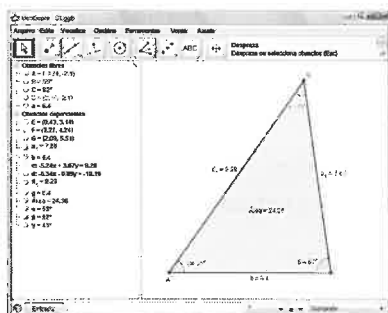
Os valores do lado c cambian.

81. Caso 1

Resolve un triángulo no que se coñecen:

$$a = 6,4 \text{ cm}, B = 55^\circ \text{ e } C = 82^\circ$$

Cantas solucións ten?



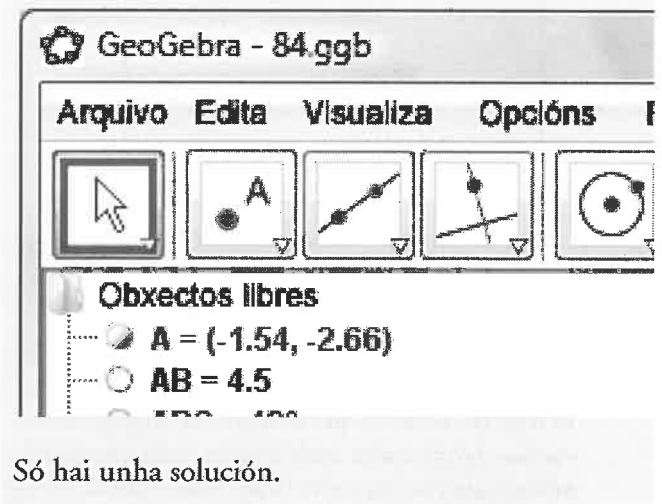
Solución:

Resolto no libro do alumnado.

Xeometría dinámica: interactividade

Edita os valores do lado e dos ángulos seguintes:
 $a = 9,5 \text{ cm}$, $B = 47^\circ$ e $C = 93^\circ$. Cantas solucións hai?

Solución:

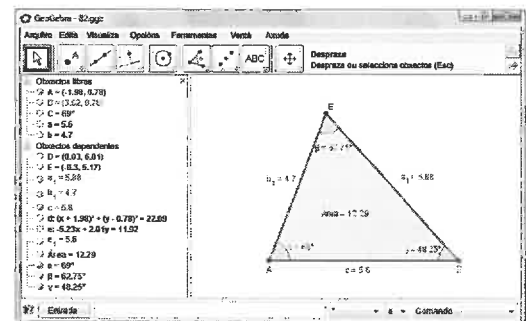


82. Caso 3

Resolve un triángulo no que se coñecen:

$$a = 5,6 \text{ cm}, b = 4,7 \text{ cm e } C = 69^\circ$$

Cantas solucións ten?



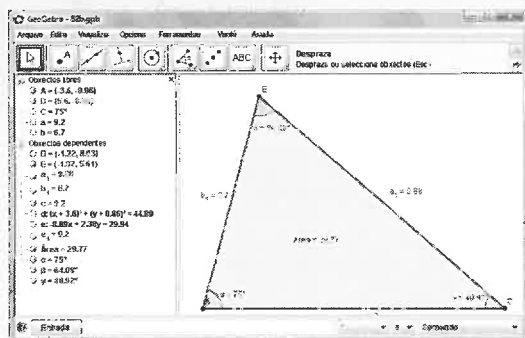
Solución:

Resolto no libro do alumnado.

Xeometría dinámica: interactividade

Edita os valores dos lados e do ángulo seguintes:
 $a = 9,2 \text{ cm}$, $b = 6,7 \text{ cm}$ e $C = 75^\circ$. Cantas solucións hai?

Solución:



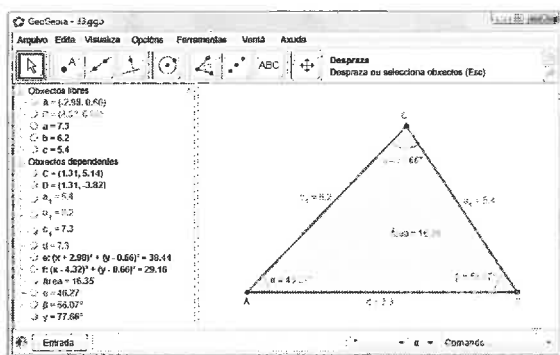
Só hai unha solución.

83. Caso 4

Resolve un triángulo no que se coñecen:

$a = 7,3$ cm, $b = 6,2$ cm e $c = 5,4$ cm

Cantas solucións ten?



Solución:

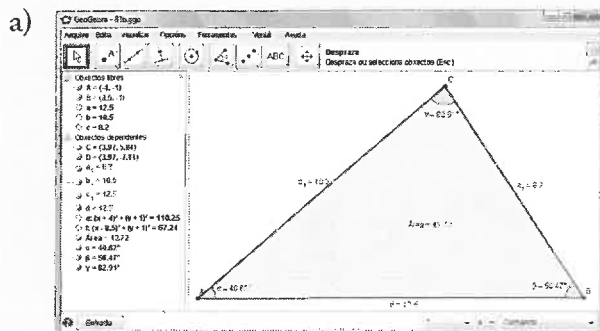
Resolto no libro do alumnado.

Xeometría dinámica: interactividade

a) Edita os valores dos lados seguintes: $a = 12,5$ cm, $b = 10,5$ cm e $c = 8,2$ cm. Cantas solucións hai?

b) Edita os valores dos lados seguintes: $a = 5,3$ cm, $b = 9,5$ cm e $c = 4,1$ cm. Cantas solucións hai?

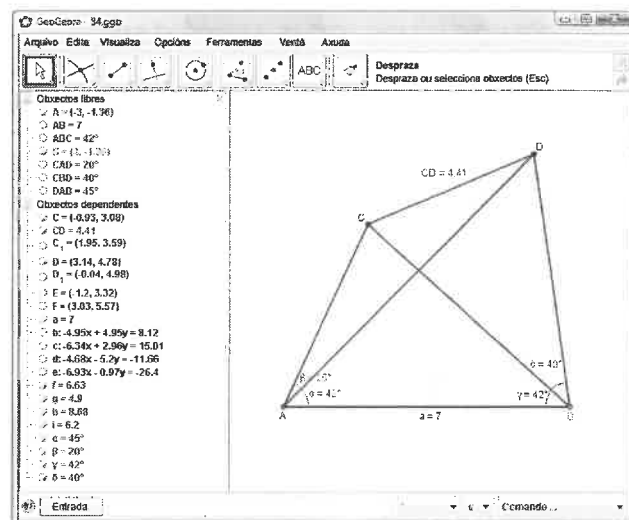
Solución:



b) Non hai solución.

84. Cálculo de distancias entre dous puntos non accesibles

Atopa a distancia que hai entre dúas antenas C e D de telefonía móbil que están na outra orla do río, sabendo que se mediu a distancia que hai entre A e B e se obtivo 700 m, e que co teodolito se obtivo que $CAD = 20^\circ$, $DAB = 45^\circ$, $ABC = 35^\circ$ e $CBD = 40^\circ$.

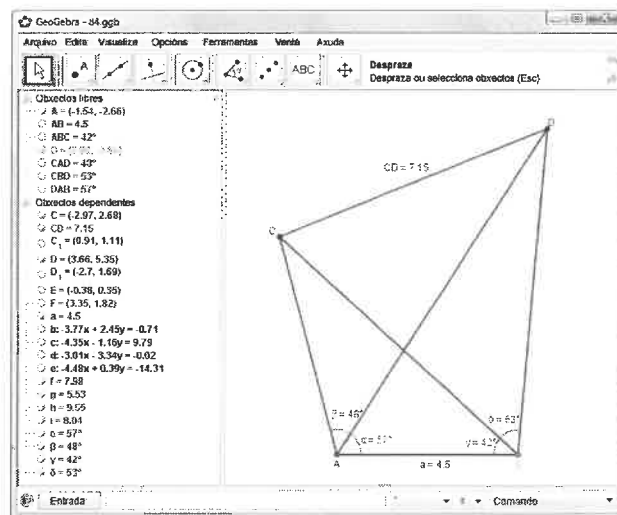


Solución:

Resolto no libro do alumnado.

Xeometría dinámica: interactividade

Usando o problema anterior, atopa a distancia que hai entre dous barcos C e D, sabendo que se mediu a distancia entre A e B e se obtivo 450 m, e que co teodolito se obtivo que $CAD = 48^\circ$, $BAD = 57^\circ$, $ABC = 42^\circ$ e $CBD = 53^\circ$.



Solución:

$CD = 715$ m