



1. Razóns trigonométricas ou circulares

Pensa e calcula

Nunha circunferencia de radio $R = 1$ m, calcula mentalmente e de forma exacta a lonxitude de:

- a) A circunferencia. b) A semicircunferencia. c) Un cuarto de circunferencia. d) Tres cuartos de circunferencia.

Solución:

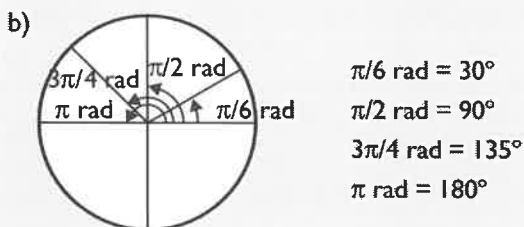
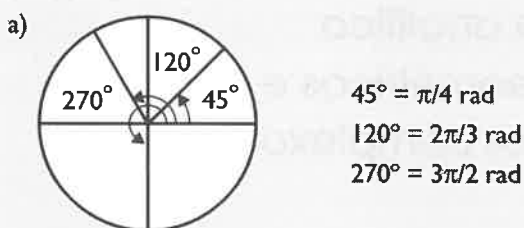
a) $L_{\text{Circunferencia}} = 2\pi$ m b) $L_{\text{Semicircunferencia}} = \pi$ m c) $L_{\text{Cuarto de circunferencia}} = \pi/2$ m d) $L_{\text{Tres cuartos de circunferencia}} = \frac{3\pi}{2}$ m

Aplica a teoría

1. Debuxa os seguintes ángulos e pasa mentalmente os que están en graos a radiáns e viceversa:

- a) 45° , 120° , 270°
b) $\pi/6$ rad, $\pi/2$ rad, $3\pi/4$ rad, π rad

Solución:



2. Pasa os ángulos que están en graos a radiáns e viceversa:

- a) 54° b) 217°
c) 1,25 rad d) 2,47 rad

Solución:

- a) 0,9425 rad b) 3,7874 rad
c) $71^\circ 37' 11''$ d) $141^\circ 31' 14''$

3. Reduce a un ángulo menor de 360° os seguintes ángulos e escríbeos en forma xeral:

- a) 765° b) $2\,345^\circ$ c) -540°

Solución:

- a) $45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
b) $185^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
c) $180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

4. Calcula as seguintes razóns trigonométricas e redondea o resultado a catro decimais:

- a) $\sin 47^\circ 35' 44''$ b) $\cos 73^\circ 15' 52''$
c) $\tan 25^\circ 5' 12''$ d) $\sin 83^\circ 44' 23''$

Solución:

- a) 0,7384 b) 0,2880 c) 0,4682 d) 0,9940

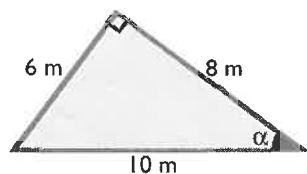
5. Calcula os seguintes ángulos en graos, minutos e segundos sabendo que:

- a) $\sin \alpha = 0,7634$ b) $\cos \alpha = 0,1234$
c) $\tan \alpha = 2,5$ d) $\sin \alpha = 0,8888$

Solución:

- a) $\alpha = 49^\circ 45' 53''$
b) $\alpha = 82^\circ 54' 42''$
c) $\alpha = 68^\circ 11' 55''$
d) $\alpha = 62^\circ 43' 22''$

6. Calcula todas as razóns trigonométricas do ángulo α do triángulo rectángulo seguinte:



Solución:

$$\sin \alpha = 3/5$$

$$\cos \alpha = 4/5$$

$$\tan \alpha = 3/4$$

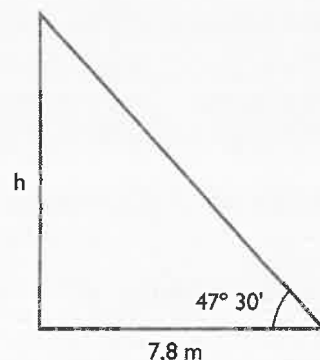
$$\operatorname{cosec} \alpha = 5/3$$

$$\sec \alpha = 5/4$$

$$\cot \alpha = 4/3$$

7. Unha árbore e a súa sombra forman un ángulo recto. A sombra mide 7,8 m e o ángulo co que se ve a parte superior da árbore dende o extremo da sombra mide $47^\circ 30'$. Calcula a altura da árbore.

Solución:



$$\tan 47^\circ 30' = \frac{h}{7,8}$$

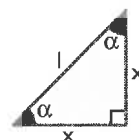
$$h = 7,8 \tan 47^\circ 30' = 8,5 \text{ m}$$

2. Relacións entre razóns. Razóns de 30° , 45° e 60°

Pensa e calcula

No triángulo rectángulo e isósceles do debuxo, calcula mentalmente:

- O ángulo α .
- A $\tan \alpha$.



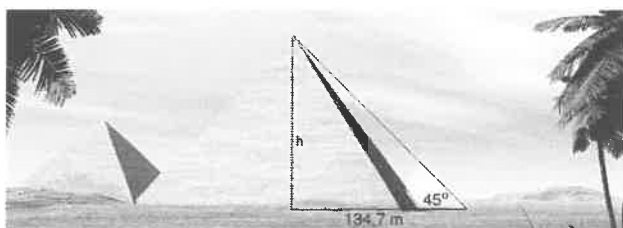
Solución:

$$\text{a) } \alpha = 45^\circ$$

$$\text{b) } \tan \alpha = 1$$

Aplica a teoría

8. A pirámide de Kefrén, en Exipto, proxecta unha sombra de 134,7 m e o ángulo que forma o chan coa recta que une o extremo da sombra coa parte máis alta da pirámide é de 45° . Encontra mentalmente a altura da citada pirámide.



Solución:

$$\text{Altura} = 134,7 \text{ m}$$

9. Se $\sin \alpha = 0,3456$, calcula mentalmente $\cos (90^\circ - \alpha)$.

Solución: 0,3456

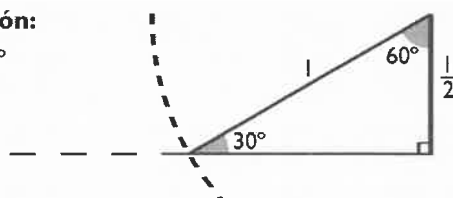
10. Se $\cos 50^\circ = 0,6428$, calcula mentalmente $\sin 40^\circ$.

Solución: 0,6428

11. Sabendo que $\cos \alpha = 1/2$, fai o debuxo do ángulo α e calcula mentalmente o valor de α .

Solución:

$$\alpha = 60^\circ$$



12. Sabendo que $\sin \alpha = 2/3$, calcula $\cos \alpha$ e $\tan \alpha$.

Solución:

Aplicase a fórmula fundamental:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{4}{9} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

13. Sabendo que $\cos \alpha = 3/5$, calcula $\sin \alpha$ e $\tan \alpha$.

Solución:

Aplicase a fórmula fundamental:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3}$$

14. Sabendo que $\tan \alpha = 1/2$, calcula $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.

Solución:

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$\frac{1}{4} + 1 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

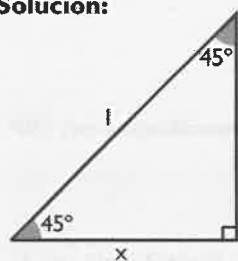
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \tan \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

15. Demuestra que $\tan 45^\circ = 1$.

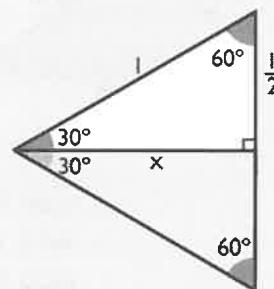
Solución:



$$\tan 45^\circ = \frac{x}{x} = 1$$

16. Demuestra que: $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:



$$x = \sin 60^\circ = \cos 30^\circ$$

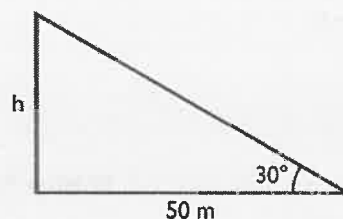
$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

Despexando x obtense que:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

17. Un faro proxecta unha sombra de 50 m, e o ángulo que forma o chan coa recta que une o extremo da sombra coa parte máis alta do faro é de 30° . Encontra a altura do devandito faro.

Solución:



$$\tan 30^\circ = h/50$$

$$h = 50 \tan 30^\circ = 50 \frac{\sqrt{3}}{3} = 28,87 \text{ m}$$

3. Xeneralización das razóns trigonométricas

Pensa e calcula

Completa a seguinte táboa escribindo o signo das abscisas e ordenadas nos catro cuadrantes:

	1º	2º	3º	4º
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

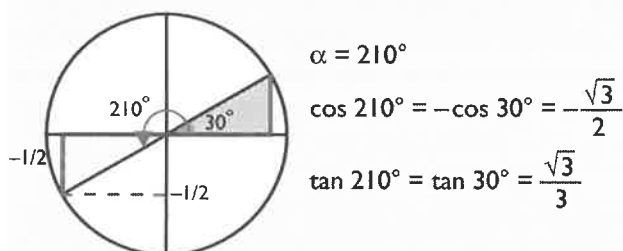
Solución:

	1º	2º	3º	4º
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

Aplica a teoría

18. Un ángulo α está no 3º cuadrante e $\sin \alpha = -1/2$. Debuxa o ángulo e calcula mentalmente o ángulo α , o $\cos \alpha$ e a $\tan \alpha$.

Solución:



19. Substitúe os puntos suspensivos por $\geq$ ou $\leq$:

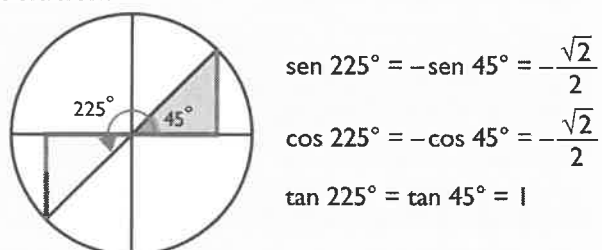
- a) $|\sin \alpha| \dots 1$
 b) $|\sec \alpha| \dots 1$

Solución:

- a) $|\sin \alpha| \leq 1$ b) $|\sec \alpha| \geq 1$

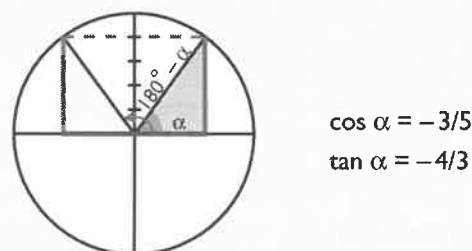
20. Fai o debuxo e calcula mentalmente o seno, o coseno e a tanxente de 225° .

Solución:



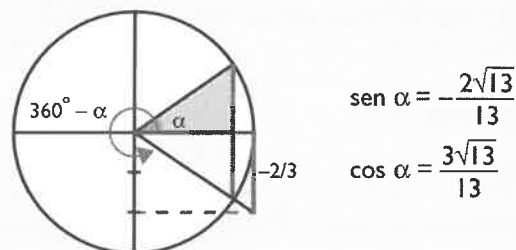
21. Un ángulo α está no 2º cuadrante, e $\sin \alpha = 4/5$. Fai o debuxo do ángulo α , atopa o $\cos \alpha$ e a $\tan \alpha$.

Solución:



22. Un ángulo α está no 4º cuadrante, e $\tan \alpha = -2/3$. Fai o debuxo do ángulo α , atopa o $\sin \alpha$ e o $\cos \alpha$.

Solución:



23. Calcula as seguintes razóns trigonométricas redondeando o resultado a catro cifras decimais:

- a) $\sin 55^\circ 33' 44''$ b) $\cos 163^\circ 25' 35''$
 c) $\tan 255^\circ 42' 13''$ d) $\sin 344^\circ 33' 25''$

Solución:

- a) 0,8247 b) -0,9585 c) 3,9242 d) -0,2663

24. Calcula o ángulo α en graos, minutos e segundos nos seguintes casos:

- a) $\sin \alpha = 0,5555$ e α está no 1º cuadrante.
- b) $\cos \alpha = -0,42$ e α está no 2º cuadrante.
- c) $\tan \alpha = 1,7$ e α está no 3º cuadrante.
- d) $\sin \alpha = -0,65$ e α está no 4º cuadrante.

Solución:

- a) $\alpha = 33^\circ 44' 43''$
- b) $\alpha = 114^\circ 50' 5''$
- c) $\alpha = 239^\circ 32' 4''$
- d) $\alpha = 319^\circ 27' 30''$

4. Razóns de operacións con ángulos

Pensa e calcula

Calcula mentalmente:

- a) $\sin 60^\circ + \sin 30^\circ$
- b) $\sin (60^\circ + 30^\circ)$
- c) $2 \cdot \cos 45^\circ$
- d) $\cos (2 \cdot 45^\circ)$

Solución:

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$
- b) $\sin 90^\circ = 1$
- c) $2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
- d) $\cos 90^\circ = 0$

Aplica a teoría

25. Calcula $\sin 75^\circ$.

Solución:

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin (45^\circ + 30^\circ) = \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}\end{aligned}$$

26. Calcula $\tan 15^\circ$.

Solución:

$$\tan 15^\circ = \tan (45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = 2 - \sqrt{3}$$

27. Se $\sin \alpha = 0,3$, calcula $\cos 2\alpha$.

Solución:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

En primeiro lugar hai que calcular $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = 0,9539$$

$$\cos 2\alpha = 0,9539^2 - 0,3^2 = 0,8199$$

28. Se $\cos \alpha = 0,6$, calcula $\tan \frac{\alpha}{2}$.

Solución:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0,6}{1 + 0,6}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm 0,5$$

29. Calcula $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$.

Solución:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

30. Se $\sin \alpha = 1/3$, calcula $\sin(\alpha + 30^\circ)$.

Solución:

$$\sin(\alpha + 30^\circ) = \sin \alpha \cos 30^\circ + \cos \alpha \sin 30^\circ$$

En primeiro lugar hai que calcular $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin(\alpha + 30^\circ) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$$

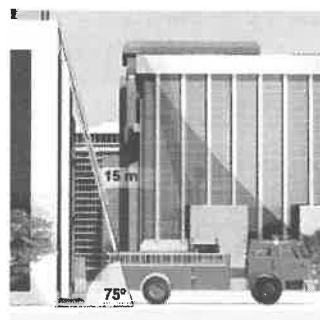
31. Se $\tan \alpha = 2/3$, calcula $\tan(60^\circ - \alpha)$.

Solución:

$$\tan(60^\circ - \alpha) = \frac{\tan 60^\circ - \tan \alpha}{1 + \tan 60^\circ \tan \alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 2/3}{1 + \sqrt{3} \cdot 2/3} = \frac{24 - 13\sqrt{3}}{3}$$

32. Unha escaleira de bombeiros está apoiada sobre a fachada dunha casa; a escaleira mide 15 m de lonxitude e o ángulo que forma a escaleira co chan é de 75° . Calcula a altura á que chegará a escaleira na casa.



Solución:

$$\sin 75^\circ = h/15$$

$$h = 15 \cdot \sin 75^\circ = 14,49 \text{ m}$$

5. Ecuacións e identidades trigonométricas

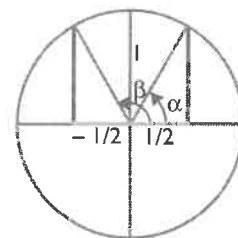
Pensa e calcula

Observando o debuxo e sabendo que $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = -\frac{1}{2}$, calcula mentalmente canto miden os ángulos α e β .

Solución:

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\beta = 120^\circ$$



Aplica a teoría

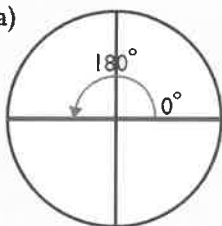
33. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións tras facer o debuxo correspondente:

a) $\sin x = 0$

b) $\cos x = -1$

Solución:

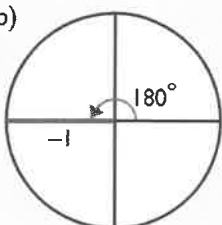
a)



$$x_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)



$$x = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

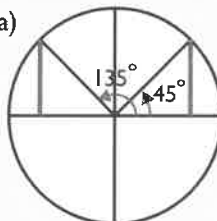
34. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións tras facer o debuxo correspondente:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$

Solución:

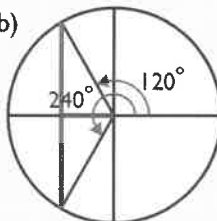
a)



$$x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)



$$x_1 = 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

35. Resuelve a seguinte ecuación:

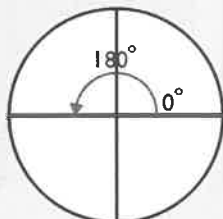
$$\sin^2 x = \sin x$$

Solución:

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin x - 1) = 0$$

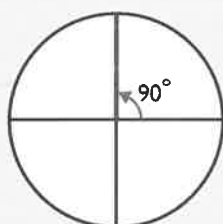
$$\sin x = 0, \sin x = 1$$

$$\text{Se } \sin x = 0$$



$$x_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } \sin x = 1$$



$$x_3 = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

36. Resolve a seguinte ecuación:

$$2 \cos^2 x - \sin x = 1$$

Solución:

$$2 \cos^2 x - \sin x = 1$$

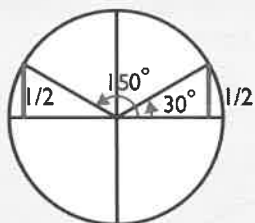
$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x = 1$$

$$2 - 2 \sin^2 x - \sin x = 1$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = 1/2, \sin x = -1$$

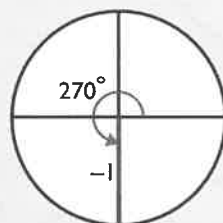
$$\text{Se } \sin x = 1/2$$



$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } \sin x = -1$$



$$x_3 = 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

37. Resolve a seguinte ecuación:

$$1 + \sec^2 x = 3 \tan^2 x$$

Solución:

$$1 + \sec^2 x = 3 \tan^2 x$$

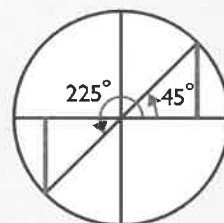
$$\text{Aplicase que: } \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$1 + \tan^2 x + 1 = 3 \tan^2 x$$

$$\tan^2 x = 1$$

$$\tan x = \pm 1$$

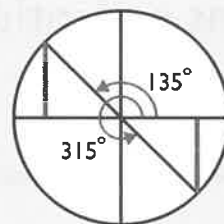
$$\text{Se } \tan x = 1$$



$$x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 225^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } \tan x = -1$$



$$x_3 = 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = 315^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

38. Resolve a seguinte ecuación:

$$\operatorname{cosec}^2 x = 2 \cot^2 x$$

Solución:

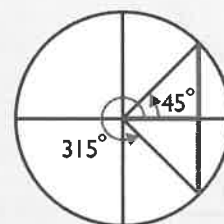
$$\operatorname{cosec}^2 x = 2 \cot^2 x$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$2 \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Se } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 315^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$x_3 = 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = 225^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

39. Comproba a seguinte identidade:

$$\tan^2 x - \sec^2 x = \tan^2 x \sec^2 x$$

Solución:

Fanse operacións en cada un dos dous membros.

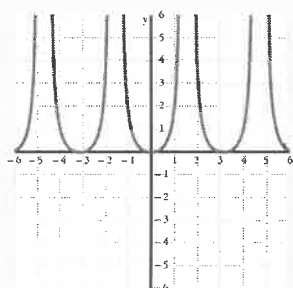
No 1º membro:

$$\begin{aligned} \tan^2 x - \sec^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

No 2º membro:

$$\tan^2 x \sec^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

A representación gráfica é:



40. Comproba a seguinte identidade:

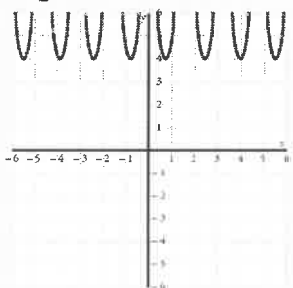
$$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x$$

Solución:

Facendo operacións no 1º membro obtense o 2º membro:

$$\begin{aligned} \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x \sec^2 x \end{aligned}$$

A representación gráfica é:



41. Resolve os seguintes sistemas de ecuacións trigonométricas:

$$\begin{cases} \text{a) } \begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \sin x - \sin y = 0 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 5/4 \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 3/4 \end{cases} \end{cases}$$

Solución:

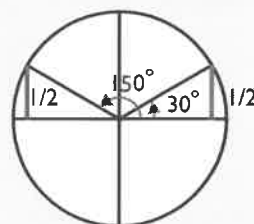
a) Sumando ambas as ecuacións, obtense:

$$2 \sin x = 1$$

$$\text{Se } \sin x = 1/2$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



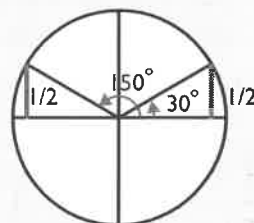
Restando da 1ª ecuación a 2ª, obtense:

$$2 \sin y = 1$$

$$\text{Se } \sin y = 1/2$$

$$y_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



b) Sumando as dúas ecuacións, obtense:

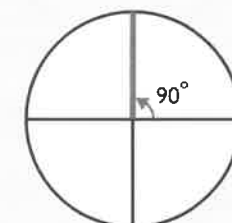
$$2 \sin^2 x = 2$$

$$\sin^2 x = 1$$

$$\sin x = \sqrt{1} = \pm 1$$

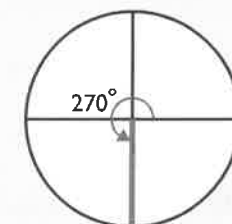
$$\text{Se } \sin x = 1$$

$$x = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{Se } \sin x = -1$$

$$x = 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



Restando as dúas ecuacións, obtense:

$$2 \cos^2 y = 1/2$$

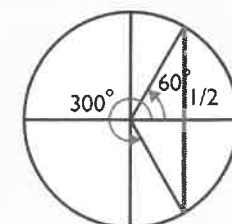
$$\cos^2 y = 1/4$$

$$\cos y = \sqrt{1/4} = \pm 1/2$$

$$\text{Se } \cos y = 1/2$$

$$y_1 = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

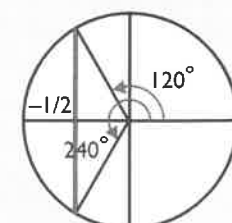
$$y_2 = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{Se } \cos y = -1/2$$

$$y_3 = 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y_4 = 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

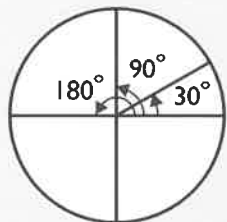


Exercicios e problemas

1. Razóns trigonométricas ou circulares

42. Debuxa os seguintes ángulos e pasa mentalmente de graos a radiáns: 30° , 90° , 180°

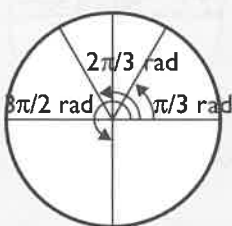
Solución:



$$\begin{aligned} 30^\circ &= \pi/6 \text{ rad} \\ 90^\circ &= \pi/2 \text{ rad} \\ 180^\circ &= \pi \text{ rad} \end{aligned}$$

43. Debuxa os seguintes ángulos e pasa mentalmente de radiáns a graos: $\pi/3$ rad, $2\pi/3$ rad, $3\pi/2$ rad

Solución:



$$\begin{aligned} \pi/3 \text{ rad} &= 60^\circ \\ 2\pi/3 \text{ rad} &= 120^\circ \\ 3\pi/2 \text{ rad} &= 270^\circ \end{aligned}$$

44. Pasa de graos a radiáns os seguintes ángulos:
a) 47° b) 319°

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } 0,8203 \text{ rad} \quad \text{b) } 5,5676 \text{ rad} \end{aligned}$$

45. Pasa de radiáns a graos os seguintes ángulos:
a) $0,85$ rad b) $1,23$ rad

Solución:

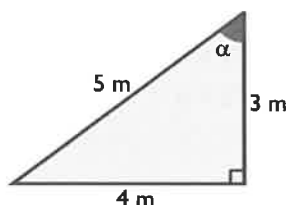
$$\begin{aligned} \text{a) } 48^\circ 42' 5'' \quad \text{b) } 70^\circ 28' 26'' \end{aligned}$$

46. Reduce a un ángulo menor de 360° os seguintes ángulos e escríbeos en forma xeral:
a) 900° b) 25647° c) -1755°

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{b) } 87^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{c) } 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

47. Calcula todas as razóns trigonométricas do ángulo α do triángulo rectángulo seguinte:



Solución:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 4/5 & \operatorname{cosec} \alpha &= 5/4 \\ \cos \alpha &= 3/5 & \sec \alpha &= 5/3 \\ \tan \alpha &= 4/3 & \cot \alpha &= 3/4 \end{aligned}$$

48. Calcula as seguintes razóns trigonométricas e redondea o resultado a catro decimais:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 55^\circ 33' 22'' & \quad \text{b) } \cos 87^\circ 5' 2'' \\ \text{c) } \tan 45^\circ 15' 25'' & \quad \text{d) } \sin 18^\circ 11' 20'' \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } 0,8247 & \quad \text{b) } 0,0509 \\ \text{c) } 1,0090 & \quad \text{d) } 0,3122 \end{aligned}$$

49. Calcula os ángulos en graos, minutos e segundos sabendo que:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin \alpha &= 0,4444 & \text{b) } \cos \alpha &= 0,6703 \\ \text{c) } \tan \alpha &= 0,5 & \text{d) } \sin \alpha &= 0,9876 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \alpha &= 26^\circ 23' 6'' & \text{b) } \alpha &= 47^\circ 54' 35'' \\ \text{c) } \alpha &= 26^\circ 33' 54'' & \text{d) } \alpha &= 80^\circ 58' 4'' \end{aligned}$$

2. Relacións entre razóns. Razóns de 30° , 45° e 60°

50. Un sabio chamado Tales de Mileto achégase á esfínx de Exipto cun bastón de 1 m de altura, séntase nunha pedra e pon o bastón vertical ao chan. Espera ata que a sombra é igual de longa que o bastón. Nese momento mide a lonxitude da sombra da esfínx e obtén 57 m. Calcula mentalmente canto mide de alto a devandita esfínx.



Solución:

$$\text{Altura} = 57 \text{ m}$$

51. Se sabemos que $\cos \alpha = 0,7777$, calcula mentalmente $\sin(90^\circ - \alpha)$.

Solución:

$$0,7777$$

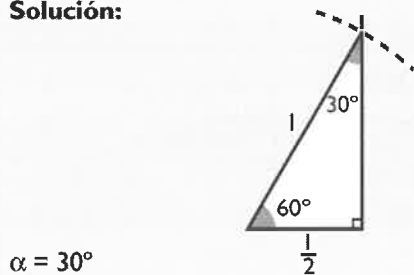
52. Sabendo que $\sin 50^\circ = 0,7660$, calcula mentalmente $\cos 40^\circ$.

Solución:

$$0,7660$$

53. Sabendo que $\sin \alpha = 1/2$, fai o debuxo do ángulo α e calcula mentalmente o valor de α .

Solución:



54. Sabendo que $\sin \alpha = 4/5$, calcula $\cos \alpha$ e $\tan \alpha$.

Solución:

Aplicase a fórmula fundamental:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{16}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3}$$

55. Sabendo que $\cos \alpha = 2/5$, calcula $\sin \alpha$ e $\tan \alpha$.

Solución:

Aplicase a fórmula fundamental:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{4}{25} = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\tan \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5} : \frac{2}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

56. Sabendo que $\tan \alpha = 5/12$, calcula $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.

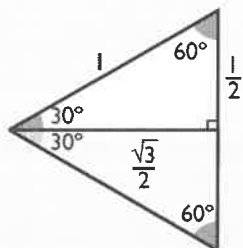
Solución:

$$\cos \alpha = 12/13, \sin \alpha = 5/13$$

57. Demostra que:

$$\text{a) } \tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3} \quad \text{b) } \tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Solución:



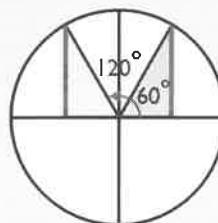
$$\tan 60^\circ = \sin 60^\circ : \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \sin 30^\circ : \cos 30^\circ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. Xeneralización das razóns trigonométricas

58. Temos un ángulo α que está no segundo cuadrante e é tal que $\cos \alpha = -1/2$. Debuxa o ángulo e calcula mentalmente o ángulo α , o $\sin \alpha$ e a $\tan \alpha$.

Solución:



$$\alpha = 120^\circ$$

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

59. Substitúe os puntos suspensivos polo signo correspondente:

a) $|\cos \alpha| \dots 1$

b) $|\operatorname{cosec} \alpha| \dots 1$

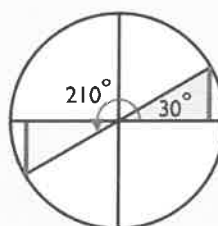
Solución:

a) $|\cos \alpha| \leq 1$

b) $|\operatorname{cosec} \alpha| \geq 1$

60. Fai o debuxo e calcula mentalmente seno, coseno e tangente de 210° .

Solución:



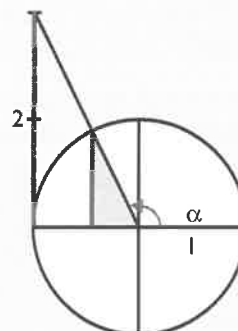
$$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210^\circ = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

61. Un ángulo α está no 2º cuadrante e é tal que $\tan \alpha = -2$. Fai o debuxo do ángulo α ; atopa $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.

Solución:



Exercicios e problemas

Solución:

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$4 + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$\sec \alpha = -\sqrt{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

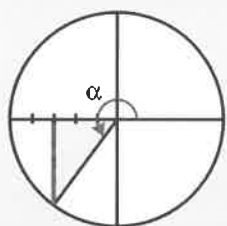
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = -2 \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

62. Un ángulo α está no 3º cuadrante, e $\cos \alpha = -3/5$. Fai o debuxo do ángulo α ; atopa $\sin \alpha$ e $\tan \alpha$.

Solución:



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3}$$

63. Calcula as seguintes razóns trigonométricas e redondea o resultado a catro cifras decimais:

- $\sin 256^\circ 23' 5''$
- $\cos 12^\circ 20' 30''$
- $\tan 157^\circ 13' 10''$
- $\cos 325^\circ 26' 27''$

Solución:

- 0,9719
- 0,9769
- 0,4200
- 0,8235

64. Calcula o ángulo α en graos, minutos e segundos nos seguintes casos:

- $\sin \alpha = 0,2020$ e α está no 1º cuadrante.
- $\tan \alpha = -3,1415$ e α está no 2º cuadrante.
- $\cos \alpha = -0,6$ e α está no 3º cuadrante.
- $\sin \alpha = -0,8325$ e α está no 4º cuadrante.

Solución:

- $\alpha = 11^\circ 39' 14''$
- $\alpha = 107^\circ 39' 26''$
- $\alpha = 233^\circ 7' 48''$
- $\alpha = 303^\circ 38' 37''$

4. Razóns de operacións con ángulos

65. Calcula $\cos 75^\circ$.

Solución:

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos (45^\circ + 30^\circ) = \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4} \end{aligned}$$

66. Calcula $\sin 15^\circ$.

Solución:

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin (45^\circ - 30^\circ) = \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4} \end{aligned}$$

67. Sabendo que $\cos \alpha = 0,6$, calcula $\sin 2\alpha$.

Solución:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

En primeiro lugar hai que calcular $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = 0,8$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,96$$

68. Sabendo que $\cos \alpha = 0,4$, calcula $\tan \alpha/2$.

Solución:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0,4}{1 + 0,4}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm 0,6547$$

69. Calcula $\cos 15^\circ + \cos 75^\circ$.

Solución:

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ + \cos 75^\circ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ &= 2 \cos 45^\circ \cos (-60^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

70. Sabendo que $\cos \alpha = 0,6$, calcula $\sin (60^\circ - \alpha)$.

Solución:

$$\sin (60^\circ - \alpha) = \sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha$$

En primeiro lugar hai que calcular $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = 0,8$$

$$\sin (60^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,6 - \frac{1}{2} \cdot 0,8 = 0,1196$$

71. Sabendo que $\tan \alpha = 5/4$, calcula $\tan (\alpha - 45^\circ)$.

Solución:

$$\tan (\alpha - 45^\circ) = \frac{\tan \alpha - \tan 45^\circ}{1 + \tan \alpha \tan 45^\circ} = \frac{5/4 - 1}{1 + 5/4 \cdot 1} = \frac{1}{9}$$

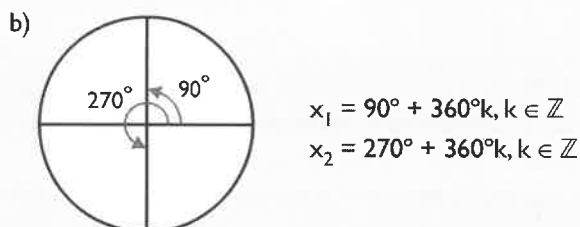
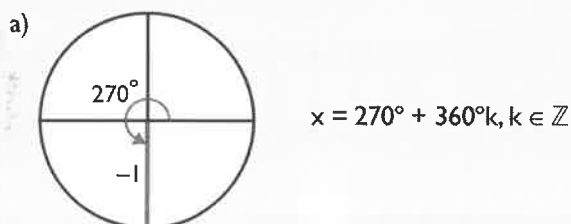
5. Ecuaciones e identidades trigonométricas

72. Resuelve mentalmente as seguintes ecuaciones tras hacer o debuxo correspondente:

a) $\sin x = -1$

b) $\cos x = 0$

Solución:

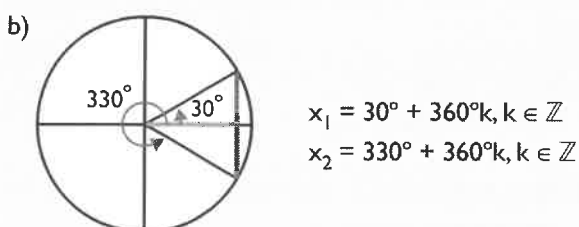
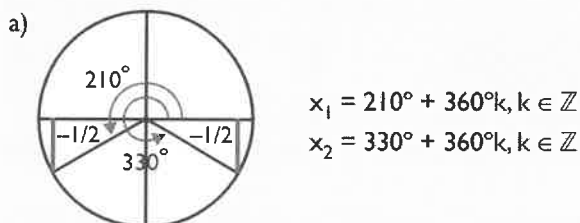


73. Resuelve mentalmente as seguintes ecuaciones tras hacer o debuxo correspondente:

a) $\sin x = -\frac{1}{2}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:



74. Resolve a seguinte ecuación: $2 \cos x = \sec x$

Solución:

$$2 \cos x = \sec x$$

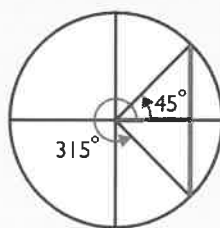
$$2 \cos x = 1/\cos x$$

$$2 \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1/2$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

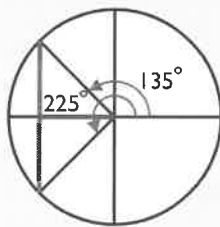
$$\text{Se } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 315^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$x_3 = 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = 225^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

75. Resolve a seguinte ecuación: $2 \sin^2 x + \cos x = 1$

Solución:

$$2 \sin^2 x + \cos x = 1$$

$$\text{Aplicase que: } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$2(1 - \cos^2 x) + \cos x = 1$$

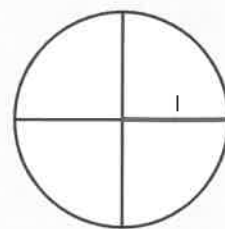
$$2 - 2 \cos^2 x + \cos x = 1$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$$\text{Se } \cos x = 1$$

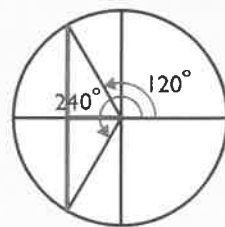
$$x_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{Se } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



Exercicios e problemas

76. Resolve a seguinte ecuación:

$$\cos x = \sin 2x$$

Solución:

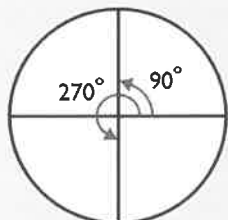
$$\cos x = \sin 2x$$

$$\cos x = 2 \sin x \cos x$$

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = 1/2 \end{cases}$$

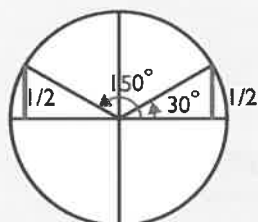
Se $\cos x = 0$



$$x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Se $\sin x = 1/2$



$$x_3 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}, x_4 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

77. Resolve a seguinte ecuación:

$$\tan^2 x + 3 = 2 \sec^2 x$$

Solución:

$$\tan^2 x + 3 = 2 \sec^2 x$$

Aplicase a fórmula: $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$$\tan^2 x + 3 = 2(\tan^2 x + 1)$$

$$\tan^2 x + 3 = 2 \tan^2 x + 2$$

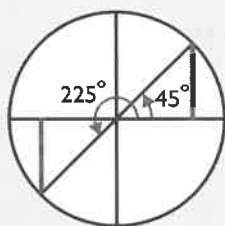
$$\tan^2 x = 1$$

$$\tan x = \pm 1$$

Se $\tan x = 1$

$$x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

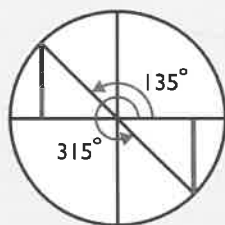
$$x_2 = 225^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



Se $\tan x = -1$

$$x_3 = 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = 315^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



78. Comproba a seguinte identidade:

$$\cos x + \sec x = \sec x (1 + \cos^2 x)$$

Solución:

Fanse operacións en cada un dos dous membros.

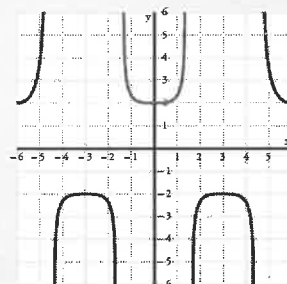
No 1º membro:

$$\cos x + \sec x = \cos x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + 1}{\cos x}$$

No 2º membro:

$$\sec x (1 + \cos^2 x) = \frac{1 + \cos^2 x}{\cos x}$$

A representación gráfica é:



79. Comproba a seguinte identidade:

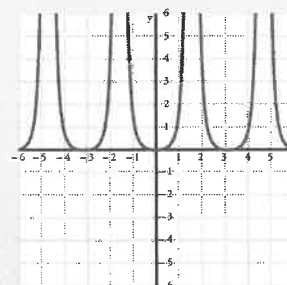
$$\tan^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \tan^2 x$$

Solución:

Facendo operacións no 1º membro obtense o 2º membro.

$$\begin{aligned} \tan^2 x - \sin^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \\ &= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\sin^2 x \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sin^2 x \tan^2 x \end{aligned}$$

A representación gráfica é:



80. Resolve os seguintes sistemas de ecuacións trigonométricas:

$$\begin{cases} a) \sin x + \cos y = 3/2 \\ 3 \sin x - 2 \cos y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b) \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1/2 \end{cases}$$

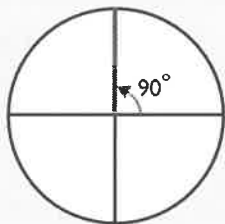
Solución:

a) Multiplíquese a 1ª ecuación por 2 e despois súmanse.

Obtense:

$$5 \operatorname{sen} x = 5$$

$$\operatorname{sen} x = 1$$

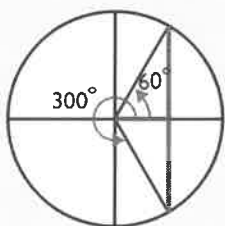


$$x = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Multiplíquese a 1ª ecuación por 3 e réstaselle a 2ª ecuación. Obtense:

$$5 \cos y = 5/2$$

$$\cos y = 1/2$$



$$y_1 = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y_2 = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b) Facendo: $\operatorname{sen} x = u, \cos y = v$, temos:

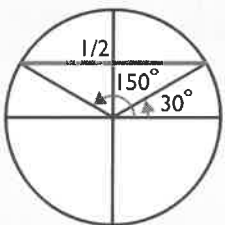
$$\left. \begin{aligned} u + v &= 1 \\ u^2 + v^2 &= 1/2 \end{aligned} \right\}$$

Ao resolver o sistema, obtense:

$$u = 1/2, v = 1/2$$

Polo que:

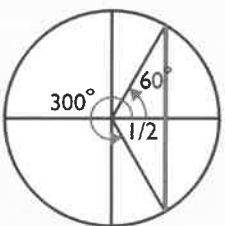
$$\operatorname{sen} x = 1/2$$



$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos y = 1/2$$



$$y_1 = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y_2 = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

81. Resolve os seguintes sistemas de ecuacións trigonométricas e dá as solucións en $[0, \pi/2]$:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} x \cdot \cos y &= 3/4 \\ \operatorname{sen} y \cdot \cos x &= 1/4 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 4y \operatorname{sen} x \cos x &= 3 \\ 2y \cos 2x &= \sqrt{3} \end{aligned} \right\}$$

Solución:

a) Sumando as dúas ecuacións, temos:

$$\operatorname{sen}(x + y) = 1$$

Restando as dúas ecuacións, temos:

$$\operatorname{sen}(x - y) = 1/2$$

De onde obtemos:

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 90^\circ \\ x - y &= 30^\circ \end{aligned} \right\}$$

Ao resolver o sistema:

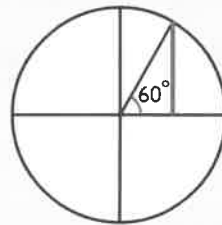
$$x = 60^\circ, y = 30^\circ$$

b) Como $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, temos:

$$\left. \begin{aligned} 2y \operatorname{sen} 2x &= 3 \\ 2y \cos 2x &= \sqrt{3} \end{aligned} \right\}$$

Dividindo a 1ª ecuación entre a 2ª ecuación:

$$\tan 2x = \sqrt{3} \text{ (só se toman as solucións de } [0, \pi/2])$$



$$2x = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 30^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

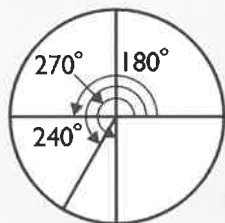
$$y = \sqrt{3}$$

Para ampliar

82. Debuxa os seguintes ángulos e pasa de graos a radiáns de modo exacto:

$$180^\circ, 240^\circ, 270^\circ$$

Solución:

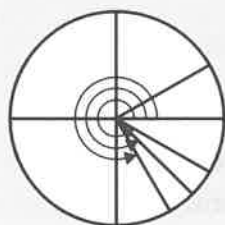


$$\begin{aligned} 180^\circ &= \pi \text{ rad} \\ 240^\circ &= 4\pi/3 \text{ rad} \\ 270^\circ &= 3\pi/2 \text{ rad} \end{aligned}$$

83. Debuxa os seguintes ángulos e pasa de radiáns a graos de modo exacto:

$$5\pi/3 \text{ rad}, 7\pi/4 \text{ rad}, 11\pi/6 \text{ rad}$$

Solución:



$$\begin{aligned} 5\pi/3 \text{ rad} &= 300^\circ \\ 7\pi/4 \text{ rad} &= 315^\circ \\ 11\pi/6 \text{ rad} &= 330^\circ \end{aligned}$$

84. Reduce os seguintes ángulos a ángulos comprendidos entre 0° e 360° . Escríbeos en forma xeral:

- -30°
- -150°
- -600°
- -2500°

Solución:

- $330^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
- $210^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
- $120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
- $20^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

85. Reduce os seguintes ángulos a ángulos comprendidos entre 0 rad e 2π rad. Escríbeos en forma xeral:

- $-13\pi/2$ rad
- $-83\pi/3$ rad

Solución:

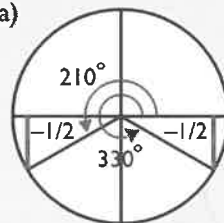
- $\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\pi/3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

86. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións tras facer o debuxo correspondente:

- $\sin x = -1/2$
- $\tan x = -1$

Solución:

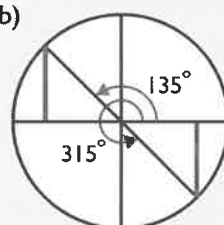
a)



$$x_1 = 210^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 330^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)



$$x_1 = 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 315^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

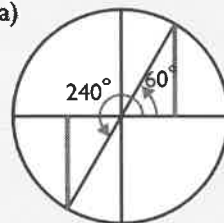
87. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións tras facer o debuxo correspondente:

a) $\tan x = \sqrt{3}$

b) $\cot x = 1$

Solución:

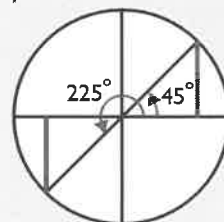
a)



$$x_1 = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\cot x = 1 \Rightarrow \tan x = 1$



$$x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 225^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

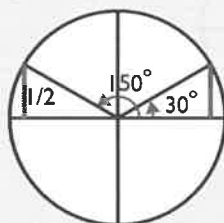
88. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións tras facer o debuxo correspondente:

a) $\operatorname{cosec} x = 2$

b) $\sec x = -2$

Solución:

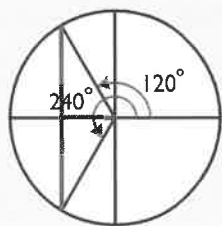
a) $\operatorname{cosec} x = 2 \Rightarrow \sin x = 1/2$



$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\sec x = -2 \Rightarrow \cos x = -1/2$



$$x_1 = 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

89. Calcula en radiáns o menor ángulo que forman as agullas dun reloxo cando marcan:

- As 3 h en punto.
- As 5 h en punto.
- As 8 h en punto.
- As 11 h en punto.

Solución:

- $\pi/2$
- $5\pi/6$
- $2\pi/3$
- $\pi/6$

90. A lonxitude dunha circunferencia mide 32 cm. Calcula en graos as amplitudes dos seguintes arcos:

- Arco de lonxitude 4 m.
- Arco de lonxitude 8 m.
- Arco de lonxitude 16 m.
- Arco de lonxitude 24 m.

Solución:

- 45°
- 90°
- 180°
- 270°

91. Sen empregar a calculadora, atopa:

- $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \tan 45^\circ$
- $\tan 45^\circ - \sin 60^\circ + \cos 30^\circ$

Solución:

$$a) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$b) 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

92. Sen empregar a calculadora, atopa:

- $\sin \pi/3 + \cos \pi/6 - \tan \pi/4$
- $\cos \pi/3 - \tan \pi/6 + \sin \pi/6$

Solución:

$$a) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$$

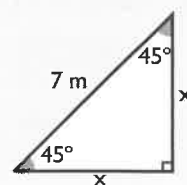
$$b) \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

93. Un triángulo rectángulo é isósceles, e a hipotenusa mide 7 m. Calcula canto miden os catetos e a súa área.

Solución:

$$\sin 45^\circ = \frac{x}{7} \Rightarrow x = 7 \sin 45^\circ = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{49}{4} = 12,25 \text{ m}^2$$

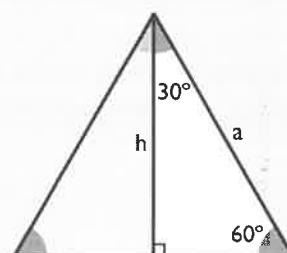


94. Deduce as fórmulas das áreas dos seguintes poliedros regulares:

- Tetraedro.
- Octaedro.
- Icosaedro.

Solución:

Previamente calcúlase a área dun triángulo equilátero:



$$\sin 60^\circ = h/a \Rightarrow h = a \sin 60^\circ$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Área dun triángulo equilátero:

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

a) Tetraedro

$$A_{\text{Tetraedro}} = a^2\sqrt{3}$$

b) Octaedro

$$A_{\text{Octaedro}} = 2a^2\sqrt{3}$$

c) Icosaedro

$$A_{\text{Icosaedro}} = 5a^2\sqrt{3}$$

95. Completa a seguinte táboa escribindo o signo:

	1°	2°	3°	4°
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\tan \alpha$				

Solución:

	1°	2°	3°	4°
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-

Exercicios e problemas

96. Calcula mentalmente o valor dos seguintes ángulos:

- a) $\sin \alpha = 0$
- b) $\sin \alpha = 1$
- c) $\cos \alpha = 0$
- d) $\cos \alpha = 1$

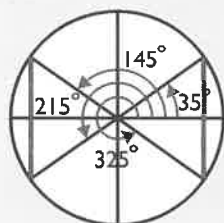
Solución:

- a) $\alpha_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
 $\alpha_2 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
- b) $\alpha = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
- c) $\alpha_1 = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
 $\alpha_2 = 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
- d) $\alpha = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

97. Sabendo que $\sin 35^\circ = 0,5736$, representa o ángulo α de forma aproximada e calcula mentalmente:

- a) $\sin 145^\circ$
- b) $\sin 215^\circ$
- c) $\sin (-35^\circ)$

Solución:



- a) 0,5736
- b) -0,5736
- c) -0,5736

98. Sen utilizar a calculadora, atopa:

- a) $\sin 330^\circ + \cos 240^\circ - \tan 150^\circ$
- b) $\tan 120^\circ - \sin 240^\circ + \cos 315^\circ$

Solución:

- a) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1$
- b) $-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

99. Sen utilizar a calculadora, atopa:

- a) $\sin 2\pi/3 + \cos 5\pi/6 - \tan 7\pi/4$
- b) $\cos 5\pi/4 - \tan 4\pi/3 + \sin 5\pi/4$

Solución:

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1$
- b) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$

100. Sabendo que $\cos \alpha = 1/4$, calcula $\cos (\alpha + 60^\circ)$.

Solución:

$$\cos (\alpha + 60^\circ) = \cos \alpha \cos 60^\circ - \sin \alpha \sin 60^\circ$$

En primeiro lugar hai que calcular $\sin \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos (\alpha + 60^\circ) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - 3\sqrt{5}}{8}$$

101. Sabendo que $\tan \alpha = 3/4$, calcula $\tan (30^\circ - \alpha)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \tan (30^\circ - \alpha) &= \frac{\tan 30^\circ - \tan \alpha}{1 + \tan 30^\circ \tan \alpha} \\ &= \frac{\sqrt{3}/3 - 3/4}{1 + \sqrt{3}/3 \cdot 3/4} = \frac{25\sqrt{3} - 48}{39} \end{aligned}$$

102. Resolve a seguinte ecuación:

$$\cos 2x = 2 - 3 \sin x$$

Solución:

$$\cos 2x = 2 - 3 \sin x$$

$$\text{Aplicase que: } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

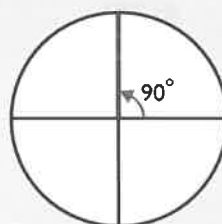
$$\cos^2 x - \sin^2 x = 2 - 3 \sin x$$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 2 - 3 \sin x$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

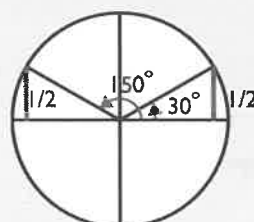
$$\sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$$

Se $\sin x = 1$



$$x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Se $\sin x = 1/2$



$$x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

103. Resolve a seguinte ecuación: $\tan x = 2 \sin x$

Solución:

$$\tan x = 2 \sin x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x$$

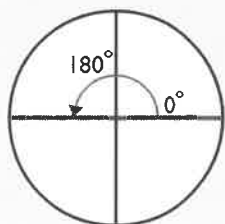
$$\sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0$$

$$\operatorname{sen} x(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ 2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1/2 \end{cases}$$

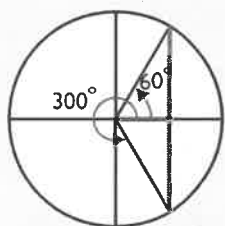
Se $\operatorname{sen} x = 0$



$$x_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Se $\cos x = 1/2$



$$x_3 = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Con calculadora

104. Completa a seguinte táboa:

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
sen										
cos										
tan										

Á vista do resultado da táboa anterior, completa as seguintes frases coas palabras «crece» ou «decrece»:

- Cando o ángulo crece de 0° a 90° , o seno...
- Cando o ángulo crece de 0° a 90° , o coseno...
- Cando o ángulo crece de 0° a 90° , a tanxente...

Solución:

	0°	10°	20°	30°	40°
sen	0,0000	0,1736	0,3420	0,5000	0,6428
cos	1,0000	0,9848	0,9397	0,8660	0,7660
tan	0	0,1763	0,3640	0,5774	0,8391

	50°	60°	70°	80°	90°
sen	0,7660	0,8660	0,9397	0,9848	1,0000
cos	0,6428	0,5000	0,3420	0,1736	0,0000
tan	1,1918	1,7321	2,7475	5,6713	ERRO

- Crece.
- Decrece.
- Crece.

105. Sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = 0,7523$, atopa o ángulo α e calcula $\cos \alpha$ e $\tan \alpha$. O ángulo está no 1º cuadrante.

Solución:

$$\alpha = 48^\circ 47' 24''$$

$$\cos \alpha = 0,6588$$

$$\tan \alpha = 1,1419$$

106. Sabendo que $\cos \alpha = 0,2345$, atopa o ángulo α e calcula $\operatorname{sen} \alpha$ e $\tan \alpha$. O ángulo está no 1º cuadrante.

Solución:

$$\alpha = 76^\circ 26' 16''$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 0,9721$$

$$\tan \alpha = 4,1455$$

107. Calcula os distintos ángulos menores de 360° en graos, minutos e segundos, sabendo que:

- $\operatorname{sen} \alpha = -0,4321$
- $\cos \alpha = 0,7654$
- $\tan \alpha = -3,4532$
- $\cos \alpha = -0,3333$

Solución:

$$a) \alpha = 205^\circ 36' 3'', \alpha = 334^\circ 23' 57''$$

$$b) \alpha = 40^\circ 3' 27'', \alpha = 319^\circ 56' 33''$$

$$c) \alpha = 106^\circ 9' 1'', \alpha = 286^\circ 9' 1''$$

$$d) \alpha = 109^\circ 28' 9'', \alpha = 250^\circ 31' 51''$$

108. Calcula as seguintes razóns trigonométricas redondeando o resultado a cuatro decimais:

- $\operatorname{sen} 2,3 \text{ rad}$
- $\cos 0,5 \text{ rad}$
- $\tan 4,345 \text{ rad}$
- $\operatorname{sen} 5,7 \text{ rad}$

Solución:

Hai que poñer a calculadora en modo **Rad**.

$$a) 0,7457$$

$$b) 0,8776$$

$$c) 2,5983$$

$$d) -0,5507$$

109. Calcula os ángulos en radiáns aproximando o resultado a catro decimais, sabendo que:

- $\operatorname{sen} \alpha = 0,4444$ no 1º cuadrante
- $\cos \alpha = -0,8011$ no 2º cuadrante
- $\tan \alpha = 2$ no 3º cuadrante
- $\operatorname{sen} \alpha = -0,7055$ no 4º cuadrante

Solución:

Hai que poñer a calculadora en modo **Rad**.

$$a) 0,4605$$

$$b) 2,4999$$

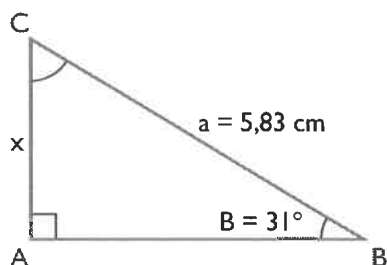
$$c) 4,2487$$

$$d) 5,5001$$

Hai que volver poñer a calculadora en modo **Deg**.

Problemas

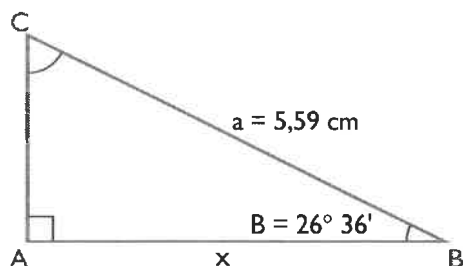
110. Atopa o valor de x no seguinte triángulo rectángulo:



Solución:

$$\operatorname{sen} 31^\circ = \frac{x}{5,83} \Rightarrow x = 5,83 \operatorname{sen} 31^\circ = 3 \text{ cm}$$

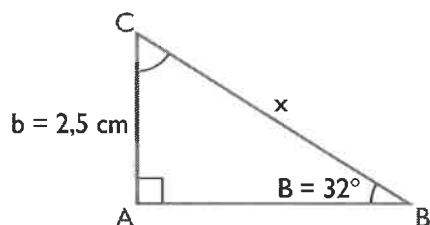
111. Atopa o valor de x no seguinte triángulo rectángulo:



Solución:

$$\cos 26^\circ 36' = \frac{x}{5,59} \Rightarrow x = 5,59 \cos 26^\circ 36' = 5 \text{ cm}$$

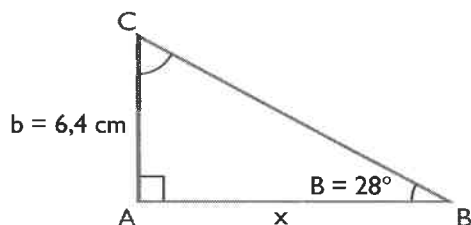
112. Atopa o valor de x no seguinte triángulo rectángulo:



Solución:

$$\operatorname{sen} 32^\circ = \frac{2,5}{x} \Rightarrow x = \frac{2,5}{\operatorname{sen} 32^\circ} = 4,72 \text{ cm}$$

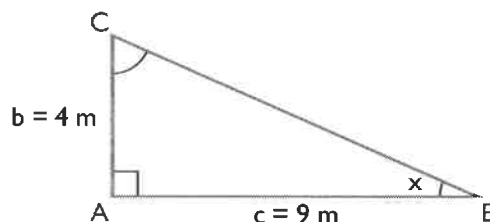
113. Atopa o valor de x no seguinte triángulo rectángulo:



Solución:

$$\tan 28^\circ = \frac{6,4}{x} \Rightarrow x = \frac{6,4}{\tan 28^\circ} = 12,04 \text{ cm}$$

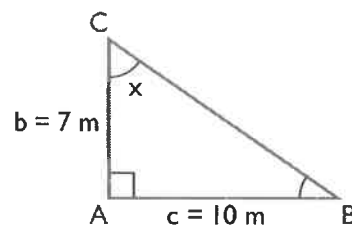
114. Atopa o valor de x no seguinte triángulo rectángulo:



Solución:

$$\tan x = 4/9 \Rightarrow x = 23^\circ 57' 45''$$

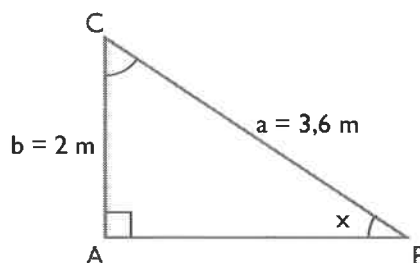
115. Atopa o valor de x no seguinte triángulo rectángulo:



Solución:

$$\tan x = 10/7 \Rightarrow x = 55^\circ 29''$$

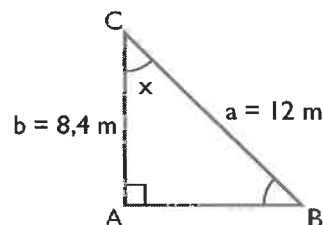
116. Atopa o valor de x no seguinte triángulo rectángulo:



Solución:

$$\operatorname{sen} x = 2/3,6 \Rightarrow x = 33^\circ 44' 56''$$

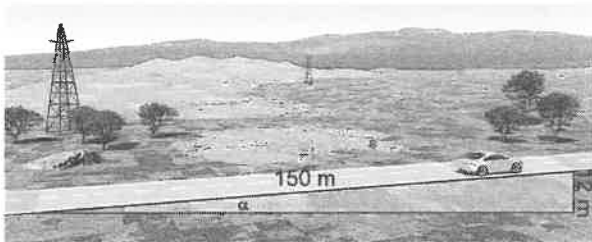
117. Atopa o valor de x no seguinte triángulo rectángulo:



Solución:

$$\cos x = 8,4/12 \Rightarrow x = 45^\circ 34' 23''$$

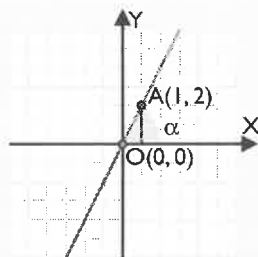
118. Un tramo dunha estrada recta mide 150 m e ascende 12 m. Calcula o ángulo de elevación e a pendente da estrada.

**Solución:**

$$\sin x = \frac{12}{150} \Rightarrow x = 4^\circ 35' 19''$$

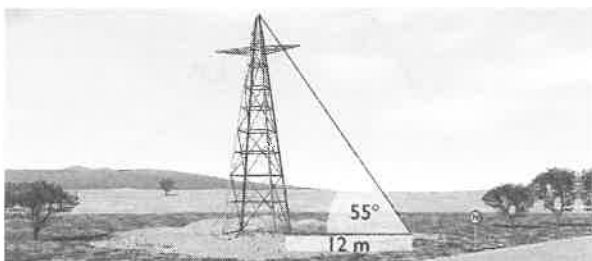
$$\text{Pendente} = \tan 4^\circ 35' 19'' = 0,08 = 8\%$$

119. Debuxa nuns eixes coordenados unha recta que pase pola orixe de coordenadas $O(0,0)$ e polo punto $A(1,2)$. Atopa o ángulo que forma o semieixe positivo de abscisas coa recta.

Solución:

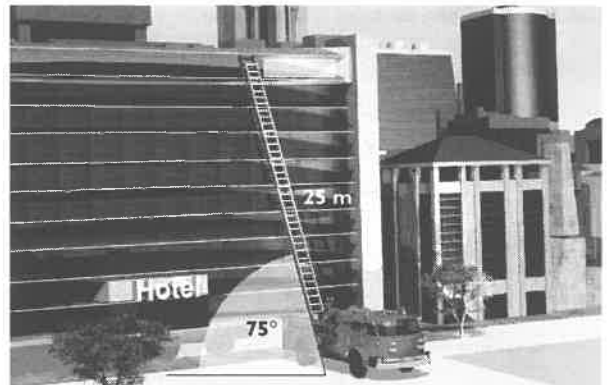
$$\tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 63^\circ 26' 6''$$

120. Atopa a altura dunha torre eléctrica sabendo que a unha distancia de 12 m da base vese a parte superior cun ángulo de 55° .

**Solución:**

$$\tan 55^\circ = h/12 \Rightarrow h = 12 \tan 55^\circ = 17,14 \text{ m}$$

121. Unha escaleira de bombeiros que mide 25 m está apoiada sobre a fachada dun hotel e forma co chan un ángulo de 75° . Se cada planta do hotel mide 2,5 m de altura, a que planta chegará como máximo?

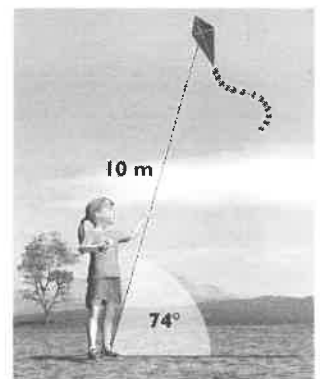
**Solución:**

$$\sin 75^\circ = h/25 \Rightarrow h = 25 \sin 75^\circ = 24,15 \text{ m}$$

$$\text{N}^\circ \text{ de planta: } 24,15/2,5 = 9,6$$

Chega á planta 10 porque pasa da planta 9.

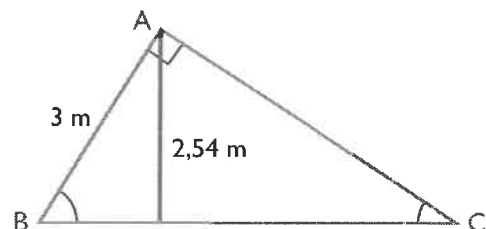
122. Alexandra está facendo voar un papaventos. Sabendo que o fío que soltou mide 10 m e o ángulo que forma coa horizontal é de 74° , calcula entón a altura á que se atopa.

**Solución:**

$$\sin 74^\circ = h/10 \Rightarrow h = 10 \sin 74^\circ = 9,6 \text{ m}$$

9,6 m máis a altura á que teña a man Alexandra.

123. No seguinte triángulo rectángulo cóñécense un cateto e a altura. Calcula os demais lados e ángulos.

**Solución:**

$$\sin B = 2,54/3 \Rightarrow B = 57^\circ 51' 3''$$

$$C = 90^\circ - 57^\circ 51' 3'' = 32^\circ 8' 57''$$

$$\cos B = 3/\text{Hipotenusa}$$

$$\text{Hipotenusa} = 3/\cos 57^\circ 51' 3''$$

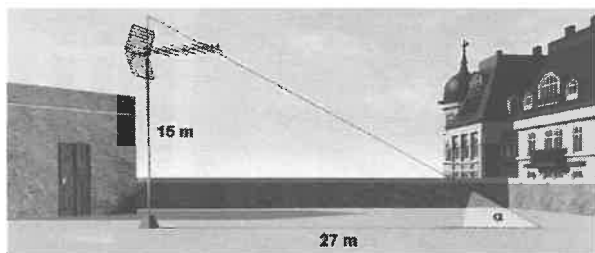
$$\text{Hipotenusa} = 5,64 \text{ m}$$

$$\sin B = (\text{Cateto AC})/\text{Hipotenusa}$$

$$\text{Cateto AC} = 5,64 \sin 57^\circ 51' 3'' = 4,78 \text{ m}$$

Exercicios e problemas

124. Unha antena de televisión que mide 15 m proxecta unha sombra de 27 m. Atopa o ángulo que forma o chan coa recta que une o extremo da sombra coa punta máis alta da antena.



Solución:

$$\tan \alpha = 15/27 \Rightarrow \alpha = 29^\circ 3' 17''$$

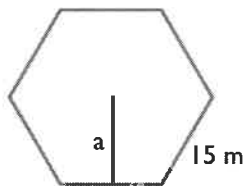
125. Un faro proxecta unha sombra de 50 m, e o ángulo que forma o chan coa recta que une o extremo da sombra coa parte máis alta do faro é de 30° . Atopa a altura do faro.



Solución:

$$\tan 30^\circ = h/50 \Rightarrow h = 50 \tan 30^\circ = 28,87 \text{ m}$$

126. Calcula o apotema dun hexágono regular cuxo lado mide 15 m.

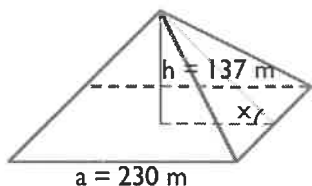


Solución:



$$a = \sqrt{15^2 - 7,5^2} = 13 \text{ m}$$

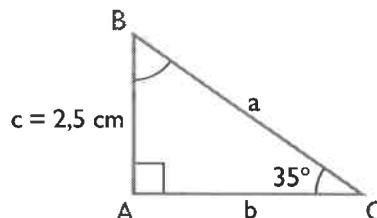
127. A pirámide de Keops de Exipto mide de alto 137 m, a base é cadrada e ten de aresta 230 m. Atopa o ángulo de inclinación das caras laterais.



Solución:

$$\tan x = 137/115 \Rightarrow \alpha = 49^\circ 59' 22''$$

128. Nun triángulo rectángulo coñécese o cateto, $c = 2,5$ cm, e o ángulo oposto, $C = 35^\circ$. Calcula os demais lados e ángulos do triángulo.



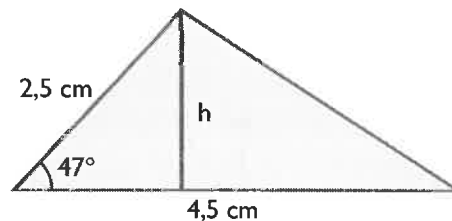
Solución:

$$B = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

$$\sin 35^\circ = 2,5/a \Rightarrow a = 4,36 \text{ cm}$$

$$\tan 35^\circ = 2,5/b \Rightarrow b = 3,57 \text{ cm}$$

129. Calcula a área do seguinte triángulo.

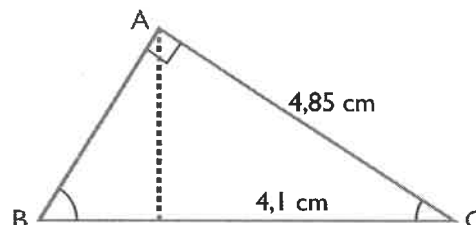


Solución:

$$\sin 47^\circ = h/2,5 \Rightarrow h = 1,83 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 1,83 = 4,12 \text{ cm}^2$$

130. No seguinte triángulo rectángulo coñécese un cateto e a proxección dese cateto sobre a hipotenusa. Calcula os demais lados e ángulos.



Solución:

$$\cos C = 4,1/4,85 \Rightarrow C = 32^\circ 17' 22''$$

$$B = 90^\circ - 32^\circ 17' 22'' = 57^\circ 42' 38''$$

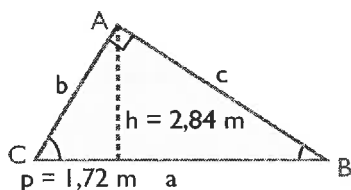
$$\sin 57^\circ 42' 38'' = 4,85/\text{Hipotenusa}$$

$$\text{Hipotenusa} = 5,74 \text{ cm}$$

$$\tan 57^\circ 42' 38'' = 4,85/(\text{Cateto AB})$$

$$\text{Cateto AB} = 3,06 \text{ cm}$$

131. No seguinte triángulo rectángulo coñécese a altura e a proxección dun cateto sobre a hipotenusa. Calcula os lados e os ángulos do triángulo.



Solución:

$$\tan C = 2,84/1,72 \Rightarrow C = 58^\circ 47' 58''$$

$$B = 90^\circ - 28^\circ 47' 58'' = 31^\circ 12' 2''$$

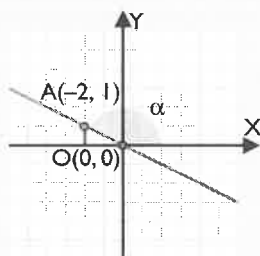
$$\sin B = 2,84/c \Rightarrow c = 5,48 \text{ m}$$

$$\sin C = 2,84/b \Rightarrow b = 3,32 \text{ m}$$

$$\sin B = 3,32/a \Rightarrow a = 6,41 \text{ m}$$

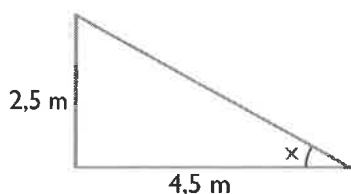
132. Debuxa nuns eixes coordenados unha recta que pase pola orixe de coordenadas $O(0,0)$ e polo punto $A(-2,1)$. Atopa o ángulo que forma o semieixe positivo de abscisas coa devandita recta.

Solución:



$$\tan \alpha = -1/2 \Rightarrow \alpha = 153^\circ 26' 6''$$

133. Calcula o ángulo de elevación dunha escaleira dunha casa que en 4,5 m de horizontal sobe 2,5 m.



Solución:

$$\tan x = 2,5/4,5 \Rightarrow x = 29^\circ 3' 17''$$

134. Resolve o sistema de ecuacións trigonométricas que aparece a continuación:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1 \\ 4 \sin x \sin y = -1 \end{cases}$$

Solución:

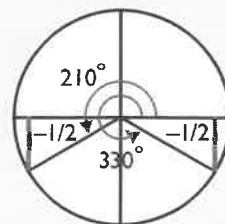
Despéxase $\sin x$ na 1ª ecuación e substitúese na 2ª:

$$\sin x = \sin y + 1$$

$$\begin{aligned} 4(\sin y + 1) \sin y &= -1 \\ 4 \sin^2 y + 4 \sin y + 1 &= 0 \\ (2 \sin y + 1)^2 &= 0 \\ 2 \sin y + 1 &= 0 \\ \text{Si } \sin y &= -1/2 \end{aligned}$$

$$y_1 = 210^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y_2 = 330^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

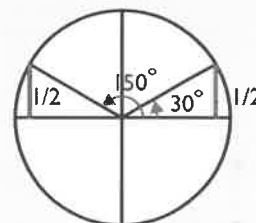


Para $\sin y = -1/2 \Rightarrow \sin x = \sin y + 1 = 1/2$

Se $\sin x = 1/2$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



135. Resolve o sistema de ecuacións trigonométricas que aparece a continuación:

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = 1/2 \\ 2 \sin x \cos y = 1 \end{cases}$$

Solución:

Despéxase $\sin x$ na 1ª ecuación e substitúese na 2ª:

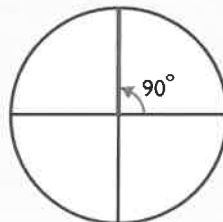
$$\sin x = 1/2 + \cos y$$

$$2(1/2 + \cos y) \cos y = 1$$

$$2 \cos^2 y + \cos y - 1 = 0$$

$$\cos y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

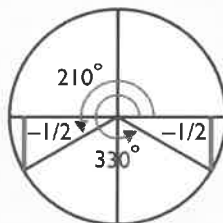
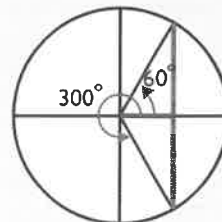
Para $\cos y = 1/2 \Rightarrow \sin x = 1$



$$x = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

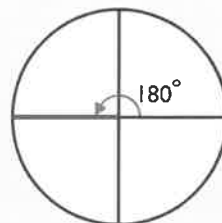
$$y_1 = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}, y_2 = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Para $\cos y = -1 \Rightarrow \sin x = -1/2$



$$x_1 = 210^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}, x_2 = 330^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



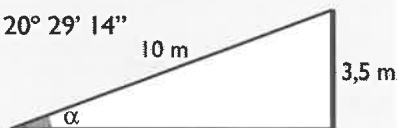
Exercicios e problemas

Para profundar

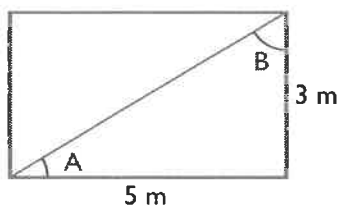
136. Unha cinta transportadora ten unha lonxitude de 10 m e queremos que eleve a carga 3,5 m. Que ángulo de elevación hai que poñerlle?

Solución:

$$\sin \alpha = 3,5/10 \Rightarrow \alpha = 20^\circ 29' 14''$$



137. Un rectángulo mide 5 m de longo e 3 m de alto. Atopa o ángulo que forma a diagonal con cada un dos lados.



Solución:

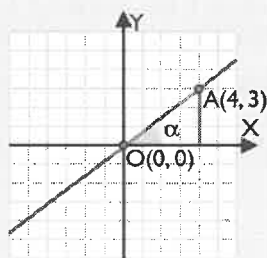
$$\tan A = 3/5 \Rightarrow A = 30^\circ 57' 50''$$

$$B = 90^\circ - 30^\circ 57' 50'' = 59^\circ 2' 10''$$

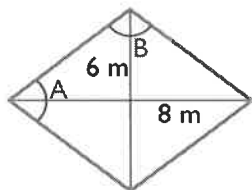
138. Debuxa nuns eixes coordenados unha recta que pase pola orixe de coordenadas $O(0,0)$ e polo punto $A(4,3)$. Atopa o ángulo que forma o semieixe positivo de abscisas coa devandita recta.

Solución:

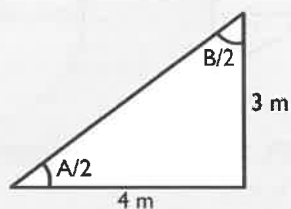
$$\tan \alpha = 3/4 \Rightarrow \alpha = 36^\circ 52' 12''$$



139. Calcula os ángulos dun rombo no que as diagonais miden 6 m e 8 m.



Solución:

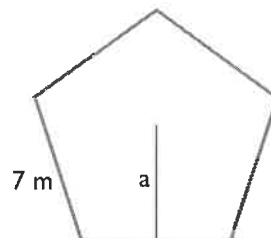


$$\tan A/2 = 3/4 \Rightarrow A/2 = 36^\circ 52' 12''$$

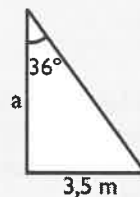
$$A = 73^\circ 44' 24''$$

$$B = 180^\circ - 73^\circ 44' 23'' = 106^\circ 15' 36''$$

140. Calcula o apotema dun pentágono regular cuxo lado mide 7 m.

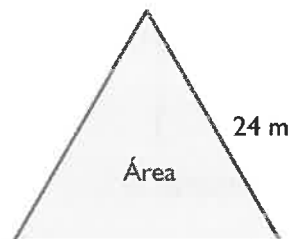


Solución:

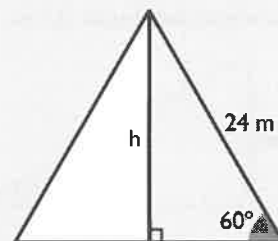


$$\tan 36^\circ = 3,5/a \Rightarrow a = 3,5/\tan 36^\circ = 4,82 \text{ m}$$

141. Calcula a área dun triángulo equilátero cuxo lado mide 24 m.



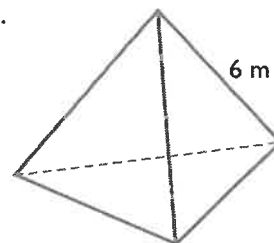
Solución:



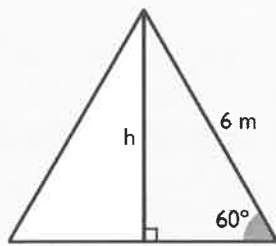
$$\sin 60^\circ = h/24 \Rightarrow h = 24 \sin 60^\circ = 20,78 \text{ m}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 20,78 = 249,36 \text{ m}^2$$

142. Calcula a área dun tetraedro no que a aresta mide 6 m de lonxitude.



Solución:



Previamente calcúlase a área dun triángulo equilátero:

$$\sin 60^\circ = h/6 \Rightarrow h = 6 \sin 60^\circ$$

$$h = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

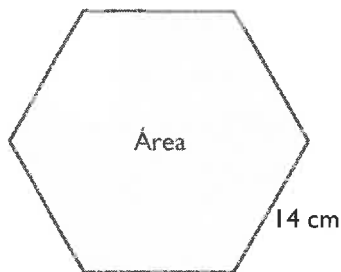
Área dun triángulo equilátero:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \text{ m}^2$$

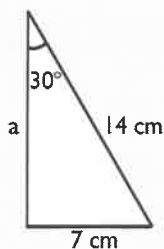
Tetraedro:

$$A_{\text{Tetraedro}} = 4 \cdot 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3} = 62,35 \text{ m}^2$$

143. Calcula a área dun hexágono regular cuxo lado mide 14 cm.



Solución:



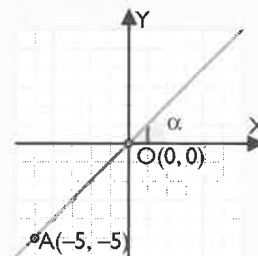
$$\cos 30^\circ = a/14 \Rightarrow a = 14 \cos 30^\circ$$

$$a = 12,12 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 14 \cdot 12,12 = 509,04 \text{ cm}^2$$

144. Debuxa nuns eixes coordenados unha recta que pase pola orixe de coordenadas $O(0,0)$ e polo punto $A(-5,-5)$. Atopa o ángulo que forma o semieixe positivo de abscisas coa devandita recta.

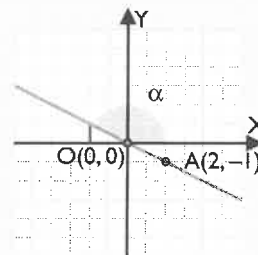
Solución:



$$\alpha = 45^\circ$$

145. Debuxa nuns eixes coordenados unha recta que pase pola orixe de coordenadas $O(0,0)$ e polo punto $A(2,-1)$. Atopa o ángulo que forma o semieixe positivo de abscisas coa devandita recta.

Solución:

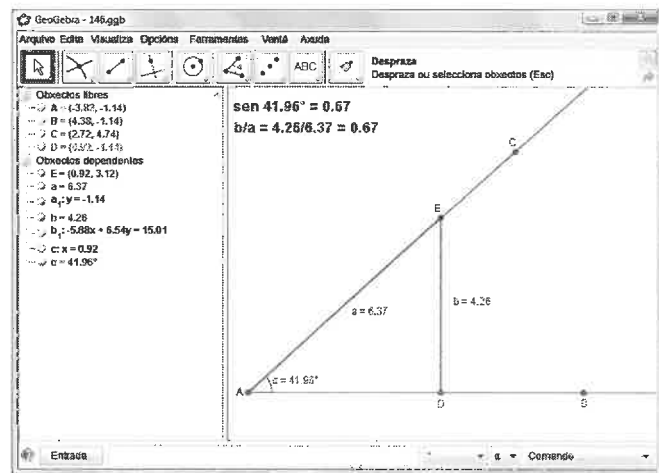


$$\tan \alpha = 1/(-2) \Rightarrow \alpha = 153^\circ 26' 6''$$



Paso a paso

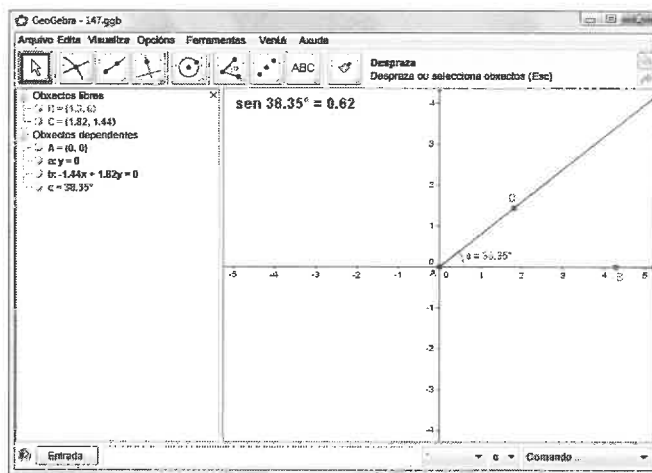
146. Debuxa un ángulo, mide a súa amplitude e calcula e interpreta o valor do seno.



Solución:

Resolto no libro do alumnado.

147. Estuda o signo da razón trigonométrica seno segundo os cuadrantes.



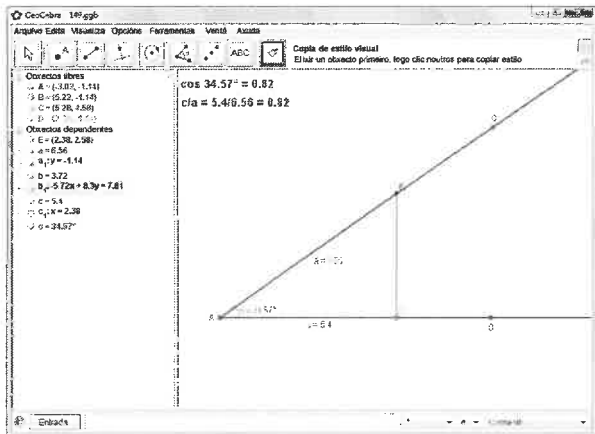
Solución:

Resolto no libro do alumnado.

148. Internet. Abre: www.xerais.es, elixe Matemáticas, curso e tema.

Practica

149. Debuxa un ángulo, mide a súa amplitude e calcula e interpreta o valor do coseno. Gárdao como 149.



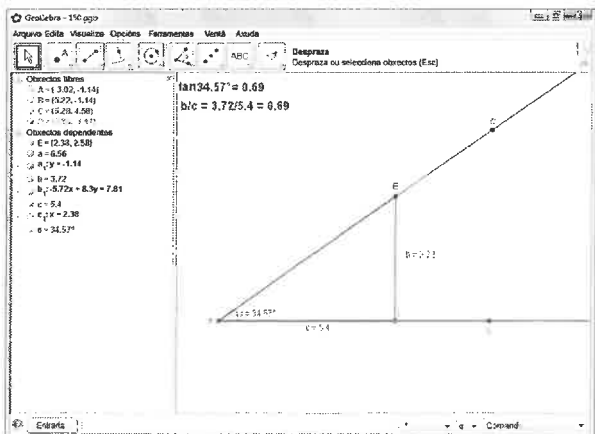
Xeometría dinámica: interactividade

Proba a interactividade coma co seno.

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

150. Debuxa un ángulo, mide a súa amplitude e calcula e interpreta o valor da tanxente. Gárdao como 150.



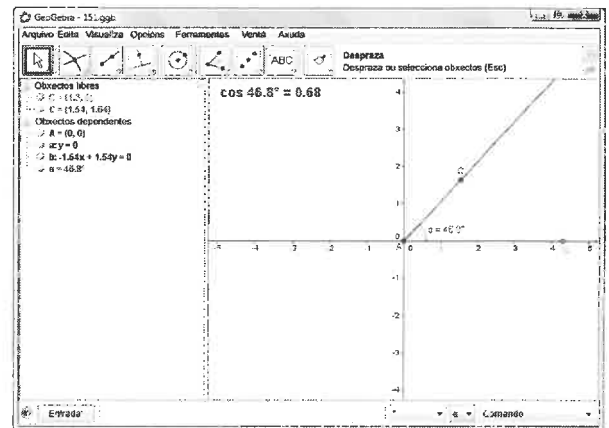
Xeometría dinámica: interactividade

Proba a interactividade coma co seno.

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

151. Estuda o signo da razón trigonométrica coseno segundo os cuadrantes. Gárdao como 151.



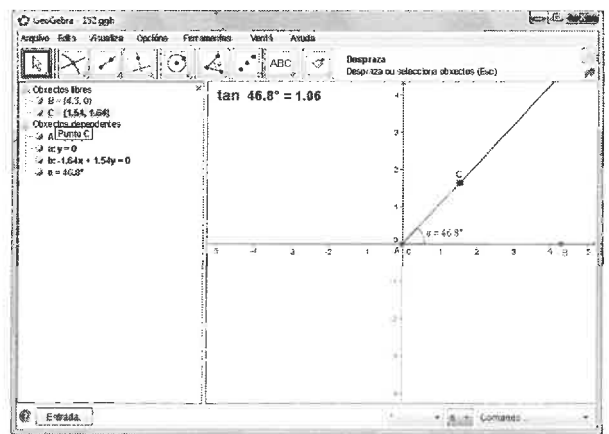
Xeometría dinámica: interactividade

Proba a interactividade coma co seno.

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

152. Estuda o signo da razón trigonométrica tanxente segundo os cuadrantes. Gárdao como 152.



Xeometría dinámica: interactividade

Proba a interactividade coma co seno.

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

Nome das funcións trigonométricas

$\sin x$ $\cos x$ $\tan x$ $\csc x$ $\sec x$ $\cot x$

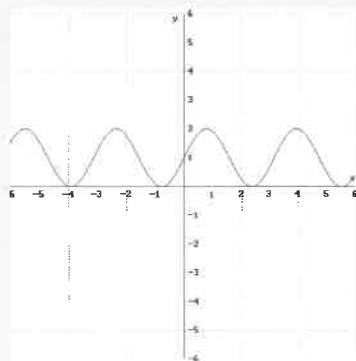
Cando o arco non é só x , hai que poñelo entre parénteses; por exemplo, **sen 2x** escríbese **sin (2x)**.

Demostra as seguintes identidades empregando o **Wiris**. Primeiro representa graficamente o 1º membro e logo o 2º; débese obter a mesma gráfica.

153. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$

Solución:

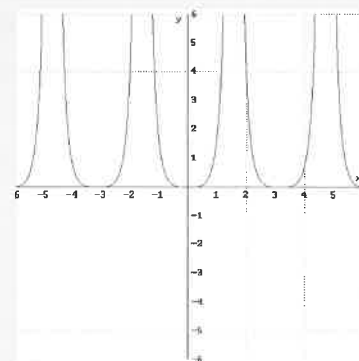
En ambos os membros obtense:



155. $\tan^2 x - \sec^2 x = \tan^2 x \sec^2 x$

Solución:

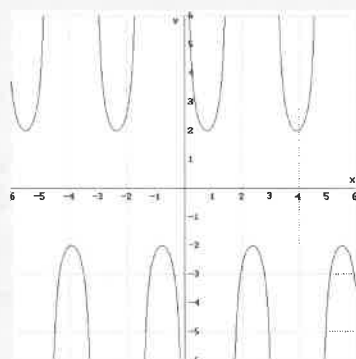
En ambos os membros obtense:



154. $\tan x + \cot x = \sec x \operatorname{cosec} x$

Solución:

En ambos os membros obtense:



156. $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x$

Solución:

En ambos os membros obtense:

