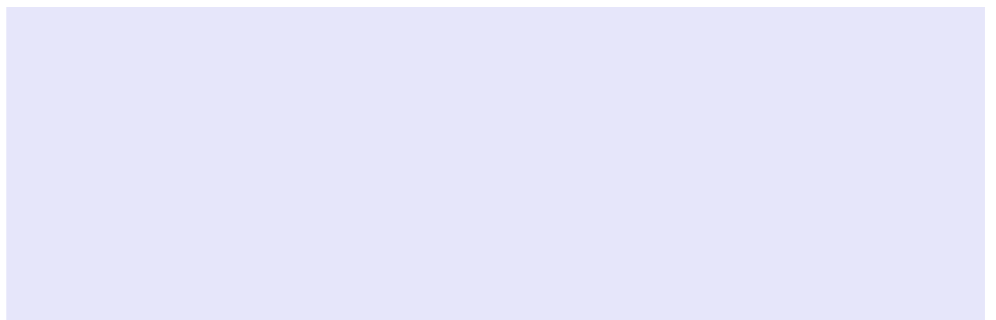


FUNCIONES

(6 semanas)



*El matemático suizo **Leonhard Euler** (1707-1783) introdujo la conocida notación $f(x)$ para funciones. También dio una definición válida de función como expresión o fórmula que involucra ciertas variables y constantes*



I) CONCEPTO DE FUNCIÓN. DEFINICIONES

« Una función es una relación o correspondencia entre dos magnitudes numéricas x e y tal que a cada valor de x le corresponde un solo valor de y »

Hay varias formas de expresar una función, es decir, una dependencia entre dos magnitudes:

1º) Funciones dadas por una expresión algebraica:

Ejemplo 1: Sea $y=2x+3$, o lo que es equivalente, $f(x)=2x+3$. Hacer una tabla que defina la función.

Solución:

x		-3	-2	-1	0	1	2	3	
$f(x)=2x+3$		-3	-1	1	3	5	7	9	

v.g. $f(-2)=2 \cdot (-2)+3=-1$

v.g. $f(2)=2 \cdot 2+3=7$

Definiciones: x es la **variable independiente**

y es la **variable dependiente** (porque, obviamente, y depende de x).

$f(x)$ es la **imagen de x** ← la notación $y=f(x)$ indica que y es función de x , es decir, y depende de x p.ej. "la imagen de 2 (bajo f) es 7", etc.

Ejercicio: 1

2º) Funciones dadas por un enunciado:

Ejemplo 2: Dada la función f que asocia cada número real con su cuadrado, escribir su expresión algebraica y construir la tabla de valores correspondiente.

Solución:

x		-3	-2	-1	0	1	2	3	
$f(x)=$									

(NOTA: Más adelante veremos que esta función es una parábola...)

Ejercicio: 2

3º) Funciones dadas por una tabla:

Ejemplo 3: Completar la siguiente tabla que expresa el sueldo de un vendedor. Hallar la expresión analítica que relaciona ambas variables. Describir la situación por medio de un enunciado:

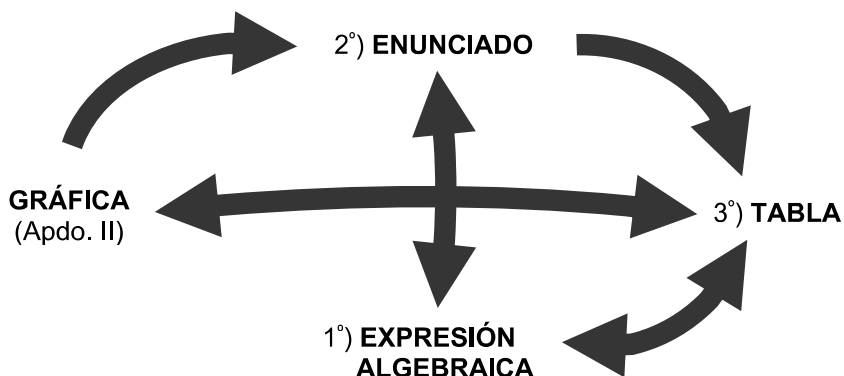
Solución:

NÚMERO de PRODUCTOS VENDIDOS x	0	1	2	3	4	5	
SALARIO (€) y	1 000	1 100	1 200				

Ejercicio: 3

Observaciones:

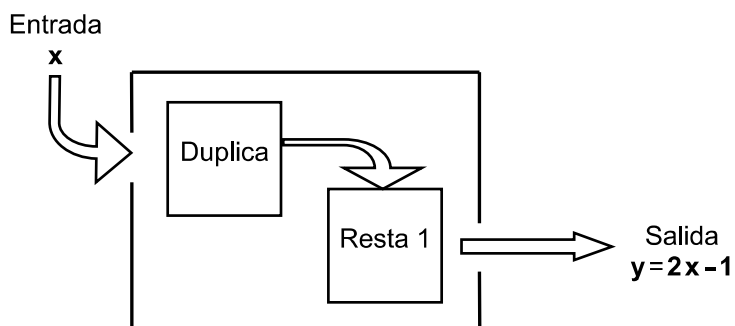
1º) Hay una cuarta forma de expresar una función: **gráficamente**. Lo veremos en el próximo apartado.



2º) Completar la siguiente tabla:

	EXPRESIÓN ALGEBRAICA	ENUNCIADO	TABLA	GRÁFICA
VENTAJAS	– Es una forma sencilla y rápida de expresar una función. – Es muy fácil obtener valores de la función dando valores a x.			– Nos da una idea intuitiva de la relación entre ambas magnitudes.
INCONVENIENTES	– Nos dice muy poco de cómo se comporta la función.			

3º) **El SÍMIL de la "MÁQUINA"**: Una función es como una máquina en la que un número x es introducido y devuelve otro valor y o $f(x)$:



Así, si 3 es introducido en la máquina, se obtiene $f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Este "símil de la máquina" es bastante versátil y útil. Lo utilizaremos para explicar muchas propiedades y conceptos de las funciones.

4º) Una función puede también ser definida de una forma más exhaustiva. En el caso del ejemplo 2:

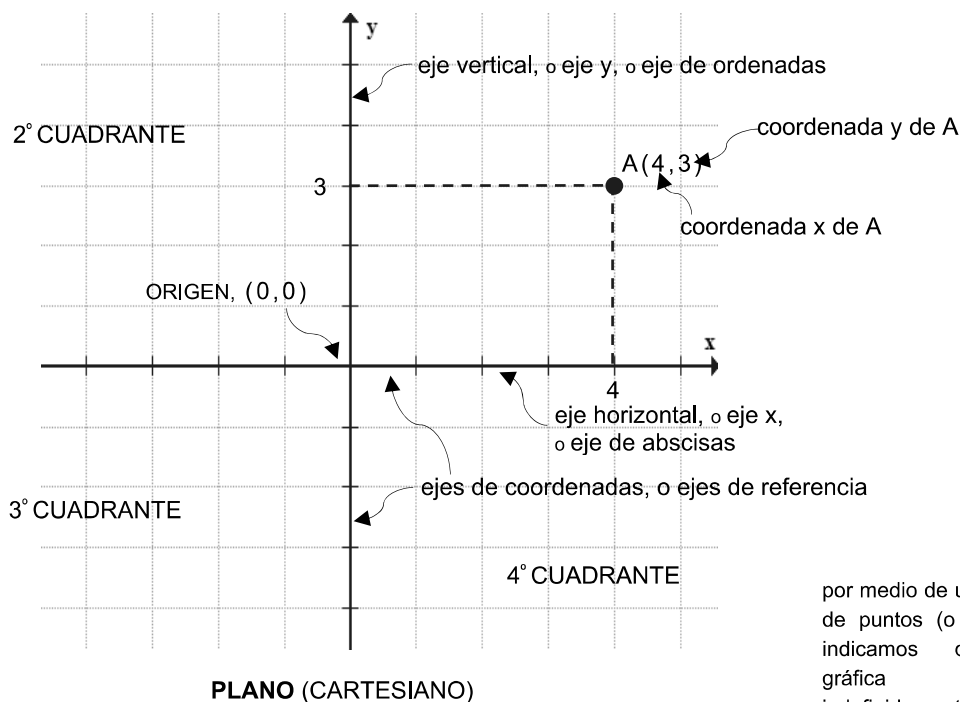
$$\begin{array}{lcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longrightarrow & f(x)=x^2 \end{array}$$

pero en la práctica esta notación se acorta y simplemente se dice $f(x)=x^2$.

5º) Recordar: «A cada valor de x le corresponde uno y solo un valor de y ».

II) GRÁFICA de una FUNCIÓN

Definiciones:



En la práctica, para dibujar la gráfica de una función, normalmente construimos una tabla apropiada que relacione x e y , y después trasladamos esos puntos al plano cartesiano y los unimos por medio de una línea suave y continua.

Sin embargo, en el apdo. III veremos que en ciertos casos (funciones discontinuas, escalonadas, etc.) ello no es posible.

por medio de una línea de puntos (o flechas) indicamos que la gráfica continúa indefinidamente (rama infinita)

Ejemplo 2: Dibujar la gráfica de $f(x)=x^2$ mediante tabla de valores:

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$f(x)=x^2$	...												...



Definición: «La gráfica de una función $y=f(x)$ está formada por los ∞ puntos (x,y) que verifican la expresión dada, es decir, que verifican $y=f(x)$ ».

Observación: El hecho de que a cada valor de x no pueda corresponderle más de una imagen y implica **EL TEST DE LA RECTA VERTICAL:** «Una recta imaginaria **vertical** que se desplace por el plano de izquierda a derecha no puede cortar a la gráfica más de una vez¹».

¹ Sin embargo, una recta **horizontal** que se desplace de abajo a arriba puede cortar a la gráfica varias veces, ya que un $f(x)$ concreto puede tener varios x de los que proceda ... (como en el ejemplo 2)

Ejercicios: 4, 5 y 6

Resumen:

Función de 1º grado $\Rightarrow$ recta

Función de 2º grado $\Rightarrow$ parábola

III) PROPIEDADES que se DEDUCEN de la GRÁFICA de una FUNCIÓN

III.1) Dominio y Recorrido:

«El **dominio de definición** de una función es el conjunto de todos los números reales x para los que existe imagen».

Es decir, el dominio de una función es el conjunto de todos los posibles valores de x . Se simboliza mediante $\text{Dom}(f)$, o $\text{Dom}f(x)$, etc. En el ejemplo 2, es obvio que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

«El **recorrido o (conjunto) imagen** de una función es el conjunto de todos los posibles valores de y que toma la función».

En otras palabras, es el conjunto formado por todos los valores que recorren las imágenes, y se denota como $\text{Im}(f)$, o $\text{R}(f)$, etc. En el ejemplo 2, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+$, lógicamente.

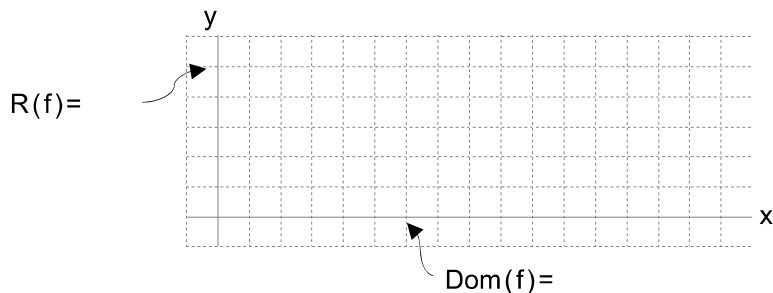
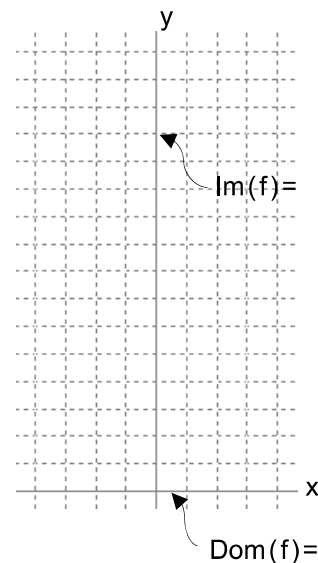
Ejemplo 2: Justificar, analíticamente (completar la tabla) y gráficamente, cuál es el $\text{Dom}(f)$ e $\text{Im}(f)$ de $f(x) = x^2$.

x	...	-2	-1	0	1/2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	π	...	$\Rightarrow \text{Dom}(f) =$
$y = x^2$	...								...	$\Rightarrow \text{R}(f) =$

Por tanto, la notación exhaustiva para esta función sería: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \longrightarrow f(x) = x^2$

Ejemplo 4: Ídem con $f(x) = \sqrt{x}$.

x									...	$\Rightarrow \text{Dom}(f) =$
$f(x) = \sqrt{x}$									...	$\Rightarrow \text{Im}(f) =$

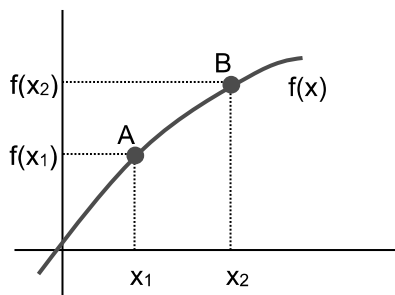


Notas: 1º) Para obtener **Dom(f) gráficamente**, podemos recorrer imaginariamente el eje x de izquierda a derecha y ver dónde hay gráfica.

- 2º) Similarmente, para obtener **R(f) gráficamente**, podemos recorrer imaginariamente **el eje y** de abajo a arriba y ver dónde hay gráfica.
- 3º) De acuerdo con el "Símil de la máquina":
- **El dominio** es simplemente el conjunto de todos los valores posibles de **x** que pueden ser introducidos en la máquina sin producir error.
 - **El conjunto imagen o recorrido** es el conjunto de todos los valores o posibles resultados **y** que pueden salir de la máquina.

III.2) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: (también llamados "Intervalos de monotonía")

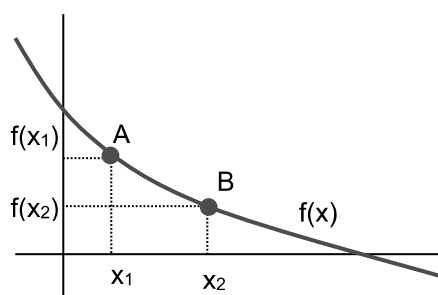
Idea intuitiva:



FUNCIÓN CRECIENTE

«Una función es **creciente** ($\nearrow$) si a medida que aumentan las **x** aumentan también las imágenes **y** correspondientes»:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



FUNCIÓN DECRECIENTE

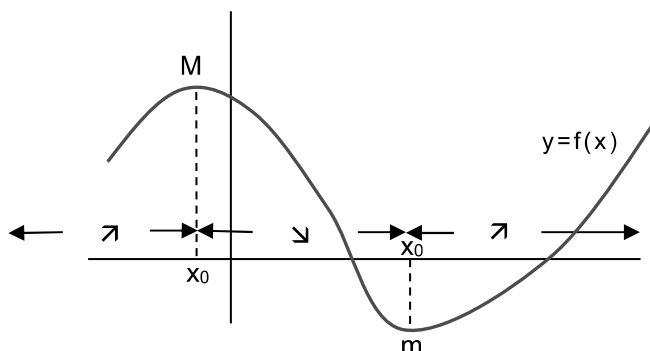
«Una función es **decreciente** ($\searrow$) si a medida que aumentan las **x** disminuyen las imágenes **y** correspondientes»:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- Notas:** 1º) Se suele indicar que una función es creciente mediante el símbolo $\nearrow$, y $\searrow$ si es decreciente.
- 2º) Los intervalos de crecimiento siempre se indican con respecto al eje x.
- 3º) En el caso particular de la **función constante**, la definición es $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

III.3) Máximos y mínimos (relativos o locales):

En general, las funciones tienen intervalos de crecimiento ($\nearrow$) y decrecimiento ($\searrow$), separados por máximos (**M**) y mínimos (**m**):



- «Un máximo (relativo o local) es un punto donde la función cambia de creciente ($\nearrow$) a decreciente ($\searrow$)».
- Su símbolo es **M**.
- Un máximo es como un "pico" en la gráfica.
- En otras palabras, «una función tiene un máximo (relativo o local) en $x=x_0$ si en las proximidades de dicho punto los valores de la función son todos $< f(x_0)$ ».

- «Un mínimo (relativo o local) es un punto donde la función cambia de decreciente ($\searrow$) a creciente ($\nearrow$)».
- Su símbolo es **m**.
- Un mínimo es como un "valle" en la gráfica.
- En otras palabras, «una función tiene un mínimo (relativo o local) en $x=x_0$ si en las proximidades de dicho punto los valores de la función son todos $> f(x_0)$ ».

Observaciones:

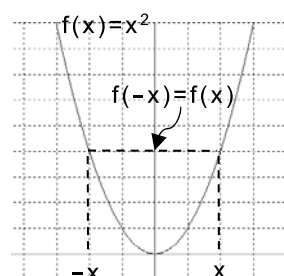
- 1º) Los intervalos de monotonía se expresan siempre con respecto al eje x.
- 2º) Estos M y m así definidos se llaman propiamente **extremos relativos o locales**².
- 3º) Una función puede tener uno o varios **M** o **m**, o no tener ni **M** ni **m**.
- 4º) Es obvio que si $f(x)$ es continua, siempre habrá un **m** entre dos **M**, y viceversa.

III.4) Simetría:

Algo que es **simétrico** siempre va a tener dos mitades iguales; en otras palabras, un lado es idéntico al otro. Existen muchos tipos de simetría de una función, pero en este curso solo vamos a ver dos tipos:

a) $f(x)$ FUNCIÓN PAR (o simetría PAR):

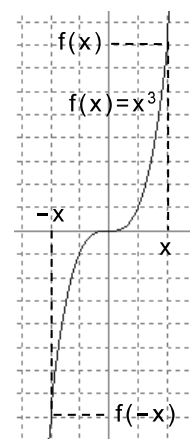
x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)=x^2$	...	9	4	1	0	1	4	9	...



$$f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ simétrica con respecto al eje } y \quad [f(x) \text{ FUNCIÓN PAR}]$$

b) $f(x)$ FUNCIÓN IMPAR (o simetría IMPAR):

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)=x^3$	...	-27	-8	-1	0	1	8	27	...



$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ simétrica con respecto al origen} \quad [f(x) \text{ FUNCIÓN IMPAR}]$$

² Existen también **extremos absolutos**, como veremos en Bachillerato.

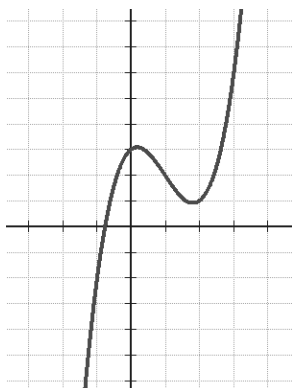
Notas:

- 1º) «Una función se dice que es PAR si su gráfica es simétrica respecto al eje y ». Análogamente, «una función es IMPAR si en cierto modo es simétrica respecto al origen».
- 2º) Naturalmente, hay muchos más tipos de simetrías. Sin embargo, en este curso solo vamos a ver estos dos.
- 3º) Obviamente, la mayoría de las funciones no son necesariamente simétricas. Una función puede ser par, impar, o nada (esto último, lo más habitual).
- 4º) Por ejemplo, si una función par tiene un máximo en $M(2,5)$, necesariamente tendrá otro en $M(-2,5)$. Sin embargo, si es impar, tendría un mínimo en $m(-2,-5)$.
- 5º) Usamos el adjetivo "par" porque las funciones pares más típicas son $y=x^2$, es decir, con un exponente par (Nótese que $y=x^4$, $y=x^2-2x^6$, etc. también serán pares). Del mismo modo, la función impar más típica es $y=x^3$.

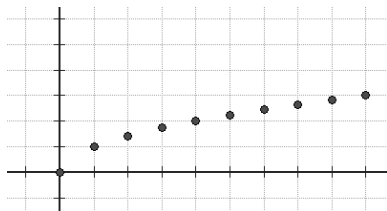
III.5) Continuidad y discontinuidad:

Intuitivamente, «una función es CONTINUA si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel». Evidentemente, esta definición no es precisa, pero veremos una definición más formal en Bachillerato, que nos permitirá conocer la continuidad de una función sin necesidad de representarla previamente. Pero por el momento, nos conformaremos con deducir la continuidad a partir de la gráfica.

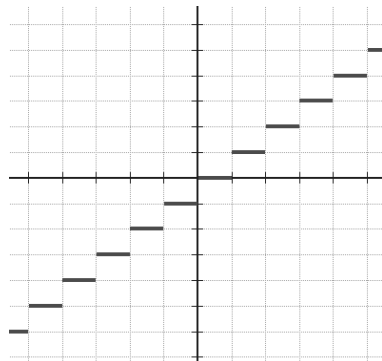
En caso contrario, la función se dice **DISCONTINUA**. En este caso, su gráfica muestra "saltos" denominados "**puntos de discontinuidad**":



CONTINUA



DISCONTINUA



DISCONTINUA
(Función escalonada)

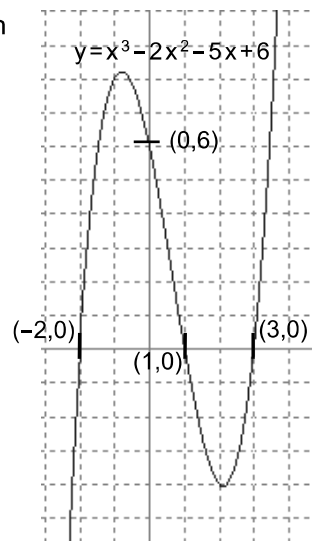
En la práctica, normalmente estudiaremos si una función es continua en un intervalo. «La continuidad siempre se expresa con respecto al eje x ».

III.6) Puntos de corte con los ejes:

Considerar el **ejemplo 5** del gráfico anexo. Es fácil de entender cómo tenemos que obtener analíticamente —esto es, sin dibujar la gráfica— los puntos de corte con los ejes:

cortes(s) eje x : hay que imponer $y=0$, es decir, resolver una ecuación.

corte eje y : hay que sustituir $x=0$.



Compruébese este hecho a continuación por medio del **ejemplo 5**, es decir, $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$:

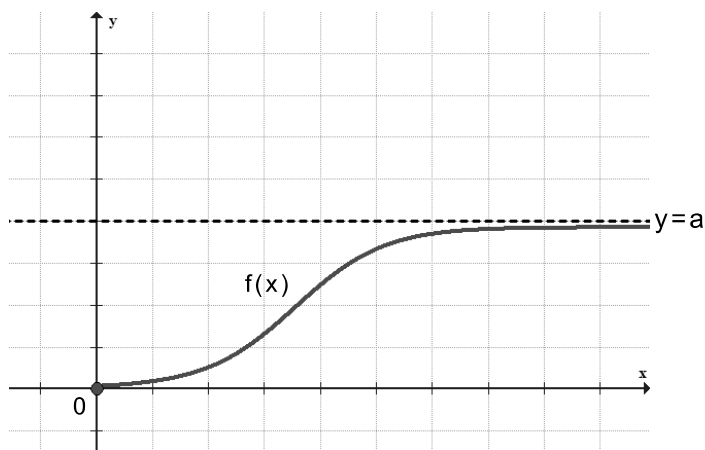
Además, nótese que una función no tiene por qué cortar necesariamente al eje **x** ni al **y**.

Adviértase también que solo se puede cortar al eje **y** como máximo una vez. Recíprocamente, puede haber uno, o varios, o incluso infinitos cortes con el eje **x**, o no haber.

Todas estas cuestiones se resumen en la siguiente tabla:

CORTE:	¿CÓMO SE CALCULA?:	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje X	imponer $y=0$ (es decir, resolver una ecuación)	varios, 1 o 0 (o incluso ∞)
eje y	sustituir $x=0$	0 o 1

III.7) Tendencia de una función. Asíntotas:



- Considerar la gráfica adjunta. A medida que aumenta la x , la y **tiende** al valor " a ".
- En este caso se dice que $y=a$ es una **asíntota horizontal**. «Una **asíntota es una recta a la que la gráfica se acerca cada vez más, pero sin llegar jamás a tocarla**».
- También existen **asíntotas verticales**, como veremos en algunos ejemplos (o incluso oblicuas, como veremos en Bachillerato).

