

10 Derivada dunha función

LITERATURA E MATEMÁTICAS

A cidade Rosa e Vermella

Aquela princesa de longos e dourados cabelos estaba alarmada ao observar que cada día moitos deles quedaban enredados no seu peite. Pero, para a súa tranquilidade, a conta mantiñase sempre ao redor dos cento cincuenta mil cabelos, pese a que se lle caían uns cincuenta diarios, polo que non parecía probable que fose perder o seu dourado atributo.

Chegado o momento de tomar esposo, a princesa declarou que só casaría con quen adivinase a lonxitude da súa cabeleira. Eran datos sobradamente coñecidos o número dos seus cabelos e os que perdía diariamente, así como o feito de que nunca os cortaba, xa que a augusta melena era un dos temas de conversación máis frecuentes en palacio. Así que o astrónomo real, que a amaba en silencio, presentouse ante a princesa (que para confundir os seus pretendentes recollía o pelo nun enorme moño) e díxolle:

—Se tedes cento cincuenta mil cabelos e se vos caen uns cincuenta diarios, dentro de tres mil días caerán todos os que agora adornan a vosa cabeza (aínda que, naturalmente, para entón teredes outros cento cincuenta mil, que vos irían saíndo ao mesmo ritmo que vos caen, posto que a conta diaria demostra que o número dos vosos cabelos permanece constante). Loxicamente, os últimos en caer serán os que hoxe mesmo vos saísen, o que equivale a dicir que a vida media dun cabelo é de tres mil días. Posto que o cabelo humano (mesmo o principesco) crece a razón dun centímetro ao mes, e tres mil días son cen meses, a vosa cabeleira debe medir no seu punto de máxima lonxitude (xa que en realidade tedes cabelos de todas as medidas) aproximadamente un metro.

A princesa casou co astrónomo, que, afeito a contar as estrelas, pasou a ocuparse persoalmente do cómputo dos cabelos, unindo ao rigor do científico a solicitude do esposo.

CARLO FRABETTI

Taxa de variación media

Derivada dunha función nun punto

Función derivada

Derivadas de funcións elementais

Regra da cadea

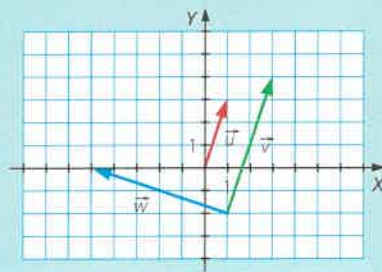
Ao supoñer que a «velocidade» de crecemento do cabelo é constante: 1 cm/mes, a función que relaciona a lonxitude, en cm, do cabelo (l) e o tempo, en meses, transcorridos, (t) é $l = t$. Se a velocidade de crecemento fose de 2 cm/mes, a fórmula sería $l = 2t$. Pero esta velocidade non é sempre constante. Imaxina que, por efecto dun *crecepele*, a relación entre a lonxitude e o tempo vén expresada pola fórmula $l = 3\sqrt{t}$. Determina a velocidade de crecemento entre os meses 2.º e 7.º, 2.º e 6.º, 2.º e 4.º. É constante?

ANTES DE COMEZAR... LEMBRA

Vectorios paralelos e perpendiculares

Dous **vectorios paralelos** son da forma $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (ku_1, ku_2)$, con $k \in \mathbb{R}$.

Dous **vectorios perpendiculares** son da forma $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (-ku_2, ku_1)$, con $k \in \mathbb{R}$.



Os vectorios $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son paralelos porque $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{v} = (2 \cdot 1, 2 \cdot 3) = (2, 6)$.

Os vectorios $\vec{u}$ e $\vec{w}$ son perpendiculares porque $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{w} = (-2 \cdot 3, 2 \cdot 1) = (-6, 2)$.

Repasa

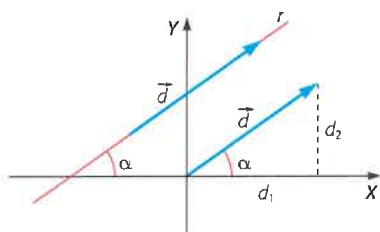
- 1 Determina cales destes vectorios son paralelos e cales son perpendiculares a $\vec{v} = (-2, 1)$.

a) $\vec{v}_1 = (-6, 3)$ b) $\vec{v}_2 = (-2, -4)$ c) $\vec{v}_3 = (8, -4)$

Pendente dunha recta

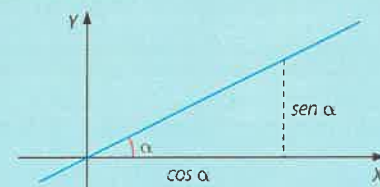
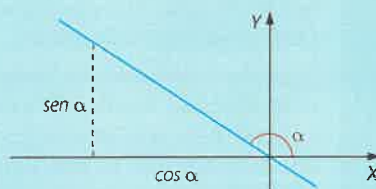
A **pendente** dunha recta coincide coa tanxente do ángulo que forma a recta co eixe de abscisas.

$$\tan \alpha = \frac{d_2}{d_1} = m$$



A pendente dunha recta determina a súa inclinación.

Se $m > 0$
 $\tan \alpha > 0 \rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$



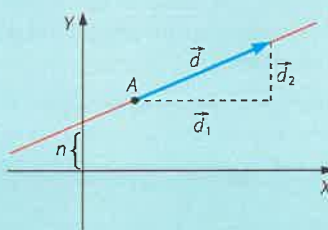
Se $m < 0$
 $\tan \alpha < 0 \rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Repasa

- 2 O ángulo que forma unha recta co eixe de abscisas, pode medir máis de 180° ? Por que?

Ecuación punto-pendente dunha recta

Unha recta que pasa polo punto $A(a, b)$, e ten como vector director $\vec{d} = (d_1, d_2)$, pódese expresar mediante a ecuación $y = mx + n$, con $m = \frac{d_2}{d_1}$ e $n = -\frac{d_2}{d_1}a + b$.



$$\begin{aligned} y = mx + n &\rightarrow y = \frac{d_2}{d_1}x - \frac{d_2}{d_1}a + b \\ &\rightarrow y - b = \frac{d_2}{d_1}(x - a) \\ &\rightarrow y - b = m(x - a) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad m = \frac{d_2}{d_1} \end{aligned}$$

Esta é a ecuación punto-pendente da recta.

Repasa

- 3 Calcula a ecuación punto-pendente dunha recta que pasa polo punto $A(-3, 6)$ e que ten como vector director $\vec{v} = (2, -4)$.

Continuidade dunha función

Unha **función** $f(x)$ é **continua** nun punto $x = a$ se se cumpren estas condicións.

- 1.º Existe $f(a)$.
- 2.º Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- 3.º Cúmrese que $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

- As **funcións polinómicas** son continuas en todos os números reais.
- As **funcións racionais** non son continuas nos puntos que anulan o denominador.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} \rightarrow f(x) \text{ é continua en } \mathbb{R} - \{3\}.$$

- As **funcións con radicais** de índice par non existen nos valores que fan o radicando negativo. Se o índice é impar, son funcións continuas.

$$f(x) = \sqrt{x - 2} \rightarrow f(x) \text{ é continua en } [2, +\infty).$$

- As **funcións exponenciais** son continuas en todos os números reais.
- As **funcións logarítmicas** non son continuas nos puntos en que a expresión da que temos que calcular o logaritmo se converte en cero ou nun número negativo.

$$f(x) = \ln(x + 1) \rightarrow f(x) \text{ é continua en } (-1, +\infty).$$

- Das **funcións trigonométricas**, a única función que non é continua é $f(x) = \tan x$, xa que non existe en $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e en $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

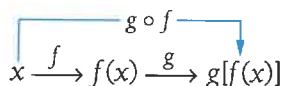
Repasa

- 4 Estuda a continuidade destas funcións.

a) $f(x) = -\frac{5}{x-1}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ c) $h(x) = \ln \frac{1}{x}$

Composición de funcións

Chámase función composta de f con g á función $(g \circ f)$ que cumpre: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.



Se temos as funcións $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 2x + 1$, cúmprese que:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x^2) = 2(3x^2) + 1 = 6x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g(12) = 2 \cdot 12 + 1 = 25$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

Repasa

- 5 Dadas as funcións $f(x) = (2x - 1)^2$ e $g(x) = \sqrt{x - 2}$, calcula $g \circ f(2)$ e $f \circ g(2)$.

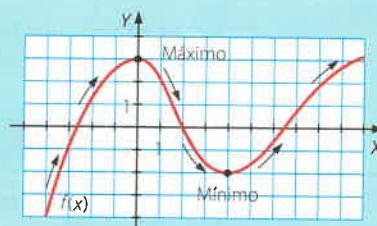
Crecemento e decrecemento dunha función

f é **crecente** nun intervalo (a, b) se para calquera valor de x_1, x_2 do intervalo, con $x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$.

f é **decrecente** nun intervalo (a, b) se para calquera valor de x_1, x_2 do intervalo, con $x_1 < x_2$: $f(x_1) > f(x_2)$.

f presenta un **máximo** en x_0 se, nese punto, a función pasa de ser crecente a ser decrecente.

f presenta un **mínimo** en x_0 se, nese punto, a función pasa de ser decrecente a ser crecente.



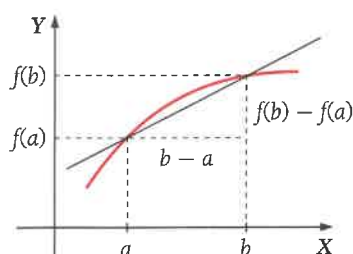
A función é crecente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(4, +\infty)$ e é decrecente no intervalo $(0, 4)$.

Ten un máximo en $(0, 3)$ e un mínimo en $(4, -2)$.

Repasa

- 6 Se a función $f(x)$ crece no intervalo $(-10, -2)$ e decrece no intervalo $(-2, 22)$, que ocorre no punto $x = -2$?

1 Taxa de variación media



A taxa de variación media dunha función $f(x)$ nun intervalo $[a, b]$ é o co-ciente:

$$T.V.M.([a, b]) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

A taxa de variación media dunha función nun intervalo mide o aumento ou a diminución desa función nese intervalo. O seu valor coincide co valor da pendente da recta tanxente que une os puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

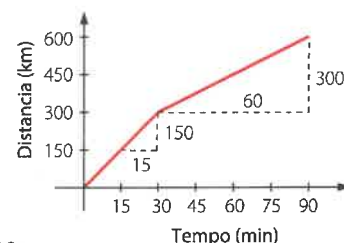
Exemplos

- 1 Calcula a taxa de variación media de $f(x) = x^2$, en $[0, 1]$ e en $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

$$T.V.M.([0, 1]) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$T.V.M.\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right) = \frac{f\left(\frac{1}{4}\right) - f(0)}{\frac{1}{4} - 0} = \frac{0,0625}{0,25} = 0,25$$

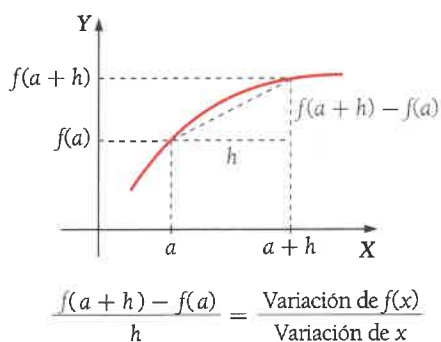
- 2 Unha avioneta que realiza un percorrido entre dúas cidades modifica a súa velocidade. A gráfica mostra a relación entre o tempo empregado e a distancia percorrida. Determina a taxa de variación media nos intervalos de tempo $[15, 30]$ e $[30, 90]$, e interpreta o resultado.



$$T.V.M.([15, 30]) = \frac{f(30) - f(15)}{30 - 15} = \frac{150}{15} = 10$$

$$T.V.M.([30, 90]) = \frac{f(90) - f(30)}{90 - 30} = \frac{300}{60} = 5$$

No primeiro intervalo, a distancia varía a razón de 10 km por minuto, e no segundo, a razón de 5 km por minuto.



A miúdo, na taxa de variación media considérase o intervalo $[a, a + h]$, onde h indica a súa lonxitude.

Exemplo

- 3 Cal é a taxa de variación media de $f(x) = x^2$ en $[a, a + h]$, sendo $a = 0$?

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2}{h} = h$$

ACTIVIDADES

- 1 Calcula a taxa de variación media das funcións:

$$f(x) = x^2 + x \quad g(x) = x^3 + x$$

nos seguintes intervalos.

a) $[0, 1]$

b) $[2, 3]$

- 2 A cotización dunha acción segue durante unha semana a función $f(x) = 0,02x^2 + 1$, onde x é o día da semana ($0 = \text{luns}, 1 = \text{martes}, \dots$).

Calcula a taxa de variación media desa cotización de luns a venres.

2 Derivada dunha función nun punto

A derivada da función $f(x)$ nun punto de abscisa a denótase por $f'(a)$, e é o valor deste límite, se existe e é finito.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Se nesta definición facemos $x = a + h$, a fórmula é equivalente a:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Exemplo

- 4 Calcula a derivada da función $f(x) = x^2$ en $a = 1$. Comproba que as dúas fórmulas anteriores son equivalentes.

Comprobamos unha definición:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 1+1 = 2$$

Comprobamos a outra definición:

$$f(1+h) - f(1) = (1+h)^2 - 1 = 1 + 2h + h^2 - 1 = 2h + h^2$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$$

Antes de calcular a derivada dunha función nun punto convén simplificar a taxa de variación media correspondente.

Faino así

COMO CALCULAMOS A DERIVADA DUNHA FUNCIÓN NUN PUNTO

Cal é a derivada de $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ no punto $x = 1$?

PRIMEIRO. Calculamos o incremento da función e simplificamos o resultado.

$$f(1+h) - f(1) = \frac{1}{(1+h)^2 - 3} - \frac{1}{1^2 - 3} = \frac{1}{h^2 + 2h - 2} + \frac{1}{2} = \frac{h^2 + 2h}{2(h^2 + 2h - 2)}$$

SEGUNDO. Calculamos a taxa de variación media da función.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{h^2 + 2h}{2(h^2 + 2h - 2)}}{h} = \frac{h(h+2)}{2h(h^2 + 2h - 2)} = \frac{h+2}{2(h^2 + 2h - 2)}$$

TERCEIRO. Calculamos o límite do resultado obtido cando h tende a cero.

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+2}{2(h^2 + 2h - 2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

ACTIVIDADES

- 3 Calcula a derivada destas funcións en $x = 1$.

a) $f(x) = 4x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

- 4 Calcula a derivada das funcións nos puntos $x = 0$ e $x = 1$.

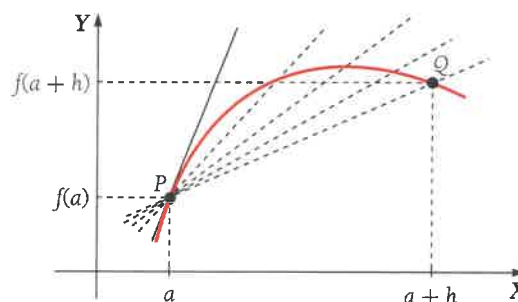
a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

3 Interpretación xeométrica da derivada

Xeometricamente, a derivada $f'(a)$ é a **pendente da recta tanxente** á gráfica da función no punto $P(a, f(a))$.

Comprobamos graficamente este resultado.



T.V.M. $([a, a+h])$ = Pendente da recta que pasa por $P(a, f(a))$ e $Q(a+h, f(a+h))$

$h \rightarrow 0$

Q achégase a P

$f'(a)$

Pendente da recta tanxente a $f(x)$ no punto $P(a, f(a))$

Exemplo

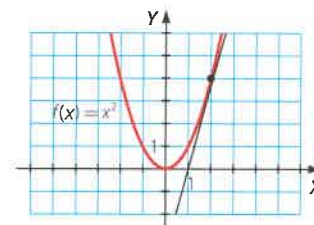
- 5 Calcula a pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x) = x^2$ no punto de abscisa $x = 2$.

Determinamos a derivada da función no punto $x = 2$. Para iso, calculamos o incremento da función.

$$f(2+h) - f(2) = (2+h)^2 - 4 = \cancel{4} + 4h + h^2 - \cancel{4} = 4h + h^2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4 \end{aligned}$$

Logo a pendente da recta tanxente é 4.



ACTIVIDADES

- 5 Calcula a pendente da recta tanxente á gráfica da función $f(x) = x^2 + 2$ en $x = 2$.
- 6 Cal é a pendente da recta tanxente á gráfica da función $f(x) = x^3$ en $x = -1$?

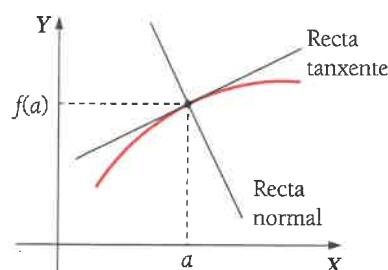
Ecuacións da recta tanxente e da recta normal

A ecuación da **recta tanxente** no punto $P(a, f(a))$ é:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

A **recta normal** á gráfica da función no punto $P(a, f(a))$ é a recta perpendicular á recta tanxente, e a súa ecuación é:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$



Exemplos

6 Calcula as ecuacións das rectas tanxente e normal á gráfica da función

$f(x) = \frac{3}{x-2}$ no punto $P(3, 3)$. Representa ambas as rectas.

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\frac{3}{(3+h)-2} - 3}{h} = \frac{\frac{3}{1+h} - 3}{h} = \frac{\frac{3 - 3(1+h)}{1+h}}{h} = \frac{\frac{3 - 3 - 3h}{1+h}}{h} = \frac{\frac{-3h}{1+h}}{h} = \frac{-3}{1+h}$$

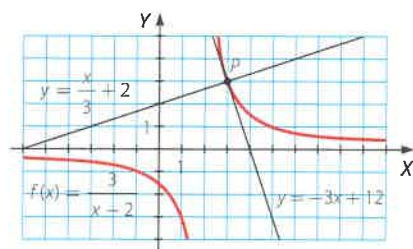
$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{1+h} = -3$$

A ecuación da recta tanxente é:

$$y - 3 = f'(3) \cdot (x - 3) \rightarrow y - 3 = -3(x - 3) \rightarrow y = -3x + 12$$

A ecuación da recta normal é:

$$y - 3 = \frac{1}{-3}(x - 3) \rightarrow y = \frac{x}{3} + 2$$



7 Determina as ecuacións das rectas tanxente e normal á gráfica da función $f(x) = x^2 + 2$ no punto $x = 0$, e representa esas rectas.

Calculamos a pendente da recta tanxente no punto $x = 0$.

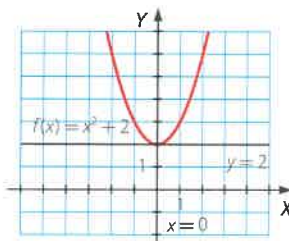
$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

A ecuación da recta tanxente é:

$$y - 2 = f'(0) \cdot (x - 0) \rightarrow y = 2$$

Como $f'(0) = 0$ e a recta tanxente é paralela ao eixe X, a recta normal será paralela ao eixe Y.

A súa ecuación é $x = 0$.



Decátate



Se $f'(0) = 0$, a ecuación da recta tanxente é $y = f'(a)$, e a ecuación da recta normal é $x = a$.

ACTIVIDADES

7 Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica da función $f(x) = 2x^2$ no punto $P(-1, 2)$.

Cal é a ecuación da recta normal?

8 Calcula as ecuacións das rectas tanxentes á función $f(x) = x^3 + 1$ nos puntos $x = 1$ e $x = -1$.

Comproba que son paralelas á recta $y = 3x + 4$.

4 Función derivada

Decátate



Non se debe confundir a derivada dunha función f nun punto coa función derivada, xa que a primeira é un número real e a segunda é unha función. É habitual falar de derivada para referirnos á función derivada.

A **función derivada** dunha función $f(x)$ é unha función, $f'(x)$, que asocia a cada punto x a derivada de $f(x)$ nese punto.

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemplos

- 8 Calcula a función derivada da función $f(x) = 2x^2$. Cal é o valor de $f'(x)$ nos puntos $x = 1$ e $x = -4$?

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h)}{h} = 4x$$

A partir deste resultado podemos obter directamente $f'(1)$ e $f'(-4)$.

$$f'(1) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$f'(-4) = 4 \cdot (-4) = -16$$

- 9 Calcula a función derivada da función: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Como $f(x)$ é unha función continua definida a anacos, para obter a función derivada temos que distinguir o seu valor en cada unha das partes que a forman e, despois, analizar que ocorre no punto no que pasa dunha expresión alxébrica a outra.

$$\text{Se } x > 0: f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

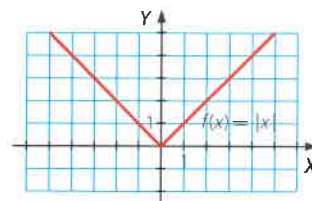
$$\text{Se } x < 0: f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x-h+(-x)-(-x)}{h} = -1$$

$$\text{Se } x = 0: f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0-h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

→ Non é derivable en $x = 0$.

Graficamente comprobamos que a función non é derivable nos puntos onde presenta «picos».



Non esquezas



Para que unha función sexa derivable nun punto, debe ser continua nel.

ACTIVIDADES

- 9 Calcula a función derivada de $f(x) = 4x + 2$, aplicando a definición de derivada dunha función nun punto. A partir do resultado que obtiveches, calcula a derivada de $f(x)$ nestes puntos.

a) $x = 2$

b) $x = -7$

Comproba que obtés o mesmo resultado que se utilizas a definición de derivada nun punto.

- 10 Cal é a función derivada destas funcións?

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

- 11 Utiliza a definición para calcular a función derivada da función $f(x) = 2x^3 + x^2$.

5 Operacións con derivadas

A seguir, imos ver como se pode calcular a derivada dalgunhas operacións con funcións.

5.1. Derivada da suma de funcións

A derivada da suma de funcións é a suma das derivadas desas funcións.

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

Comprobamos este resultado a partir da definición.

$$\begin{aligned} [f(x) + g(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Esríbese así

Para indicar a derivada da suma de dúas funcións, escribimos $[f(x) + g(x)]'$ ou $(f + g)'$.

Exemplo

10 Calcula a derivada de $s(x) = x^2 + x$, e comproba que é igual á suma das derivadas de x^2 e x .

$$\begin{aligned} s'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + (x+h)] - [x^2 + x]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{x} + h - \cancel{x^2} - \cancel{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h + 1)}{h} = 2x + 1 \end{aligned}$$

Se calculamos as derivadas das funcións obtemos o mesmo resultado.

$$s'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(x+h)^2 - x}^{f'(x)}}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(x+h) - x}^{g'(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} + 1 = 2x + 1$$

5.2. Derivada do produto dun número por unha función

A derivada do produto dun número por unha función é o produto do número pola derivada da función.

$$[kf(x)]' = k \cdot f'(x)$$

Comprobamos este resultado a partir da definición.

$$[kf(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k f(x+h) - k f(x)}{h} = k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k f'(x)$$

Esríbese así

Para indicar a derivada do produto dun número por unha función, escribimos $[kf(x)]'$ ou kf' .

ACTIVIDADES

12 Calcula a derivada destas funcións, e comproba que se cumpre que o resultado é igual á suma das derivadas das funcións que as forman.

a) $f(x) = 7x + 2x^2$ b) $f(x) = x^{-2} + 3x$

13 Calcula a derivada das seguintes funcións, utilizando a definición de derivada do produto dun número por unha función.

a) $f(x) = 8x^3$ b) $f(x) = 4\sqrt{x}$ c) $f(x) = -5x^2$

5.3. Derivada do produto e do cociente de funcións

A **derivada do produto de funcións** é a derivada da primeira función pola segunda sen derivar máis a primeira función sen derivar pola derivada da segunda.

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Exemplo

- 11 Escribe $p(x) = 2x^2$ como o produto de dúas funcións, e comproba que a súa derivada, $p'(x) = 4x$, cumpre a definición da derivada do produto.

Se escribimos $p(x)$ como $f(x) = 2x$ por $g(x) = x$, e aplicamos as definicións:

$$\begin{aligned} p'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} \cdot x + 2x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{2x} + 2h - \cancel{2x}}{h} \cdot x + 2x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 2 \cdot x + 2x \cdot 1 = 4x \end{aligned}$$

A **derivada do cociente de funcións** é outro cociente tal que:

- O numerador é a derivada do numerador polo denominador sen derivar menos o numerador sen derivar pola derivada do denominador.
- O denominador é o cadrado do denominador sen derivar.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Exemplo

- 12 Comproba que a derivada de $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+4}{x^2}$ é: $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{-3x-8}{x^3}$

Como na fórmula da derivada do cociente de funcións interveñen as súas derivadas, primeiro imos calcular o seu valor.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h)+4] - (3x+4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{3x} + 3h + \cancel{4} - \cancel{3x} - \cancel{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$$

A derivada do cociente é:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{3 \cdot x^2 - [(3x+4) \cdot 2x]}{x^4} = \frac{3x^2 - 6x^2 - 8x}{x^4} = \\ &= \frac{x(-3x-8)}{x^4} = \frac{-3x-8}{x^3} \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

- 14 Calcula o produto das funcións $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = x + 1$, e despois calcula a súa derivada. Comproba que o resultado é o mesmo que se aplicamos a fórmula da derivada do produto de funcións.

- 15 Calcula as derivadas das funcións $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = -x + 5$. Cal é a derivada do cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$? E a derivada do cociente $\frac{g(x)}{f(x)}$?

6 Derivadas de funcións elementais

Para calcular a derivada dalgunhas funcións elementais non é necesario utilizar a definición, pois existen regras que facilitan o seu cálculo.

6.1. Derivada das funcións constante e identidade

A derivada da función constante é 0.

$$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$$

A derivada da función identidade é 1.

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

Comprobamos estes resultados a partir da definición.

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Exemplo

13 Calcula a derivada destas funcións.

a) $f(x) = 6x$

a) $f'(x) = 6$

$f(x) = kx$

b) $f(x) = 12x + 7x$

b) $f'(x) = 12 + 7 = 19$

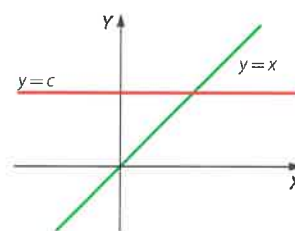
$f(x) = kx + cx$

Decátate



A recta tanxente a unha recta nun punto coincide sempre con ela mesma.

A pendente da recta $y = c$ é 0 en todos os seus puntos e a pendente da recta $y = x$ é 1 en todos os seus puntos.



6.2. Derivada da función potencial

A derivada da función potencial é igual ao expoñente pola base elevada ao expoñente menos unha unidade.

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Exemplo

14 Calcula a derivada destas funcións.

a) $f(x) = x^5$

a) $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

$n = 5$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$n = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = x^4 + 5$

c) $f'(x) = 4x^{4-1} + 0 = 4x^3$

$f(x) = x^n + c$

d) $f(x) = \frac{2+x}{x}$

d) $f'(x) = \frac{1 \cdot x - (2+x) \cdot 1}{x^2} = \frac{-2}{x^2}$

ACTIVIDADES

16 Calcula a derivada desta función, indicando os pasos que segues para calculala.

$$f(x) = x^2 + 2x$$

17 Calcula a derivada da seguinte función.

$$f(x) = \frac{x-3}{2x^5}$$

6.3. Derivada das funcións exponencial e logarítmica

Lembra

Propiedades dos logaritmos:

- $\ln e = 1$
- $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$

A derivada da función exponencial é igual ao produto da función polo logaritmo neperiano da base.

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x \quad f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

A derivada da función logarítmica é igual a 1 dividido entre o produto de x polo logaritmo neperiano da base.

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad f(x) = \log_a x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Exemplo

15 Calcula a derivada destas funcións.

a) $f(x) = 7^x$

b) $f(x) = \log_6 x$

a) $f'(x) = 7^x \cdot \ln 7$
 $\uparrow$
 $f(x) = a^x$

b) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 6}$
 $\uparrow$
 $f(x) = \log_a x$

6.4. Derivada das funcións trigonométricas

A táboa amosa as derivadas das funcións trigonométricas.

Función	Derivada
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arc} \cos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Exemplo

16 Comproba, mediante a súa definición, que a derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é $f'(x) = \cos x$, utilizando a fórmula do seno da suma.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(\operatorname{sen} x)(\cos h) + (\cos x)(\operatorname{sen} h)] - \operatorname{sen} x}{h} = \\ &= \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

18 Calcula a derivada das seguintes funcións.

a) $f(x) = 5 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$ b) $f(x) = (5x^2 \cdot \operatorname{sen} x) + (x \cdot \cos x)$

19 Obtén a derivada destas funcións.

a) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{tg} x$ b) $f(x) = 3x^2 - \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$

7 Regra da cadeia

A derivada da función f composta con g obtense utilizando a regra da cadeia.

$$[(g \circ f)(x)]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Faino así

COMO CALCULAMOS A DERIVADA DE FUNCIÓNS COMPOSTAS

Calcula a derivada da función $y = \arccos x^4$.

PRIMEIRO. Escribimos a función como a función composta doutras funcións, f e g .

$$\begin{array}{l} (g \circ f)(x) = g(f(x)) \\ x \rightarrow f(x) = x^4 \rightarrow g(x^4) = \arccos x^4 \end{array}$$

SEGUNDO. Determinamos a derivada destas funcións.

$f(x)$ é unha función potencial: $f'(x) = 4x^3$

$g(x)$ é unha función $\arccos$: $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

TERCEIRO. Aplicamos a regra da cadeia.

$$\begin{aligned} [(g \circ f)(x)]' &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^4)^2}} \cdot 4x^3 = -\frac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad g'(x^4) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^4)^2}} \end{aligned}$$

Ás veces, resulta máis sinxelo definir unha función como composición doutras funcións e aplicar a regra da cadeia para obter a súa derivada.

Exemplo

- 17** Calcula a derivada da función $h(x) = (1-x)^5$, sabendo que a derivada da función $f(x) = 1-x$ é $f'(x) = -1$ e a derivada de $g(x) = x^5$ é $g'(x) = 5x^4$.

A derivada de $h(x)$ poderíase calcular desenvolvendo $(1-x)^5$ coa fórmula do binomio de Newton, e derivando o polinomio de grao 5 que se obtén. Pero convén considerar $h(x)$ como a función composta de $f(x) = 1-x$ e $g(x) = x^5$, xa que $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (1-x)^5$, e aplicar a regra da cadeia.

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = [g(1-x)^5]' \cdot f'(x) = 5(1-x)^4 \cdot (-1) = -5(1-x)^4$$

ACTIVIDADES

- 20** Calcula a derivada destas funcións aplicando a regra da cadeia.

- a) $f(x) = \ln(\cos x)$
- b) $f(x) = \cos(\ln x)$
- c) $f(x) = (x^4 + 2)^9$
- d) $f(x) = x \sqrt{2x^3 + 1}$

- 21** Calcula a derivada destas funcións.

- a) $f(x) = \sin \sqrt{x^2 + 3x}$
- b) $f(x) = 3 \sin x^2 + 2 \sin^2 x$
- c) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$
- d) $f(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2}$

8 Crecemento e derivada

Lembra

Unha función é crecente nun intervalo se é crecente en todos os seus puntos.
Unha función é decrecente nun intervalo se é decrecente en todos os seus puntos.

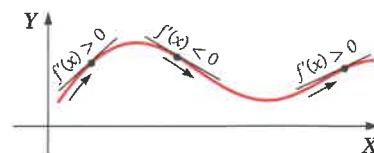
- Unha **función é crecente** nun punto $x = a$ cando a derivada da función nese punto é positiva.

$$f'(a) > 0 \rightarrow f(x) \text{ é crecente en } x = a.$$

- Unha **función é decrecente** nun punto $x = a$ cando a derivada da función nese punto é negativa.

$$f'(a) < 0 \rightarrow f(x) \text{ é decrecente en } x = a.$$

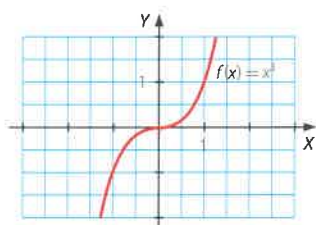
Se a derivada dunha función é $f'(x) > 0$, a gráfica de $f(x)$ ten unha tanxente con pendente positiva, e se a derivada dunha función é $f'(x) < 0$, a gráfica de $f(x)$ ten unha tanxente con pendente negativa.



Se unha función $f(x)$ presenta un **máximo** ou un **mínimo** en $x = a$, cumprese que $f'(a) = 0$.

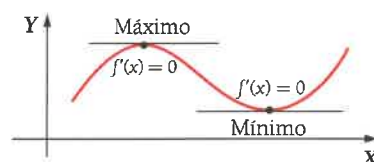
Decátate

Non todos os puntos onde a derivada se anula son máximos ou mínimos.



Nesta función $f'(0) = 0$ e non é nin un máximo nin un mínimo.

Se a función f presenta un máximo ou un mínimo nun punto de abscisa x , a recta tanxente nese punto é horizontal, e por tanto, a súa pendente é cero, é dicir, $f'(x) = 0$.



Faino así

COMO DETERMINAMOS OS MÁXIMOS E MÍNIMOS E OS INTERVALOS DE CRECEMENTO DUNHA FUNCIÓN

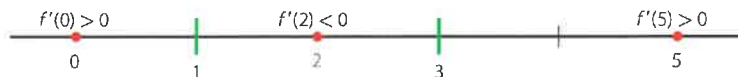
Decide en que intervalos a función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ é crecente e en cales é decrecente. Presenta máximos ou mínimos?

PRIMEIRO. Calculamos a función derivada de $f(x)$: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

SEGUNDO. Resolvemos a ecuación $f'(x) = 0$ para determinar os posibles máximos e mínimos da función.

$$3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3) \rightarrow x = 1, x = 3$$

TERCEIRO. Determinamos os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x)$, estudando o signo en cada un dos intervalos que proporcionan as solucións da ecuación, é dicir, resolvemos as inecuacións $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$.



A función é crecente en $(-\infty, 1)$ e $(3, +\infty)$ e é decrecente en $(1, 3)$.
Por tanto, en $x = 1$ presenta un máximo, e en $x = 3$, un mínimo.

ACTIVIDADES

- 22** Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento das seguintes funcións.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $f(x) = 8x + x^2$

- 23** Determina os intervalos de crecemento e os máximos e mínimos destas funcións.

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = 2 - x$

9 Derivadas sucesivas

Se calculamos a derivada da función $f'(x)$, obtemos outra función que chamamos **derivada segunda de $f(x)$** e que escribimos $f''(x)$.

Analogamente podemos determinar as derivadas terceira, cuarta..., enésima. Así, calculamos as **derivadas sucesivas** dunha función.

Exemplo

18 Calcula as derivadas primeira, segunda e terceira de $f(x) = 4x^5$.

$$f'(x) = 20x^4 \quad f''(x) = 80x^3 \quad f'''(x) = 240x^2$$

Aplicacións

- Unha función ten un **mínimo** nun punto $x = a$ se a derivada se anula e a derivada segunda é positiva nese punto.

$$f'(a) = 0 \text{ e } f''(a) > 0 \rightarrow f(a) \text{ ten un mínimo en } x = a.$$

- Unha función ten un **máximo** nun punto x se a derivada se anula e a derivada segunda é negativa nese punto.

$$f'(a) = 0 \text{ e } f''(a) < 0 \rightarrow f(a) \text{ ten un máximo en } x = a.$$

Faino así

COMO CALCULAMOS OS MÁXIMOS E OS MÍNIMOS DUNHA FUNCIÓN COA DERIVADA SEGUNDA

Determina os máximos e os mínimos de $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ coa derivada segunda.

PRIMEIRO. Calculamos a función derivada de $f(x)$ e resolvemos a ecuación $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow 1-x^2 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1$$

SEGUNDO. Determinamos o signo da derivada segunda nos puntos anteriores para decidir se se trata dun máximo ou dun mínimo.

$$f''(x) = \frac{-2x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3} \quad f''(-1) > 0 \rightarrow \text{mínimo e } f''(1) < 0 \rightarrow \text{máximo}$$

TERCEIRO. Escribimos os puntos $(x, f(x))$ que son máximos e mínimos de $f(x)$.

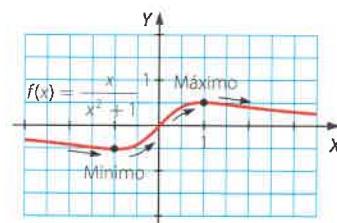
$$x = -1, f(x) = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{Mínimo: } \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \quad x = 1, f(x) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Máximo: } \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Decátate

A partir da derivada podemos determinar se unha función é crecente ou decrecente. Analogamente, a partir da derivada segunda comprobamos se unha función é cóncava ou convexa.

$$f''(x) > 0 \rightarrow f \text{ é cóncava.}$$

$$f''(x) < 0 \rightarrow f \text{ é convexa.}$$



ACTIVIDADES

24 Calcula os máximos e os mínimos destas funcións.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

c) $f(x) = x^3 - 12x$

b) $f(x) = \frac{8}{x^2 + 2}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$

25 Se a función $f(x) = x^3 + ax + b$ ten un mínimo no punto $(1, 5)$, determina os valores de a e b . Ten algún outro máximo ou mínimo esta función?

26 Calcula os máximos e os mínimos de $f(x) = \sin^2 x$ en $[0, 2\pi]$.

10 Aplicacións das derivadas

10.1. Representación de funcións

A partir da derivada tamén podemos obter información para representar funcións.

Faino así

COMO REPRESENTAMOS UNHA FUNCIÓN TENDO EN CONTA A SÚA DERIVADA

Representa a seguinte función: $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

PRIMEIRO. Estudamos o dominio da función $f(x)$.

Como é unha función racional, o seu dominio é $\mathbb{R}$ menos aqueles valores que anulan o denominador: $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

SEGUNDO. Calculamos as asíntotas da función.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty \rightarrow f(x) \text{ ten unha asíntota vertical en } x = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0 \rightarrow f(x) \text{ ten unha asíntota oblicua en } y = x.$$

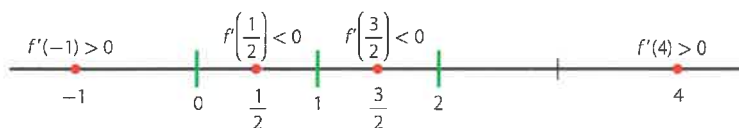
TERCEIRO. Identificamos os cortes de $f(x)$ cos eixes.

Como $f(0) = -1$, a función corta ao eixe Y no punto $(0, -1)$.

CUARTO. Calculamos a función derivada de $f(x)$, identificamos o seu dominio e resolvemos a ecuación $f'(x) = 0$.

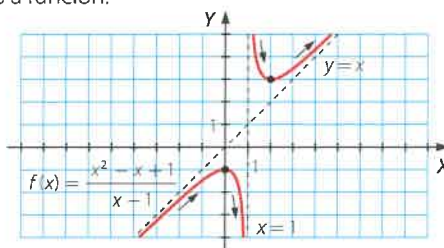
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \rightarrow \text{Dom } f' = \mathbb{R} - \{1\} \quad f'(x) = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

QUINTO. Estudamos o signo en cada un dos intervalos que determinan o dominio e as solucións da ecuación. Así, establecemos os intervalos de crecemento e os máximos e mínimos.



Crece: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ Decrece: $(0, 1) \cup (1, 2)$

SEXTO. Representamos a función.



ACTIVIDADES

27 Representa estas funcións.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x}$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$

d) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3}$

28 Representa as seguintes funcións.

a) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 6$

b) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

10.2. Problemas de optimización

Optimizar é un proceso para conseguir que unha magnitude sexa o maior ou menor posible suxeita a unhas condicións. Para iso, é preciso encontrar o máximo ou o mínimo dunha función.

Faino así

COMO RESOLVEMOS UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

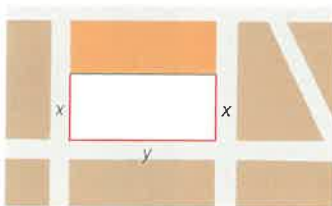
Quérese cercar un terreo de 500 m para construír un parque, con forma de rectángulo e da maior área posible.

Se un dos lados do terreo está limitado por un bloque de vivendas, e non é necesario cercalo, cales serán as dimensións do rectángulo? Canto medirá a área dese rectángulo?

PRIMEIRO. Identificamos os datos.

Os lados do rectángulo que se quere cercar son x e y . Como un dos lados non é necesario cercalo, o perímetro do terreo que se quere cercar será:

$$y + 2x = 500 \rightarrow y = 500 - 2x$$



SEGUNDO. Expresamos, en función das variables, a magnitude que imos optimizar.

Neste caso, queremos maximizar a área do rectángulo. Por tanto, a función é:

$$A(x) = x \cdot y \rightarrow A(x) = x \cdot (500 - 2x) = 500x - 2x^2$$

TERCEIRO. Calculamos o máximo ou o mínimo da función, segundo o enunciado.

Para iso, calculamos os valores que anulan a derivada e determinamos se é un máximo ou un mínimo, calculando a derivada segunda.

Neste caso, debemos obter un máximo.

$$A'(x) = 500 - 4x \rightarrow A'(x) = 0 \rightarrow 500 - 4x = 0 \rightarrow x = 125$$

$$A''(x) = -4$$

$$\text{Se } x = 125: A'(125) = 0 \text{ e } A''(125) < 0$$

Logo, trátase dun máximo.

CUARTO. Interpretamos a solución.

Os lados do rectángulo miden 125 m e 250 m.

A área de rectángulo máximo será:

$$A(x) = 125 \cdot 250 = 31.250 \text{ m}^2$$

ACTIVIDADES

- 29** Calcula dous números naturais positivos dos que a súa suma sexa 60 e sabendo que a suma dun máis o cadrado do outro é a maior posible.
- 30** A área dun rectángulo é de 100 cm^2 . Se queremos que teña o menor perímetro posible, cales son as súas dimensións?
- 31** Unha peza con forma de triángulo rectángulo ten un cateto cuxa lonxitude é 1 m e o outro cateto mide 3 m. Determina o rectángulo de lados paralelos aos catetos e cuxa área sexa a maior posible que se pode obter dela.
- 32** Construíronse caixas de cartón, de base cadrada e sen tapa, cuxa capacidade é de 1 m^3 . Se queremos manter o volume, pero modificar a base, cales serán as súas dimensións para minimizar o gasto de cartón empregado?
- 33** Sabemos que o rectángulo de maior área que pode inscribirse nunha circunferencia é o cadrado. Sucederá o mesmo se consideramos unha semicircunferencia? Para comprobalo, calcula as dimensións dun rectángulo de área máxima, inscrito nunha semicircunferencia de 5 cm de raio, sabendo que a súa base está situada sobre o diámetro.

Derivada dunha función nun punto

1. COMO SE DETERMINA A TANXENTE A UNHA CURVA NUN PUNTO, UTILIZANDO A DEFINICIÓN DE DERIVADA

- 19** Determina a ecuación da tanxente á parábola $y = \frac{1}{4}x^2$ no punto $A(4, 4)$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Calcúlase o incremento de $f(x)$ no punto no que se quere determinar a tanxente.

$$\begin{aligned} f(4+h) - f(4) &= \frac{1}{4}(4+h)^2 - \frac{1}{4} \cdot 4^2 = \\ &= \frac{1}{4}(16 + 8h + h^2 - 16) = \frac{1}{4}h(8+h) \end{aligned}$$

SEGUNDO. Calcúlase a derivada da función no punto.

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4}(8+h) = 2$$

TERCEIRO. Determinase a ecuación da recta tanxente á parábola no punto $A(4, 4)$.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \\ y - 4 &= 2(x - 4) \rightarrow y = 2x - 4 \end{aligned}$$

2. COMO SE CALCULAN AS TANXENTES A UNHA CURVA QUE CUMPREN UNHA SERIE DE CONDICIÓN

- 20** Calcula as tanxentes á curva $f(x) = -x^5 + 3x$ que sexan paralelas á recta $y = -2x$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Calcúlase a pendente que terán as rectas buscadas.

Se as rectas teñen que ser paralelas a $y = -2x$ terán a mesma pendente que esta recta, é dicir, -2 .

SEGUNDO. Igualase a derivada da función a esa pendente e resólvese a ecuación.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5x^4 + 3 \\ -5x^4 + 3 &= -2 \rightarrow x^4 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

Os puntos de abscisas 1 e -1 teñen unha tanxente paralela a $y = -2x$.

TERCEIRO. Calcúlase a ordenada dos puntos.

$$\begin{aligned} \text{Se } x = 1: f(1) &= -1^5 + 3 \cdot 1 = 2 \\ \text{Se } x = -1: f(-1) &= -(-1)^5 + 3 \cdot (-1) = -2 \end{aligned}$$

CUARTO. Obtéñense as ecuacións das tanxentes nes puntos.

$$\begin{aligned} \text{Se } x = 1: y - 2 &= -2(x - 1) \rightarrow y = -2x + 4 \\ \text{Se } x = -1: y + 2 &= -2(x + 1) \rightarrow y = -2x - 4 \end{aligned}$$

3. COMO SE CALCULA O VALOR DUN PARÁMETRO NUNHA FUNCIÓN, COÑECENDO A SÚA DERIVADA NUN PUNTO

- 21** Calcula o valor de m na función $f(x) = \frac{mx^2 + 1}{2x + m}$ para que $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Calcúlase a derivada da función.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2mx(2x+m) - 2(mx^2+1)}{(2x+m)^2} = \\ &= \frac{2mx^2 + 2m^2x - 2}{4x^2 + 4mx + m^2} \end{aligned}$$

SEGUNDO. Aplícase a condición que debe cumprir a derivada.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2m\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2m^2\left(\frac{1}{2}\right) - 2}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4m\left(\frac{1}{2}\right) + m^2} = \frac{\frac{m}{2} + m^2 - 2}{1 + 2m + m^2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \rightarrow \frac{\frac{m}{2} + m^2 - 2}{1 + 2m + m^2} = 1$$

TERCEIRO. Resólvese a ecuación resultante.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{m}{2} + m^2 - 2}{1 + 2m + m^2} &= 1 \rightarrow m + 2m^2 - 4 = 2 + 4m + 2m^2 \\ &\rightarrow 3m + 6 = 0 \rightarrow m = -2 \end{aligned}$$

4. COMO SE CALCULA O VALOR DUN PARÁMETRO NUNHA FUNCIÓN, COÑECENDO ALGUNHAS DAS SÚAS TANXENTES

- 22** Canto vale k na función $f(x) = kx^3 + 6x^2 - kx - 18$ se as tanxentes en $x = 1$ e en $x = -2$ son paralelas?

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Calcúlase a derivada da función.

$$f'(x) = 3kx^2 + 12x - k$$

SEGUNDO. Aplícase a condición que cumpren as tanxentes.

Neste caso, como as tanxentes son paralelas teñen a mesma pendente.

$$\begin{aligned} f'(1) &= 3k \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - k = 2k + 12 \\ f'(-2) &= 3k \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) - k = 11k - 24 \\ f'(1) &= f'(-2) \rightarrow 2k + 12 = 11k - 24 \\ &\rightarrow 9k - 36 = 0 \rightarrow k = 4 \end{aligned}$$

5. COMO SE CALCULA O VALOR DE VARIOS PARÁMETROS, COÑECENDO ALGUNHAS DAS CARACTERÍSTICAS DUNHA FUNCIÓN

- 23** Dada a función $f(x) = ax^2 + bx + 2$, determina a e b , sabendo que a gráfica de $f(x)$ pasa polo punto $(1, 0)$ e que a recta tanxente a $f(x)$ en $x = 1$ ten como pendente -1 .

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Aplícanse as condicións que cumpre a función.

- A función pasa por $(1, 0)$:

$$f(x) = ax^2 + bx + 2$$

↓ Pasa por $(1, 0)$

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = 0 \rightarrow a + b + 2 = 0$$

- A tanxente en $x = 1$ é -1 :

$$f'(x) = 2ax + b$$

↓ $f'(1) = -1$

$$f'(1) = 2a \cdot 1 + b = -1$$

SEGUNDO. Resólvese o sistema de ecuacións resultante.

$$\begin{cases} a + b + 2 = 0 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \xrightarrow{(-2)} \begin{cases} -2a - 2b = -4 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

$$-b = 3 \rightarrow b = -3$$

$$a + b + 2 = 0 \xrightarrow{b=-3} a - 3 + 2 = 0 \rightarrow a = 1$$

A función é: $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Cálculo de derivadas

1. COMO SE DETERMINA A FUNCIÓN DERIVADA DUNHA FUNCIÓN RACIONAL

- 24** Calcula a derivada desta función.

$$f(x) = \frac{2-x}{x^3}$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Aplícase a fórmula da derivada do cociente, tendo en conta as derivadas do numerador e do denominador.

$$f'(x) = \frac{(-1) \cdot x^3 - 3x^2(2-x)}{(x^3)^2}$$

SEGUNDO. Simplifícase todo o posible a expresión resultante.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-x^3 - 3x^2(2-x)}{x^6} = \frac{-x^3 - 6x^2 + 3x^3}{x^6} = \\ &= \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{2x^2(x-3)}{x^6} = \frac{2x-6}{x^4} \end{aligned}$$

2. COMO SE CALCULA A DERIVADA DUNHA FUNCIÓN DO TIPO $y = f(x)^n$

- 25** Calcula a derivada destas funcións.

a) $y = (x^3 - 2x)^4$

c) $y = \frac{1}{\sin^4 x}$

b) $y = \sqrt[4]{\ln x}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Exprésase a función en forma dunha función elevada a un número.

a) $y = (x^3 - 2x)^4$

c) $y = (\sin x)^{-4}$

b) $y = (\ln x)^{\frac{1}{4}}$

SEGUNDO. Calcúlase a derivada da base da potencia.

a) $f(x) = x^3 - 2x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2$

b) $f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$

TERCEIRO. Aplícase a derivada da función potencial e simplifícase.

$$y = f(x)^n \rightarrow y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$$

a) $y' = 4(x^3 - 2x)^{4-1} \cdot (3x^2 - 2) = 4(3x^2 - 2)(x^3 - 2x)^3$

b) $y' = \frac{1}{4}(\ln x)^{\frac{1}{4}-1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{4x}(\ln x)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4x\sqrt[4]{\ln^3 x}}$

c) $y' = -4(\sin x)^{-4-1} \cdot \cos x = -\frac{4 \cos x}{\sin^5 x}$

3. COMO SE CALCULA A DERIVADA DUNHA FUNCIÓN DO TIPO $y = a^{f(x)}$

- 26** Calcula a derivada destas funcións.

a) $y = 3^{\cos x}$

b) $y = 3^{(x^2+1)}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Calcúlase a derivada da función do expoñente.

a) $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$

b) $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = 2x$

SEGUNDO. Aplícase a derivada da función exponencial.

$$y = a^{f(x)} \rightarrow y' = a^{f(x)} \cdot \ln(a) \cdot f'(x)$$

a) $y' = 3^{\cos x} \cdot \ln(3) \cdot (-\sin x)$

b) $y' = 3^{(x^2+1)} \cdot \ln(3) \cdot 2x$

PROBLEMAS RESOLTOS

4. COMO SE CALCULA A DERIVADA DUNHA FUNCIÓN DO TIPO $y = \ln f(x)$

27 Calcula a derivada destas funcións.

a) $y = \ln(tx)$

b) $y = \ln(2x^3 + x)$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Cálculase a derivada de $f(x)$.

a) $f(x) = tx \rightarrow f'(x) = 1 + tx^2$

b) $f(x) = 2x^3 + x \rightarrow f'(x) = 6x^2 + 1$

SEGUNDO. Aplícase a derivada da función logarítmica.

$$y = \ln f(x) \rightarrow y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

a) $y' = \frac{1}{tx} \cdot (1 + tx^2) = \frac{1 + tx^2}{tx}$

b) $y' = \frac{1}{2x^3 + x} \cdot (6x^2 + 1) = \frac{6x^2 + 1}{2x^3 + x}$

5. COMO SE CALCULA A DERIVADA DUNHA FUNCIÓN DO TIPO $y = \arcsen f(x)$

28 Calcula a derivada destas funcións.

a) $y = \arcsen(\ln x)$

b) $y = \arcsen(2x^3 + x)$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Cálculase a derivada de $f(x)$.

a) $f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = 2x^3 + x \rightarrow f'(x) = 6x^2 + 1$

SEGUNDO. Aplícase a derivada da función trigonométrica.

$$y = \arcsen f(x) \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (f(x))^2}} \cdot f'(x)$$

a) $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \ln^2 x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$

b) $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (2x^3 + x)^2}} \cdot (6x^2 + 1) = \frac{6x^2 + 1}{\sqrt{1 - (2x^3 + x)^2}}$

Regra da cadea

1. COMO SE APLICA A REGRA DA CADEA NA COMPOSICIÓN DE TRES FUNCIÓNS

29 Obtén a derivada de $y = \ln\sqrt{x^2 + 2x}$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Defínese a función como unha composición de funcións.

$$f(x) = \ln x \quad g(x) = \sqrt{x} \quad h(x) = x^2 + 2x$$

Desta maneira, resulta que: $y = (f \circ g \circ h)(x)$

SEGUNDO. Aplícase a regra da cadea a $f \circ g$.

$$(f \circ g)(x) = \ln\sqrt{x} \rightarrow (f \circ g)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x}$$

$\uparrow$
 $f'(g(x)) \cdot g'(x)$

TERCEIRO. Aplícase a regra da cadea a $(f \circ g) \circ h$.

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= \ln\sqrt{x^2 + 2x} \\ ((f \circ g) \circ h)'(x) &= \frac{1}{2(x^2 + 2x)} \cdot (2x + 2) = \frac{x + 1}{x^2 + 2x} \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $(f \circ g)'(h(x)) \cdot h'(x)$

2. COMO SE DERIVA UNHA FUNCIÓN CON POTENCIAS CANDO A BASE E O EXPOÑENTE NON SON CONSTANTES

30 Calcula a derivada desta función.

$$f(x) = x^{x^2+3}$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Aplícanse logaritmos aos dous membros da función.

$$\ln f(x) = \ln x^{x^2+3} \rightarrow \ln f(x) = (x^2 + 3) \ln x$$

SEGUNDO. Derívanse os dous membros, tendo en conta que $f(x)$ é unha función, e por tanto, ao derivar $\ln f(x)$ aplícase a regra da cadea, e que o segundo membro é un produto de funcións.

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= (x^2 + 3) \ln x \\ \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= 2x \ln x + \frac{x^2 + 3}{x} \end{aligned}$$

TERCEIRO. Despéxase $f'(x)$ e substitúese $f(x)$ polo seu valor.

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= 2x \ln x + \frac{x^2 + 3}{x} \\ f'(x) &= f(x) \left(2x \ln x + \frac{x^2 + 3}{x} \right) = \\ &= x^{x^2+3} \left(2x \ln x + \frac{x^2 + 3}{x} \right) \end{aligned}$$

Aplicacións das derivadas

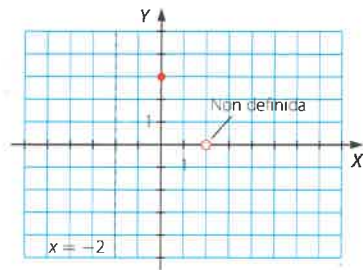
1. COMO SE REPRESENTA UNHA FUNCIÓN, COÑECENDO ALGUNHAS DAS SÚAS CARACTERÍSTICAS

Representa unha función $y = f(x)$ que cumpra as seguintes condicións.

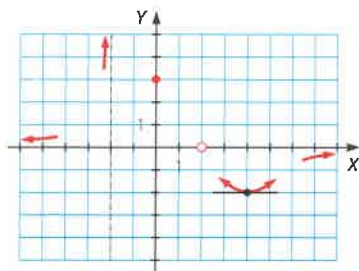
- O seu dominio é $\mathbb{R} - \{2\}$.
- Ten unha asíntota vertical en $x = -2$.
- Ten unha asíntota horizontal en $y = 0$.
- Corta o eixe Y en $(0, 3)$ e non corta o eixe X.
- $f'(x) > 0$ no intervalo $(-\infty, 2)$.
- $f'(x) < 0$ no intervalo $(2, 4)$.
- Ten unha tanxente horizontal en $(4, -2)$.

SOLUCIÓN

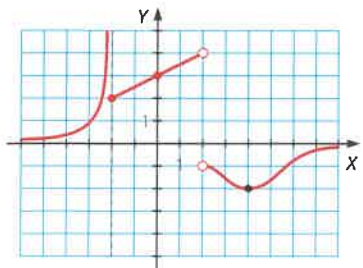
PRIMEIRO. Representáanse sobre os eixes de coordenadas as asíntotas e os puntos de corte cos eixes da función.



SEGUNDO. Representáanse os puntos con tanxente horizontal que corresponderán aos máximos ou mínimos da función. Tendo en conta o crecemento, analízase como a función se aproxima ás asíntotas.



TERCEIRO. Estudando as características que xa se representaron conclúese cal será a gráfica da función.



2. COMO SE ESTUDA A RELACIÓN ENTRE A CONTINUIDADE E A DERIVABILIDADE DE FUNCIÓNS

Estuda a continuidade e a derivabilidade desta función.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x < 2 \\ \frac{8}{x} & \text{se } 2 \leq x < 4 \\ x^2 - 3x & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

Que conclusións podes extraer do resultado?

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Compróbase a continuidade en cada unha das partes da función.

• Se $x < 2 \rightarrow f(x) = 3x - 2$
É continua en $(-\infty, 2)$.

• Se $2 \leq x < 4 \rightarrow f(x) = \frac{8}{x}$
É continua en $(2, 4)$.

• Se $x \geq 4 \rightarrow f(x) = x^2 - 3x$
É continua en $(4, +\infty)$.

SEGUNDO. Compróbase a continuidade da función nos puntos en que cambia a súa expresión alxébrica.

$$\text{Se } x = 2 \rightarrow \begin{cases} f(2^-) = 3 \cdot 2 - 2 = 4 \\ f(2^+) = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

A función $f(x)$ é continua en $x = 2$.

$$\text{Se } x = 4 \rightarrow \begin{cases} f(4^-) = \frac{8}{4} = 2 \\ f(4^+) = 4^2 - 3 \cdot 4 = 4 \end{cases}$$

A función $f(x)$ non é continua en $x = 4$.

TERCEIRO. Cálculase $f'(x)$ derivando cada unha das partes que forman $f(x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 2 \\ -\frac{8}{x^2} & \text{se } 2 < x < 4 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

CUARTO. Compróbase que ocorre nos puntos nos que $f'(x)$ pasa dunha expresión a outra.

$$\text{Se } x = 2 \rightarrow \begin{cases} f'(2^-) = 3 \\ f'(2^+) = -\frac{8}{2^2} = -2 \end{cases}$$

Como estes valores non coinciden, a función non é derivable en $x = 2$.

QUINTO. Analízanse os resultados.

A función non é derivable en $x = 4$, por non ser continua.

En cambio, en $x = 2$, a función é continua e, non obstante, non é derivable.

Así, unha función derivable ten que ser continua. Non obstante, unha función pode ser continua e non ser derivable.

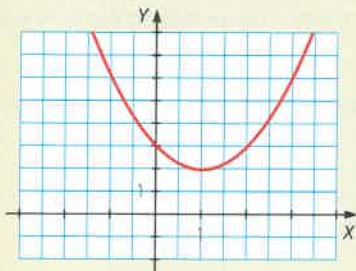
ACTIVIDADES

Taxa de variación media

- 34** Determina a taxa de variación media da función
 ●●● $y = x^2 - 2x + 6$ no intervalo $[1, 3]$.

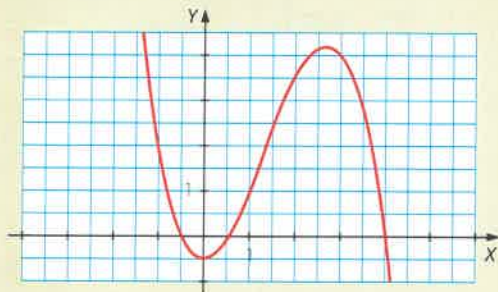
- 35** Cal é a taxa de variación media da función
 ●●● $f(x) = \frac{12}{x}$ no intervalo $[1, 4]$?

- 36** Calcula a taxa de variación media nos intervalos indicados
 ●●● para a seguinte función.



- a) $[1, 2]$
 b) $[1, 3]$
 c) $[2, 3]$

- 37** Determina a taxa de variación media desta función
 ●●● en cada un dos intervalos.



- a) $[-1, 1]$
 b) $[1, 3]$
 c) $[-1, 3]$

- 38** Calcula a taxa de variación media da función $y = 2x^2 - x$
 ●●● no intervalo $[2, 2 + h]$.

Utiliza o resultado para determinar a taxa de variación media da función nos seguintes intervalos.

- a) $[2, 3]$
 b) $[2, 5]$
 c) $[2, 8]$

- 39** Calcula o valor de a de modo que a taxa de variación media
 ●●● da función $f(x) = 2x + ax - 5$ no intervalo $[0, 2]$ sexa 1.

- 40** Encontra dúas funcións polinómicas de segundo grao
 ●●● que pasen polos puntos $(0, 4)$ e $(3, 10)$. Comproba que a taxa de variación media no intervalo $[0, 3]$ é a mesma para as dúas funcións.

- 41** Por que a taxa de variación media da función
 ●●● $y = 2x - 3$ en calquera intervalo é sempre 2?

- 42** O espazo percorrido por un obxecto, en metros, exprésase
 ●●● coa fórmula.

$$e = 4t^2 + 2t + 1$$

- a) Que espazo percorreu aos 4 segundos?
 E aos 7 segundos?
 b) Cal é a velocidade media que mantivo entre os 4 e os 7 segundos?

Derivada nun punto

- 43** Aplica a definición de derivada nun punto para calcular
 ●●● as derivadas das funcións nos puntos que se indican.

- a) $y = 3x - 1$ en $x = 2$
 b) $y = x^2 + x$ en $x = 3$
 c) $y = \frac{4x + 3}{2}$ en $x = -1$
 d) $y = \frac{6}{x}$ en $x = 1$
 e) $y = (x - 1)^2$ en $x = -2$

- 44** Calcula, utilizando a definición de derivada nun punto,
 ●●● $f'(2)$ e $f'(0)$ para a seguinte función.

$$f(x) = 2x^2 - x + 3$$

- 45** Se $f(x) = \frac{x + 6}{3}$, determina a partir da definición
 ●●● de derivada nun punto as seguintes derivadas.

- a) $f'(-3)$ b) $f'(2)$

- 46** Obtén a pendente da recta tanxente á función
 ●●● $y = 3x^2 + 2x$ no punto de abscisa $x = 5$.

- 47** Calcula a derivada da función $y = -t^2 + 2t$
 ●●● no punto $t = 8$.

- 48** O espazo, en metros, que percorre un móbil en función
 ●●● do tempo, en segundos, vén descrito pola expresión.

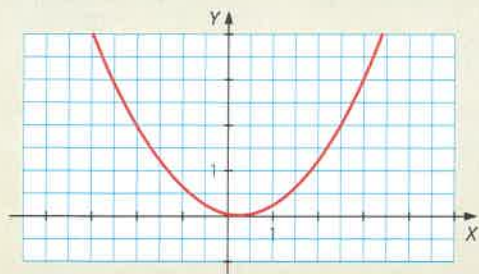
$$e = \frac{2}{3}t^2 + t$$

Calcula a velocidade instantánea do móbil aos 3 segundos.



- 49** Determina a ecuación da recta tanxente
 ●●● á curva $y = 3x^2$ no punto de abscisa 1.

- 50** Demuestra gráficamente que a derivada desta función
 no punto de abscisa 3 ten un valor comprendido entre 2 e 3.



- 51** A partir da definición, calcula as funcións derivadas das funcións que se indican.

- a) $y = 2x + 3$ d) $y = 2x^2 - 3x$
 b) $y = \frac{2x-1}{4}$ e) $y = \frac{12}{x}$
 c) $y = x^3$ f) $y = (3x^2 + 2)^2$

- 52** Obtén, aplicando a definición, a función derivada de $f(x) = x^2 - 2x + 4$, e calcula a derivada nestes puntos.

- a) $f'(1)$
 b) $f'(-3)$
 c) $f'(2)$

- 53** A partir da definición, encontra a función derivada de $f(x) = x^2 + 2x + 2$, e calcula $f'(0)$, $f'(-1)$ e $f'(3)$. Decide o tipo de crecemento da función nos puntos de abscisa 0, -1 e 3.

- 54** A función derivada de $y = \ln x$ é $y' = \frac{1}{x}$.

Utiliza o resultado para determinar a ecuación da recta tanxente a esa curva no punto de abscisa 1.

Rectas tanxente e normal

- 55** Obtén as ecuacións das rectas tanxente e normal á curva $y = x + \sqrt{x}$ no punto de abscisa 4.

- 56** É horizontal a recta tanxente á función $y = x^3 + x^2$ na orixe de coordenadas? Se é certo, cal será a ecuación da recta normal?

- 57** É certo que a curva $y = x^2 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \right)$ ten unha tanxente horizontal no punto (1, 0)?

- 58** Verifícase que a recta tanxente á curva $y = (x^2 - x)(2x + 1)$, no punto de abscisa -1, é paralela á recta $14x - 2y - 3 = 0$?

- 59** Calcula as ecuacións das rectas tanxente e normal á función $y = \cos x$ no punto de abscisa π .

- 60** Canto ten que valer a para que a función $f(x) = x \ln x - ax$ teña, no punto de abscisa e , unha recta tanxente paralela á bisectriz do primeiro cuadrante?

- 61** Calcula a recta tanxente e a recta normal ás funcións nos puntos indicados.

- a) $y = 2^{3x-8}$ en $x = 3$
 b) $y = x^2 \ln(x + 3)$ en $x = -2$
 c) $y = (3x - 5)^6$ en $x = 2$

- 62** Determina a recta tanxente e a recta normal ás funcións nos puntos indicados.

- a) $y = \sqrt{2x + 6}$ en $x = 5$
 b) $y = \sin(2x + \pi)$ en $x = 0$
 c) $y = \operatorname{tg} \frac{\pi - x}{2}$ en $x = \pi$

- 63** Obtén as ecuacións das rectas tanxentes á curva $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$, que son paralelas á recta de ecuación $6x - 2y + 1 = 0$.

- 64** Calcula os puntos en que a función $y = x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ ten rectas tanxentes de pendente -2. Determina tamén a ecuación desas rectas tanxentes.

Cálculo de derivadas

- 65** Aplica as regras de derivación á función $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ para calcular:

- a) A función derivada.
 b) A derivada nos puntos de abscisa -1, 0 e 3.
 c) A ecuación da recta tanxente á curva no punto de abscisa 3.

- 66** Emprega as regras de derivación para calcular a función derivada de:

$$f(x) = (2x + 3)(x - 2)$$

A partir do resultado obtido, determina:

- a) $f'(2)$ $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$ $f'(-2)$ $f'\left(\frac{1}{3}\right)$
 b) A ecuación da recta tanxente no punto $x = -2$.
 c) A ecuación da recta tanxente no punto $x = 2$.

- 67** Aplica as regras de derivación para calcular a función derivada das seguintes funcións.

- a) $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ c) $y = 2^x$
 b) $y = \log_3 x$ d) $y = \sqrt{6x^5}$

- 68** Utiliza as regras de derivación para calcular a función derivada destas funcións.

- a) $y = \sqrt[5]{x}$ d) $y = \frac{1}{x^4}$
 b) $y = 4^{2x}$ e) $y = \frac{2x+5}{7}$
 c) $y = \frac{x^2 - 3x + 8}{2}$ f) $y = (6x)^4$

ACTIVIDADES

69 Calcula a derivada destas operacións de funcións.

- a) $y = (x-2)(x^2+3x)$ e) $y = \ln x + e^x$
 b) $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$ f) $y = \sqrt[3]{x} \sqrt{x}$
 c) $y = x^2 \log x - 1$ g) $y = x^2 \cdot 2^x$
 d) $y = \frac{8}{2x-1}$ h) $y = \frac{3x+4}{2x-1}$

70 Calcula a derivada das seguintes operacións de funcións.

- a) $y = \frac{\ln x + 4}{e^x}$ d) $y = \frac{\ln x}{e^x} + 4$
 b) $y = \frac{x-8}{\sqrt{x}}$ e) $y = 5e^x - 3^x$
 c) $y = (x^2+2) \log_2 x$ f) $y = \frac{x^4}{x-1}$

71 Deriva as seguintes funcións trigonométricas.

- a) $y = \sin x \cos x$ d) $y = x \tan x$
 b) $y = \frac{\cos x}{x^2}$ e) $y = x \arccos x$
 c) $y = \sec x \operatorname{cosec} x$ f) $y = \frac{1}{\tan x}$

72 Calcula a derivada das seguintes operacións onde interveñen funcións trigonométricas.

- a) $y = 2x + \arcsin x + \arccos x$
 b) $y = (1+x^2) \arctan x$
 c) $y = \ln x \cdot \tan x$
 d) $y = e^x \sin x$
 e) $y = \frac{\cos x}{2-x}$

73 Determina as derivadas que se indican.

- a) $f(x) = \ln x$ $f''(x)$ e $f'''(x)$
 b) $f(x) = x^5$ $f'(x)$ e $f''(x)$
 c) $f(x) = x^5 - 3x^4$ $f'''(x)$ e $f^{IV}(x)$

74 Calcula as seis primeiras derivadas das funcións $y = \sin x$ e $y = \cos x$.

75 Calcula o valor de k para que a función $f(x) = \frac{kx-5}{2x+3}$ cumpra que $f'(-1) = 19$.

76 Escribe as funcións que compoñen as seguintes funcións e calcula a derivada en cada caso.

- a) $y = \log_3(2x+1)$
 b) $y = (3x^2 - 3x + 1)^4$
 c) $y = \sin \sqrt{x}$
 d) $y = \arctan e^x$
 e) $y = 2^{3x-4}$
 f) $y = \sqrt[4]{x^2-1}$
 g) $y = \cos \ln x$
 h) $y = 3^{\cos x}$

77 Calcula a función derivada destas funcións, aplicando a regra da cadea.

- a) $y = \ln(x^2 - 5x)$ c) $y = \sqrt{x^2 + x}$
 b) $y = 2^{3x-5}$ d) $y = \sqrt{\log_3 x}$

78 Aplica a regra da cadea para determinar a función derivada destas funcións.

- a) $y = \ln \tan x$ f) $y = \tan \ln x$
 b) $y = \sqrt{\cos x}$ g) $y = \cos \sqrt{x}$
 c) $y = \log_2 x^2$ h) $y = \log_2^2 x$
 d) $y = \sin(\cos x)$ i) $y = \cos(\sin x)$
 e) $y = \arcsin x^2$ l) $y = \arcsin x^2$

79 Calcula os coeficientes e expoñentes descoñecidos para que se verifique que as funcións e as súas derivadas se corresponden.

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$
 $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$

b) $g(x) = a \ln x + bx$
 $g'(x) = \frac{3}{x} - 5$

c) $h(x) = \frac{a^x}{x^b}$
 $h'(x) = a^x \left(\frac{\ln 2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

d) $i(x) = \frac{x}{\sqrt[b]{x}}$
 $i'(x) = \frac{2}{3\sqrt[b]{x}}$

80 Deriva as seguintes funcións.

- a) $y = x^2 \cdot 2^{x^2}$
 b) $y = 5^{x \ln x}$
 c) $y = e^{\frac{\ln x}{x}}$
 d) $y = \frac{e^{\ln x}}{x}$
 e) $y = \ln(x e^x)$
 f) $y = \ln x \cdot e^x$

81 Calcula a derivada destas funcións.

- a) $y = (2x+1)^3 \cdot 3^x$ d) $y = \frac{2x-3}{e^x}$
 b) $y = \sqrt{\frac{x^2-3}{x^3}}$ e) $y = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^3}$
 c) $y = \frac{x^2-3}{\sqrt{x^3}}$ f) $y = x^2 - \frac{3}{\sqrt{x^3}}$

82 Calcula a derivada destas funcións trigonométricas.

•••

a) $y = \cos \frac{1}{x}$

b) $y = \frac{\cos x}{x}$

c) $y = \frac{1}{\cos x}$

d) $y = \left(\cos \frac{1}{x} \right) x$

e) $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

f) $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

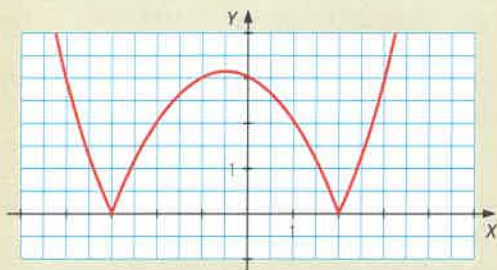
g) $y = \frac{x}{\sin \cos x}$

h) $y = x \arctan \sqrt{x}$

Continuidade e derivabilidade

83 Decide se a seguinte función é continua e derivable en todo o seu dominio. Se nalgún punto non é continua ou derivable, razónao.

•••



84 Debuxa unha función continua que non sexa derivable no punto de abscisa $x = 4$, que no resto do dominio sexa derivable e que a súa derivada se anule se x é maior ou igual ca 4.

85 Estuda se as seguintes funcións son continuas e derivables nos puntos en que a función cambia a súa expresión alxébrica.

•••

a) $f(x) = \begin{cases} 4x + 5 & \text{se } x < 2 \\ 4x^2 - \frac{3}{2}x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 6x & \text{se } x < -1 \\ 2x^2 + 8x + 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$

86 Son continuas e derivables as funcións en todos os puntos do seu dominio?

•••

a) $y = |x^2 - 4|$

b) $y = |x^2 + 1|$

87 Estuda a continuidade e derivabilidade das funcións.

•••

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{se } x < -2 \\ 3x^2 - 2x - 2 & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$

b) $h(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 9 & \text{se } x < 3 \\ 2x^2 - 4x & \text{se } 3 \leq x < 5 \\ 2^{10-x} - 2 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$

Crecemento. Máximos e mínimos

88 Decide se estas funcións crecen ou decrecen nos puntos que se indican.

•••

a) $y = -2x^3 + 3x^2 - x + 1$
En $x = 1$

b) $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$
En $x = -2$

c) $y = 2^x + 3 \ln x - 8$
En $x = 4$

d) $y = 2x + 3\sqrt{x}$
En $x = 9$

89 Determina os puntos das gráficas destas funcións cuxa tanxente é horizontal.

•••

a) $y = 3x^2 - 15x + 13$

b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 8$

c) $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12$

d) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

e) $y = \frac{x + 2}{x - 2}$

90 En que puntos das gráficas destas funcións é horizontal a tanxente? Decide se son máximos ou mínimos.

•••

a) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

b) $y = \frac{x^2}{2 - x}$

c) $y = \frac{x^2 + 9}{x}$

d) $y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$

91 Sexa a función

•••

$$f(x) = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$$

a) Determina os máximos e mínimos da función.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Fai un esbozo da gráfica da función.

ACTIVIDADES

92 Sexa a función

•••

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

- Encontra os máximos e mínimos da función.
- Determina as ecuacións das súas asíntotas e a posición da curva con respecto a elas.
- Constrúe un esbozo da gráfica da función.

93 Calcula os máximos e mínimos da función.

•••

$$f(x) = \frac{x}{x-4}$$

Determina as ecuacións das súas asíntotas e a posición da curva respecto delas. Fai tamén un esbozo da gráfica da función.

94 Obtén os vértices das seguintes parábolas, tendo en conta que a tanxente é horizontal neles.

•••

- $y = 3x^2 - 6x + 1$
- $y = 3x^2 + x + 9$

95 Representa unha función continua e derivable cuxa derivada se anule nos puntos $(-1, 4)$ e $(2, -3)$, e que cumpran estas condicións.

•••

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Representación de funcións

96 Dada a función $y = x^3 + 6x^2 - 36x + 29$, resolve.

•••

- Determina o seu dominio.
- Calcula as súas asíntotas.
- Ten puntos de corte cos eixes? Cales son?
- Determina os intervalos de crecemento e decrecemento.
- Calcula os máximos e os mínimos.
- Representa a función.

97 Estuda e representa as funcións polinómicas.

•••

- $y = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 10$
- $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$
- $y = 3x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 144x + 212$

98 Dada a función $y = \frac{3x-2}{x+4}$, resolve.

•••

- Determina o seu dominio.
- Calcula as súas asíntotas.
- Ten puntos de corte cos eixes? Cales son?
- Determina os intervalos de crecemento e decrecemento.
- Calcula os máximos e os mínimos.
- Representa a función.

99 Estuda e representa estas funcións racionais.

•••

$$a) y = \frac{5x+1}{x-2}$$

$$c) y = \frac{x^2}{2-x}$$

$$b) y = \frac{x^2-2x+1}{x-3}$$

$$d) y = \frac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6}$$

100 Representa estas funcións racionais, e analiza as súas características.

•••

$$a) y = \frac{x}{x^2-3x-4}$$

$$d) y = \frac{x^2+4x+2}{x^2}$$

$$b) y = \frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+1}$$

$$e) y = \frac{2x}{x^2+x-6}$$

$$c) y = \frac{x+5}{x^2-3x-4}$$

$$f) y = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)}$$

Problemas con derivadas

101 Calcula a taxa de variación media da función

•••

$f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ no intervalo $[1, 1+h]$.

- Utiliza o resultado para determinar a taxa de variación media nos intervalos $[1, 3]$, $[1, 5]$ e $[1, 8]$.
- Calcula o límite, cando h tende a cero, da taxa de variación media no intervalo $[1, 1+h]$, e comproba que equivale a $f'(1)$.

102 A partir da definición, calcula a función derivada destas funcións.

•••

$$a) y = \sqrt{x+1}$$

$$b) y = \frac{1}{x}$$

103 As seguintes funcións pódense expresar como composición doutras funcións máis sinxelas.

•••

Calcula as súas funcións derivadas de dous modos diferentes, e compara os resultados que obtés.

$$a) y = 2^{3x+5}$$

$$c) y = \ln(3x)$$

$$b) y = (x^2 + 7x)^2$$

$$d) y = \log_3 \frac{x^2}{3}$$

104 Obtén as funcións derivadas destas funcións utilizando a regra da cadea.

•••

$$a) y = e^{\ln x}$$

$$b) y = \left(\frac{2}{x}\right)^4 - 3\left(\frac{2}{x}\right)^3 + 5\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{x}\right) + 3$$

$$c) y = \sin \frac{x}{2}$$

$$d) y = \ln(x^2 e)$$

105 Determina o valor da expresión a para que a función non sexa derivable no punto $x = 3$.

•••

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x < 3 \\ x^2 + 3x - 5 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

- 106** Completa a seguinte función para que sexa derivable en todo o conxunto $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } x < 2 \\ bx + 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

- 107** A recta cuxa ecuación é $y = 9x - 14$ é tanxente á función $y = x^3 - 3x + k$. Determina en que punto son tanxentes e calcula o valor de k .
Hai unha soa solución? A función ten dous puntos en que a tanxente é horizontal. Calcúlaos e escribe a ecuación desas rectas.
- 108** É certo que a función $y = x^3$ é sempre crecente? Que ocorre na orixe de coordenadas?
- 109** Calculouse que o gasto de electricidade dunha empresa, de 8 a 17 horas, segue esta función.

$$E(t) = 0,01t^3 - 0,36t^2 + 4,05t - 10$$

onde t pertence ao intervalo $(8, 17)$.



- a) Cal é o consumo ás 10 horas? E ás 16 horas?
- b) En que momento do día é máximo o consumo? E mínimo?
- c) Determina as horas do día en que o consumo se incrementa.
- 110** Un investigador está probando a acción dun medicamento sobre unha bacteria. Comprobou que o número de bacterias, N , varía co tempo, t , unha vez subministrado o medicamento, segundo a función:
- $$N = 20t^3 - 510t^2 + 3.600t + 2.000$$
- a) Cantas bacterias había no momento de subministrar o medicamento? E ao cabo de 10 horas?
- b) Nese momento, o número de bacterias está crecendo ou diminuindo?
- c) Cal é o momento en que a acción do produto é máxima?
- d) En que momento empeza a notarse o efecto do medicamento?
- e) E en que momento empeza a perder o seu efecto o medicamento?
- 111** Cal é a ecuación dunha parábola que pasa polo punto $(0, 9)$ e no punto $(2, 9)$ ten como recta tanxente $y - 6x + 3 = 0$?

- 112** Obtén a expresión alxébrica dunha función que pasa por $(2, 5)$, sabendo que a súa derivada é:

$$f'(x) = 2x^2 + 6x - 3$$

- 113** Representa a función $y = \frac{1}{x}$.
- a) Considera un punto calquera da función que estea no primeiro cuadrante. Comproba que a recta tanxente á función nese punto forma un triángulo cos semieixes positivos.
- b) Demostra que, independentemente do punto que se escolla, a área dese triángulo é sempre a mesma.
- 114** A recta tanxente a unha función $f(x)$ no punto de abscisa $x = 2$ é $y = 5x - 7$. Calcula o valor da función e da súa derivada no punto de abscisa 2.
- 115** Explica canto valen $f'(0)$ e $g'(0)$ nas funcións $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \sqrt{x}$.
(Podes facer a gráfica das funcións, se é necesario).
- 116** A función derivada dunha parábola é unha recta que pasa polos puntos $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-1, -\frac{11}{2}\right)$. Calcula a abscisa do vértice desa parábola.
- 117** Se trazamos a recta tanxente e a recta normal á función $y = x^3 - 12x^2 + 42x - 40$, no punto $(3, 5)$ fórmase, cos semieixes positivos de coordenadas, un cuadrilátero. Determina a súa área.
- 118** Sexa unha función que non é continua en $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$$

Demostra que a función non pode ser derivable nese punto estudando o límite.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

- 119** Considera unha parábola xeral expresada da forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

- a) Como no vértice a tanxente será horizontal, a derivada anúlase nese punto. Compróbaos e despexa o valor de x .
- b) Encontra tamén o valor de y , aplicándoo á parábola $y = -2x^2 + 8x + 4$.



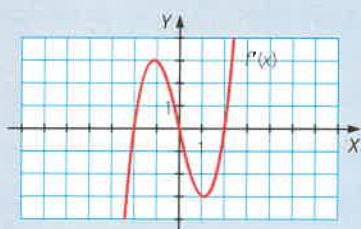
Reflexiona sobre a teoría

- 120** Sexa $f(x) = \arctan \frac{\sin x}{1 + \cos x}$. Estuda se $f(x)$ e $f'(x)$ son constantes.

IDEA CLAVE

Lembra o valor da derivada dunha función constante.

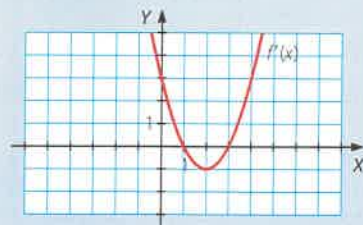
- 121** Dada a gráfica dunha función $f(x)$, representa a función $f'(x)$ de forma aproximada.



IDEA CLAVE

Relaciona o crecemento de $f(x)$ coa súa derivada.

- 122** Se a gráfica dunha función $f'(x)$ é a seguinte, representa de forma aproximada a función $f(x)$.



- 123** Se $f(x)$ e $g(x)$ son funcións inversas, é dicir, $(g \circ f)(x) = x$, verifícase que $(g' \circ f')(x) = x$?

- 124** Defínese o ángulo de dúas curvas nun punto común como o ángulo formado polas súas rectas tanxentes nese punto.

Aplica as curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.

- 125** Verifica que se un polinomio ten unha raíz dobre, tamén o é da súa derivada.

Resolve a ecuación $12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$, sabendo que unha das súas raíces é dobre.

IDEA CLAVE

Escrebe o polinomio $P(x)$ na forma $(x - a)^2 \cdot Q(x)$.

Pensa un pouco máis

- 126** Como debe descompoñerse un número positivo a na suma de dous números non negativos para que a suma dos cadrados dos dous sumandos sexa mínima? E para que sexa máxima?

Análise do enunciado

Queremos encontrar dous números positivos cuxa suma sexa a , de modo que a suma dos seus cadrados sexa mínima ou máxima.

Deseño da resolución

Consideramos a función suma dos dous cadrados e buscamos os máximos ou mínimos mediante a derivada.

Clave para resolver o problema

Como $0 \leq x \leq a$, se o máximo ou o mínimo non está nese intervalo, entón será un dos extremos do intervalo, 0 ou a .

- 127** Demostra que a tanxente a unha circunferencia nun punto é perpendicular ao raio nese punto.

Análise do enunciado

Trátase de probar que a recta tanxente á circunferencia e a recta que pasa polo centro da circunferencia e o punto de tanxencia son perpendiculares.

Deseño da resolución

Eliximos unha circunferencia xenérica centrada na orixe de coordenadas, $x^2 + y^2 = r^2$, e calculamos a ecuación da tanxente a esa curva nun punto (a, b) .

Clave para resolver o problema

A pendente da recta tanxente nun punto (a, b) coincide co valor da derivada nese punto.

Dúas rectas son perpendiculares cando as súas pendentes son m e $-\frac{1}{m}$.