

# 8

## Funcións elementais

### LITERATURA E MATEMÁTICAS

#### *A árbore da ciencia*

Ao dicir Andrés [estudante de medicina] que a vida, segundo o seu profesor Letamendi, é unha función indeterminada entre a enerxía individual e o cosmos, e que esta función non pode ser máis ca suma, resta, multiplicación e división, e que non podendo ser suma, nin resta, nin división, ten que ser multiplicación, un dos amigos de Sañudo [estudante de enxeñaría] botouse a rir.

–Por que ri vostede? –preguntoulle Andrés sorprendido.

–Porque en todo iso que di vostede hai unha porción de sofismas e de falsidades. Primeiramente hai moitas máis funcións matemáticas ca sumar, restar, multiplicar e dividir.

–Cales?

–Elevar a potencia, extraer raíces... Despois, aínda que non houbese máis ca catro funcións matemáticas primitivas, é absurdo pensar que no conflito destes dous elementos, a enerxía da vida e o cosmos, un deles, polo menos, heteroxéneo e complicado, porque non haxa suma, nin resta, nin división, ten que haber multiplicación. Ademais, sería necesario demostrar por que non pode haber suma, por que non pode haber resta e por que non pode haber división. Despois habería que demostrar por que non pode haber dúas ou tres funcións simultáneas. Non basta dicilo.

–Pero iso dão o razoamento.

–Non, non; perdoe vostede –replicou o estudante–. Por exemplo, entre esa muller e eu pode haber varias funcións matemáticas: suma, se facemos os dous unha mesma cousa axudándonos; resta, se ela quere unha cousa e eu a contraria e vence un dos dous contra o outro; multiplicación, se temos un fillo, e división se eu a corto en anacos a ela ou ela a min.

–Iso é unha broma –dixo Andrés.

–Claro que é unha broma –replicou o estudante–, unha broma polo estilo das do seu profesor; pero que tende a unha verdade, e é que entre a forza da vida e o cosmos hai un infinito de funcións distintas: sumas, restas, multiplicacións, de todo, e que ademais é moi posible que existan outras funcións que non teñan expresión matemática.

PÍO BAROJA

**Funcións polinómicas,  
racionais e con radicais**

**Funcións exponenciais  
e logarítmicas**

**Funcións trigonométricas**

**Funcións definidas  
a anacos: valor absoluto  
e parte enteira**

Existen algunhas proteínas de gran tamaño ás que se lles poden unir hormonas para modificar a súa función no corpo humano.

Este mecanismo está regulado pola fórmula  $y = \frac{10kx}{1+kx}$ , sendo  $y$  a concentración de hormonas unidas,  $x$  a concentración total de hormonas e  $k$  unha constante. Representa esta función para  $k = 1$ .

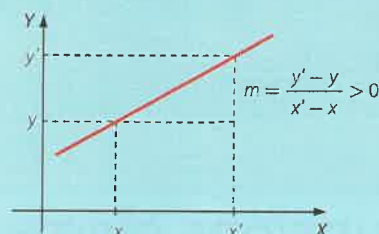
## Pendente dunha recta

A pendente dunha recta,  $m$ , mide a inclinación da recta respecto do eixe  $X$ .

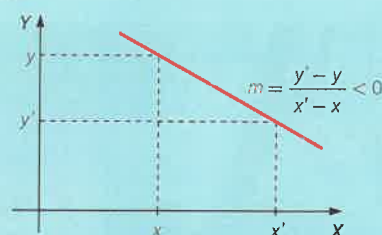
Para calculala consideramos dous puntos,  $A(x, y)$  e  $A'(x', y')$ , polos que pasa a recta.

$$m = \frac{\text{Variación de } y}{\text{Variación de } x} = \frac{y' - y}{x' - x}$$

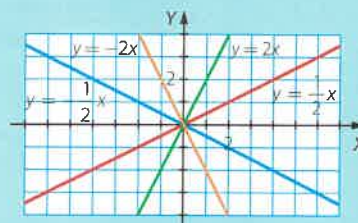
- Cando a pendente é positiva, se a variable  $x$  crece,  $y$  tamén crece; a función é crecente.



- Cando a pendente é negativa, ao crecer a variable  $x$ , decrece  $y$ ; a función é decrecente.



Canto maior é o valor absoluto da pendente, máis inclinación ten a recta.



### Repasa

- 1 Calcula a pendente da recta que pasa polos puntos  $A(2, 1)$  e  $B(-2, 3)$ .

## Parábola

A **parábola** é o lugar xeométrico dos puntos que están á mesma distancia dun punto fixo chamado **foco**, e dunha recta, denominada **directriz**.

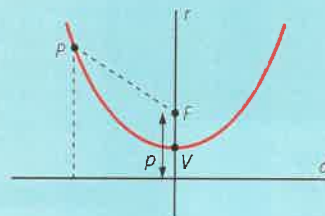
$$d(P, F) = d(P, d)$$

$F$  é o **foco** da parábola e  $d$  é a **directriz**.

Á distancia entre a directriz e o foco chamámola  $p$ .

**Eixe:** é a recta  $r$  que pasa por  $F$  e é perpendicular a  $d$ .

**Vértice:** é o punto  $V$ , que é a intersección do eixe coa parábola.



### Repasa

- 2 Debuxa sobre uns eixes de coordenadas algunhas parábolas que teñan como vértice o punto  $(0, 1)$ .

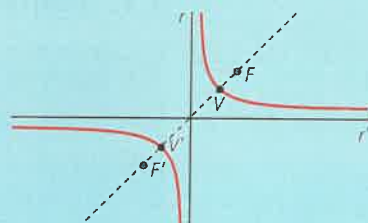
## Hipérbole

A **hipérbole** é o lugar xeométrico dos puntos tales que o valor absoluto da diferenza das súas distancias a dous puntos fixos, chamados **focos**, é constante.

$$|d(P, F) - d(P, F')| = k$$

$F$  e  $F'$  son os **focos**, os puntos fixos da hipérbole.

$V$  e  $V'$  son os **vértices** da hipérbole.



**Eixe:** é a recta que une os focos,  $F$  e  $F'$ .

**Asíntotas:** son as dúas rectas ás que a hipérbole se achega indefinidamente sen chegar a tocalas,  $r$  e  $r'$ .

### Repasa

- 3 Debuxa, sobre uns eixes de coordenadas, unha hipérbole de vértices  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$ , e con asíntotas  $y = 0$  e  $x = 0$ .

## Razóns trigonométricas

| $\alpha$ (rad)       | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\text{sen } \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\text{cos } \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\text{tx } \alpha$  | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | Non existe      |

- Se un ángulo  $\beta$  está no 2.º cuadrante, pódese poñer como  $180^\circ - \alpha$ , sendo  $\alpha$  un ángulo do 1.º cuadrante.

$$\text{sen } \beta = \text{sen } \alpha \quad \cos \beta = -\cos \alpha \quad \text{tx } \beta = -\text{tx } \alpha$$

$$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ \rightarrow \begin{cases} \text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ \\ \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ \\ \text{tx } 150^\circ = -\text{tx } 30^\circ \end{cases}$$

- Se un ángulo  $\beta$  está no 3.º cuadrante, pódese poñer como  $180^\circ + \alpha$ , sendo  $\alpha$  un ángulo do 1.º cuadrante.

$$\text{sen } \beta = -\text{sen } \alpha \quad \cos \beta = -\cos \alpha \quad \text{tx } \beta = \text{tx } \alpha$$

$$225^\circ = 180^\circ + 45^\circ \rightarrow \begin{cases} \text{sen } 225^\circ = -\text{sen } 45^\circ \\ \cos 225^\circ = -\cos 45^\circ \\ \text{tx } 225^\circ = \text{tx } 45^\circ \end{cases}$$

- Se un ángulo  $\beta$  está no 4.º cuadrante, pódese poñer como  $360^\circ - \alpha$ , sendo  $\alpha$  un ángulo do 1.º cuadrante.

$$\text{sen } \beta = -\text{sen } \alpha \quad \cos \beta = \cos \alpha \quad \text{tx } \beta = -\text{tx } \alpha$$

$$300^\circ = 360^\circ - 60^\circ \rightarrow \begin{cases} \text{sen } 300^\circ = -\text{sen } 60^\circ \\ \cos 300^\circ = \cos 60^\circ \\ \text{tx } 300^\circ = -\text{tx } 60^\circ \end{cases}$$

### Repasa

- 4 Calcula as seguintes razóns trigonométricas.

a)  $\text{sen } \frac{3\pi}{4}$

c)  $\text{tx } \frac{3\pi}{2}$

e)  $\cos \frac{9\pi}{4}$

b)  $\cos \frac{4\pi}{3}$

d)  $\text{sen } \frac{10\pi}{6}$

f)  $\text{tx } \frac{5\pi}{2}$



### 3 Funcións con radicais

As **funcións con radicais** son funcións en cuxa expresión alxébrica aparece a variable  $x$  baixo o signo radical:  $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ .

#### Características

- Se  $n$  é un número par, o seu dominio é o intervalo en que  $g(x) \geq 0$ .
- Se  $n$  é impar, o seu dominio é  $\mathbb{R}$ .

#### Faino así

**COMO REPRESENTAMOS A FUNCIÓN  $f(x) = \sqrt[n]{x}$**

Representa graficamente as funcións.

a)  $f(x) = \sqrt{x}$

b)  $g(x) = \sqrt[3]{x}$

**PRIMEIRO.** Determinamos se  $n$  é par ou impar para calcular o seu dominio.

a)  $n = 2 \rightarrow \text{Dom } f = [0, +\infty)$

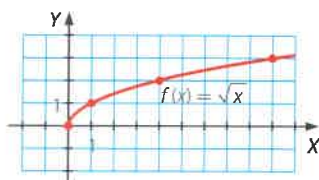
b)  $n = 3 \rightarrow \text{Dom } g = \mathbb{R}$

**SEGUNDO.** Construimos unha táboa de valores e representamos a función.

- Se  $n$  é par, a gráfica da función está no 1.º cuadrante.
- Se  $n$  é impar, a gráfica da función está no 1.º e 3.º cuadrantes.

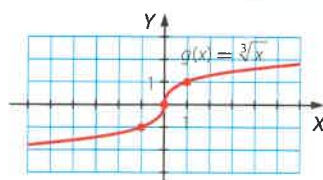
a)

|        |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|
| $x$    | 0 | 1 | 4 | 9 |
| $f(x)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |



b)

|        |    |    |   |   |   |
|--------|----|----|---|---|---|
| $x$    | -8 | -1 | 0 | 1 | 8 |
| $g(x)$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |

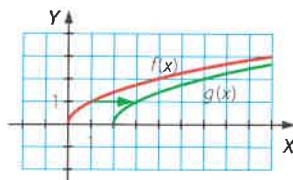


#### Exemplo

1 Representa graficamente  $g(x) = \sqrt{x-2}$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ f(x-2) = \sqrt{x-2} \end{array} \right\} \rightarrow g(x) = f(x-2)$$

Por tanto, a gráfica de  $g(x)$  obtense trasladando a gráfica de  $f(x)$  dúas unidades cara á dereita.



#### Non esquezas

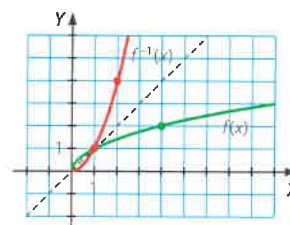


En  $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ , se  $n$  é par, só se toma o resultado positivo da raíz. Se tomásemos tamén o resultado negativo,  $f(x)$  non sería unha función.

#### Decátate



A función inversa de  $f(x) = \sqrt{x}$  es  $f^{-1}(x) = x^2$ ; por tanto, as súas gráficas serán simétricas respecto da recta  $y = x$ .



#### ACTIVIDADES

7 Calcula o dominio das funcións con radicais.

a)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

b)  $g(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

8 Representa graficamente estas funcións.

a)  $f(x) = \sqrt{x+2}$

b)  $g(x) = \sqrt{x-4}$

c)  $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$

d)  $i(x) = \sqrt[3]{x+2}$

## 4 Funcións exponenciais

As **funcións exponenciais** son funcións do tipo  $f(x) = a^x$ , onde  $a$  é un número real positivo ( $a > 0$ ) e distinto de 1 ( $a \neq 1$ ).

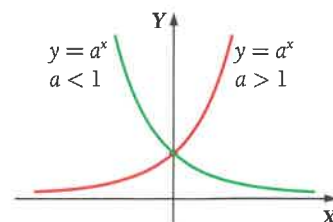
### Non esquezas



Unha función exponencial moi utilizada é  $f(x) = e^x$ , sendo  $e = 2,718281\dots$ . Estas funcións aparecen habitualmente ao describir numerosos procesos demográficos, económicos, biolóxicos, químicos...

### Características da función $y = a^x$

- O dominio dunha función exponencial é  $\mathbb{R}$ .
- O seu percorrido é  $(0, +\infty)$ .
- Como  $a^0 = 1$ , a función pasa sempre polo punto  $(0, 1)$ .
- Como  $a^1 = a$ , a función pasa sempre polo punto  $(1, a)$ .
- Se  $a > 1$ , a función é crecente.
- Se  $0 < a < 1$ , a función é decrecente.



### Faíno así

#### COMO REPRESENTAMOS UNHA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Representa graficamente estas funcións.

**a)**  $f(x) = 2^x$

**b)**  $g(x) = 0,5^x$

**PRIMEIRO.** Consideramos as características das funcións exponenciais.

- Pasa polos puntos  $(0, 1)$  e  $(1, a)$ .
  - a) Pasa por  $(0, 1)$  e  $(1, 2)$ .
  - b) Pasa por  $(0, 1)$  e  $(1, 0,5)$ .
- Se  $a > 1$ , é crecente. E se  $0 < a < 1$ , é decrecente.
  - a)  $a = 2 > 1 \rightarrow f(x)$  crecente
  - b)  $0 < a = 0,5 < 1 \rightarrow g(x)$  decrecente

**SEGUNDO.** Construímos unha táboa de valores para a función.

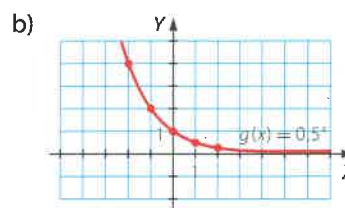
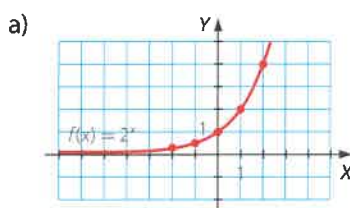
**a)**

| $x$    | -2   | -1  | 1 | 2 |
|--------|------|-----|---|---|
| $f(x)$ | 0,25 | 0,5 | 2 | 4 |

**b)**

| $x$    | -2 | -1 | 1   | 2    |
|--------|----|----|-----|------|
| $g(x)$ | 4  | 2  | 0,5 | 0,25 |

**TERCEIRO.** Representamos todos os puntos e unímolos mediante unha curva.



### ACTIVIDADES

**9** Razona, sen facer a gráfica, se as seguintes funcións son crecentes ou decrecentes.

a)  $f(x) = 1,2^x$

c)  $h(x) = 0,8^x$

b)  $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

d)  $i(x) = (\sqrt{3})^x$

**10** Representa graficamente estas funcións.

a)  $y = -2^x$

d)  $y = 0,1^x$

b)  $y = 2^{-x}$

e)  $y = -2^{-x}$

c)  $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

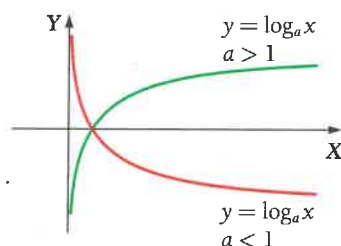
f)  $y = 2^{\frac{x}{3}}$

## 5 Funcións logarítmicas

As **funcións logarítmicas** son funcións do tipo  $f(x) = \log_a x$ , onde  $a$  é un número real positivo ( $a > 0$ ) e distinto de 1 ( $a \neq 1$ ).

### Características da función $y = \log_a x$

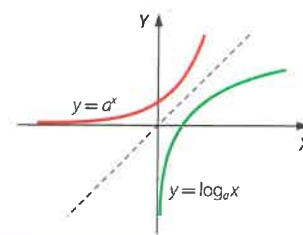
- O logaritmo só existe para valores positivos; por tanto, o dominio da función logarítmica é  $(0, +\infty)$ .
- O seu percorrido é  $(-\infty, +\infty)$ .
- Como  $\log_a 1 = 0$ , a función pasa sempre polo punto  $(1, 0)$ .
- Como  $\log_a a = 1$ , a función pasa sempre polo punto  $(a, 1)$ .
- Se  $a > 1$ , a función é crecente.
- Se  $0 < a < 1$ , a función é decrecente.



### Decátate



A función logarítmica,  $y = \log_a x$ , é a función inversa da función exponencial,  $y = a^x$ .



### Faino así

#### COMO REPRESENTAMOS UNHA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Representa graficamente. **a)**  $f(x) = \log_2 x$  **b)**  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

**PRIMEIRO.** Consideramos as características das funcións logarítmicas.

- O dominio é  $(0, +\infty)$ . **a)**  $\text{Dom } f = (0, +\infty)$  **b)**  $\text{Dom } g = (0, +\infty)$
- Pasa polos puntos  $(1, 0)$  e  $(a, 1)$ .  
**a)** Pasa por  $(1, 0)$  e  $(2, 1)$ . **b)** Pasa por  $(1, 0)$  e  $(\frac{1}{2}, 1)$ .
- Se  $a > 1$ , é crecente. E se  $0 < a < 1$ , é decrecente.  
**a)**  $f(x) = \log_2 x$  é crecente. **b)**  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  é decrecente.

**SEGUNDO.** Construimos unha táboa de valores para a función.

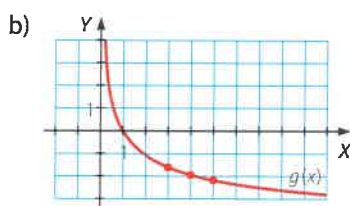
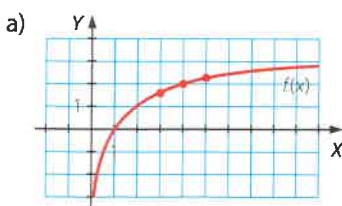
**a)**

| $x$    | 3    | 4 | 5    |
|--------|------|---|------|
| $f(x)$ | 1,58 | 2 | 2,32 |

**b)**

| $x$    | 3     | 4  | 5     |
|--------|-------|----|-------|
| $g(x)$ | -1,58 | -2 | -2,32 |

**TERCEIRO.** Representamos todos os puntos e unímolos mediante unha curva.



### ACTIVIDADES

**11** Razoa, sen facer a gráfica, se as seguintes funcións son crecentes ou decrecentes.

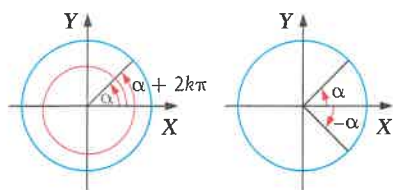
- a)**  $f(x) = \log_{1,2} x$  **d)**  $i(x) = \log_{0,8} x$   
**b)**  $g(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$  **e)**  $l(x) = \log_{\sqrt{3}} x$   
**c)**  $h(x) = \log_7 x$  **f)**  $m(x) = \log_{8,2} x$

**12** Representa graficamente estas funcións.

- a)**  $y = -\log_2 x$  **d)**  $y = \log_{0,1} x$   
**b)**  $y = \log_2 (-x)$  **e)**  $y = -\log_2 (-x)$   
**c)**  $y = \log_{\frac{4}{3}} x$  **f)**  $y = \log_2 \left( \frac{x}{3} \right)$

## 6 Funcións trigonométricas

### 6.1. Función seno

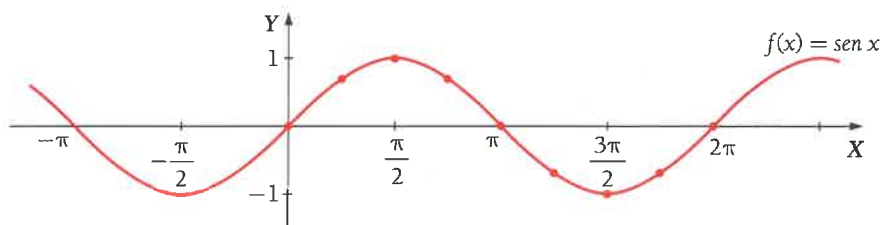


A função seno,  $f(x) = \text{sen } x$ , tem as seguintes características.

- Está definida para qualquer valor, logo o seu domínio é  $\mathbb{R}$ .
- Como  $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ , o seu recorrido é  $[-1, 1]$ .
- É uma função periódica, de período  $2\pi$  radianos.  
 $\text{sen } x = \text{sen } (x + 2k\pi)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$
- Apresenta máximos em  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , e mínimos em  $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ , sendo  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $f(-x) = \text{sen } (-x) = -\text{sen } x = -f(x) \rightarrow$  A função seno é uma função ímpar, é dizer, é simétrica respecto da origem de coordenadas.

Como tem período  $2\pi$ , construímos uma tabela para valores entre 0 e  $2\pi$ , e representamos a função, repetindo o intervalo à esquerda e à direita.

| $x$              | $\text{sen } x$       | $\cos x$              |
|------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0                | 0                     | 1                     |
| $\frac{\pi}{4}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  |
| $\frac{\pi}{2}$  | 1                     | 0                     |
| $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\pi$            | 0                     | -1                    |
| $\frac{5\pi}{4}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{3\pi}{2}$ | -1                    | 0                     |
| $\frac{7\pi}{4}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  |
| $2\pi$           | 0                     | 1                     |

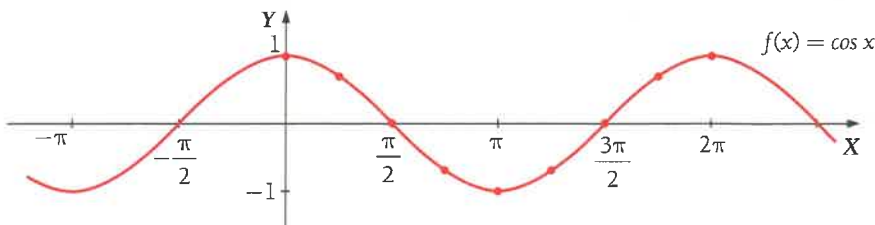


### 6.2. Función coseno

A função coseno,  $f(x) = \cos x$ , tem as seguintes características.

- Está definida para qualquer valor. O seu domínio é  $\mathbb{R}$ .
- Como  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , o seu recorrido é  $[-1, 1]$ .
- É uma função periódica, de período  $2\pi$  radianos.  
 $\cos x = \cos (x + 2k\pi)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$
- Apresenta máximos em  $0 + 2k\pi$ , e mínimos em  $\pi + 2k\pi$ , sendo  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $f(-x) = \cos (-x) = \cos x = f(x) \rightarrow$  A função coseno é par, é dizer, é simétrica respecto do eixo Y.

Como tem período  $2\pi$ , construímos uma tabela para valores entre 0 e  $2\pi$ , e representamos a função, repetindo o intervalo à esquerda e à direita.



#### ACTIVIDADES

**13** Descreve as características destas funções.

- $f(x) = \text{sen } (x - 1)$
- $g(x) = (\text{sen } x) - 1$

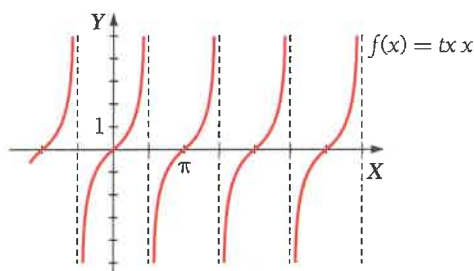
**14** Representa as funções e di que observas.

- $f(x) = \text{sen} \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$
- $g(x) = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$

### 6.3. Función tanxente

A función tanxente,  $f(x) = \tan x$ , ten as seguintes características.

- O seu dominio é  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ , xa que  $\tan x$  non está definida se  $\cos x = 0$ .
- O seu percorrido é  $\mathbb{R}$ .
- É periódica, de período  $\pi$ .
- É sempre crecente.
- É unha función impar pois:  $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -f(x)$



#### Lembra

Como  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , a función  $\tan x$  non está definida cando  $\cos x$  é cero.

### 6.4. Funcións inversas das funcións trigonométricas

- A función inversa da función seno,  $f(x) = \sin x$ , chámase **arco seno** e represéntase por  $f^{-1}(x) = \arcsin x$ . Esta función dá o valor do ángulo, coñecido o valor do seno. Se  $\sin x = y \rightarrow \arcsin y = x$ .

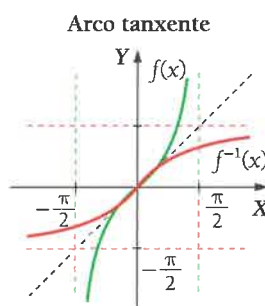
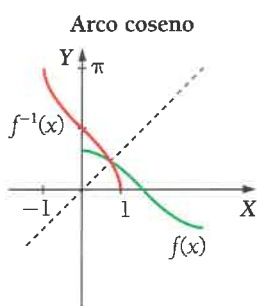
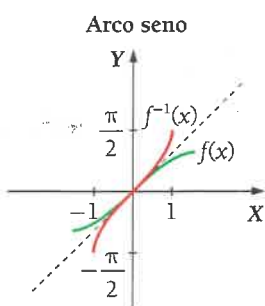
O seu dominio é  $[-1, 1]$  e o seu percorrido é  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

- A función inversa da función coseno,  $f(x) = \cos x$ , é o **arco coseno** e represéntase por  $f^{-1}(x) = \arccos x$ . Esta función permite calcular o ángulo, coñecido o valor do coseno. Se  $\cos x = y \rightarrow \arccos y = x$ .

O seu dominio é  $[-1, 1]$  e o seu percorrido é  $[0, \pi]$ .

- A función inversa da función tanxente,  $f(x) = \tan x$ , denomínase **arco tanxente** e represéntase por  $f^{-1}(x) = \arctan x$ . Con esta función calculamos o ángulo, coñecido o valor da tanxente. Se  $\tan x = y \rightarrow \arctan y = x$ .

O seu dominio é  $\mathbb{R}$  e o seu percorrido é  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

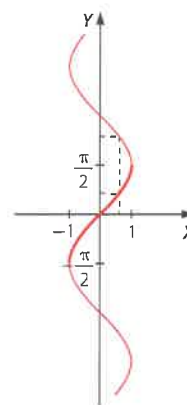


#### Decátate

A gráfica de  $\arcsin x$  móstranos que non é unha función, pois a cada valor de  $x$  correspóndenlle varios valores de  $y$ .

Para que  $\arcsin x$  sexa unha función consideramos o anaco de gráfica en que a cada valor de  $x$  lle corresponde un único valor de  $y$ .

Isto ocorre tamén con  $\arccos x$  e  $\arctan x$ .



#### ACTIVIDADES

15 Describe as características destas funcións.

a)  $f(x) = \tan \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$

b)  $g(x) = \tan(x + 1)$

16 Representa as funcións inversas.

a)  $f(x) = \arccos \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$

b)  $g(x) = \arcsin(x - \pi)$

## 7 Funcións definidas a anacos

En numerosas situacións reais preséntanse funcións que non se poden expresar mediante unha única expresión alxébrica.

Unha **función definida a anacos** é unha función con distintas expresións alxébricas dependendo do intervalo do seu dominio.

### Faino así

#### COMO REPRESENTAMOS UNHA FUNCIÓN DEFINIDA A ANACOS

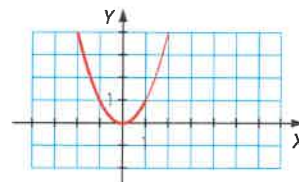
Representa graficamente esta función:  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 0,5x & \text{se } 1 < x \leq 4 \\ \log_2 x & \text{se } x > 4 \end{cases}$

**PRIMEIRO.** Representamos as funcións definidas en cada un dos tramos, tendo en conta o valor da función nos extremos dos intervalos.

- Primeiro intervalo:  $(-\infty, 1]$

$$f(x) = x^2 \rightarrow \begin{cases} \text{Parábola de vértice } (0, 0) \\ a = 1 > 0 \rightarrow \text{Mínimo en } (0, 0) \end{cases}$$

$$f(1) = 1^2 = 1 \rightarrow \text{Extremo } (1, 1)$$

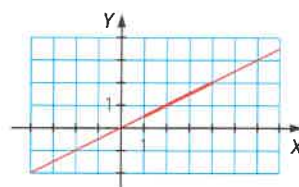


- Segundo intervalo:  $(1, 4]$

$$f(x) = 0,5x \rightarrow \begin{cases} \text{Recta que pasa por } (0, 0) \\ m = 0,5 > 0 \rightarrow \text{Crecente} \end{cases}$$

$$f(1) = 0,5 \cdot 1 = 0,5 \rightarrow \text{Extremo } (1, 0,5)$$

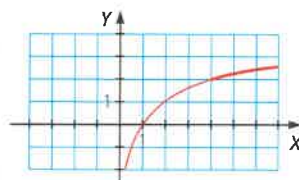
$$f(4) = 0,5 \cdot 4 = 2 \rightarrow \text{Extremo } (4, 2)$$



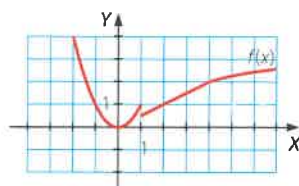
- Terceiro intervalo:  $(4, +\infty)$

$$f(x) = \log_2 x \rightarrow \begin{cases} \text{Función que pasa por } (2, 1) \\ a = 2 > 0 \rightarrow \text{Crecente} \end{cases}$$

$$f(4) = \log_2 4 = 2 \rightarrow \text{Extremo } (4, 2)$$



**SEGUNDO.** Tomamos a representación de cada unha das funcións no tramo correspondente, e debuxámolas nos mesmos eixes de coordenadas.



### ACTIVIDADES

- 17** Representa graficamente esta función definida a anacos.

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x \leq -2 \\ x^2 & \text{se } -2 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Describe as súas principais características.

- 18** Nun contrato mensual de telefonía móbil factúrase a 0,12 € por minuto. Se o consumo non chega a 9 €, entón abónase esa cantidade.

- Calcúlase a expresión da función que relaciona o consumo, en minutos, e o importe da factura mensual, en euros.
- Representa a función.

## 7.1. Función valor absoluto

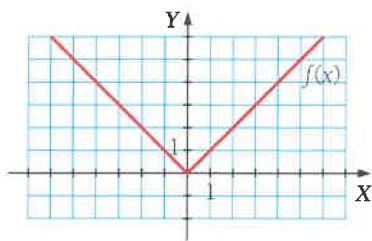
A **función valor absoluto** é a función que asocia a cada número real o seu valor absoluto.

$$f(x) = |x|$$

A función valor absoluto pódese definir como unha función definida a anacos da seguinte maneira.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A súa gráfica está formada por dúas rectas, unha decrecente e a outra crecente, que pasan pola orixe de coordenadas.



### Lembra

O valor absoluto dun número  $a$  coincide con  $a$  se é positivo ou cero, ou co seu oposto,  $-a$ , se é negativo.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

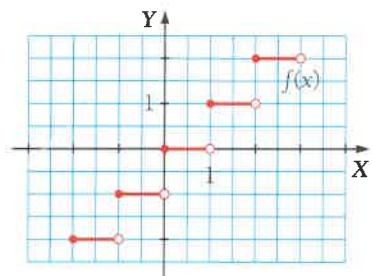
## 7.2. Función parte enteira

A **función parte enteira** é a función que asocia a cada número real a súa parte enteira, é dicir, o primeiro número enteiro menor ou igual ca el.

$$f(x) = [x]$$

A función parte enteira pódese definir como unha función definida a anacos con infinitos tramos nos que a función é constante.

$$f(x) = [x] = \begin{cases} \dots & \\ -2 & \text{se } x \in [-2, -1) \\ -1 & \text{se } x \in [-1, 0) \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x \in [1, 2) \\ \dots & \end{cases}$$



Ou, de forma xeral:  $f(x) = \{n \text{ se } x \in [n, n+1), \text{ sendo } n \in \mathbb{Z}\}$ .

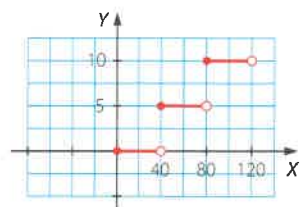
### Exemplo

- 2 Un supermercado ofrécelles aos seus clientes cheques-regalo de 5 € por cada 40 € de compra. Expressa mediante unha función o importe recibido en cheques-regalo, dependendo da compra realizada.

Consideramos a función como unha función definida a anacos:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 40) \\ 5 & \text{se } x \in [40, 80) \\ 10 & \text{se } x \in [80, 120) \\ \dots & \end{cases}$$

De forma xeral,  $f(x) = 5 \cdot \left[ \frac{x}{40} \right]$ , é dicir, 5 multiplicado pola parte enteira de  $\frac{x}{40}$ .



### ACTIVIDADES

- 19 O servizo de correos cobra 0,30 € polos primeiros 25 g de envío e, a partir desa cantidade, cobra 0,20 € por cada 25 g (ou fracción) de peso extra. Representa a gráfica do custo do envío de cartas ata 150 g.

- 20 A función que asocia a cada número a súa parte decimal é:

$$f(x) = x - [x]$$

Representa a función e analiza as súas propiedades.

## Funcións polinómicas

### 1. COMO SE REPRESENTAN AS FUNCIÓNS DO TIPO $f(x) = ax^n$ , CON $n \geq 2$

3 Representa graficamente as seguintes funcións.

a)  $f(x) = 2x^3$

b)  $g(x) = -2x^4$

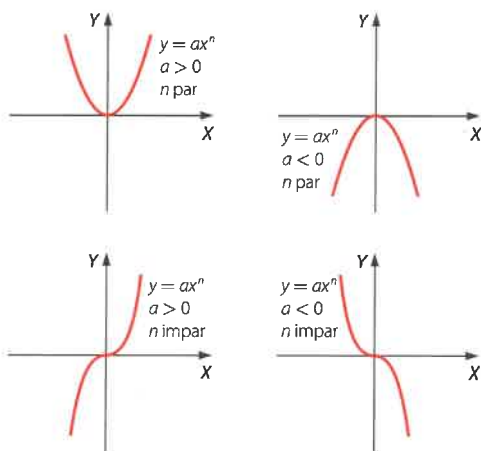
#### SOLUCIÓN

**PRIMEIRO.** Determináse se o coeficiente  $a$  é positivo ou negativo e se o expoñente  $n$  é par ou impar.

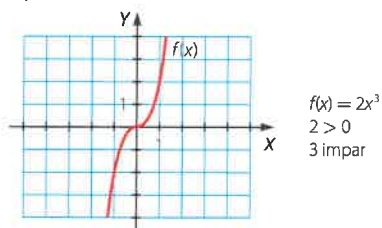
a)  $f(x) = 2x^3 \rightarrow \begin{cases} n \text{ impar} \\ a = 2 > 0 \end{cases}$

b)  $g(x) = -2x^4 \rightarrow \begin{cases} n \text{ par} \\ a = -2 < 0 \end{cases}$

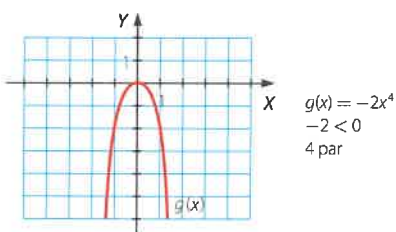
**SEGUNDO.** Debúxase a gráfica da función, tendo en conta os valores de  $a$  e  $n$ .



a) Representáse a función  $f(x)$ .



b) Representáse a función  $g(x)$ .



## Funcións racionais

### 1. COMO SE REPRESENTAN AS FUNCIÓNS DO TIPO $f(x) = \frac{k}{x^n}$

4 Representa graficamente as funcións.

a)  $f(x) = \frac{2}{x^3}$

b)  $g(x) = -\frac{2}{x^4}$

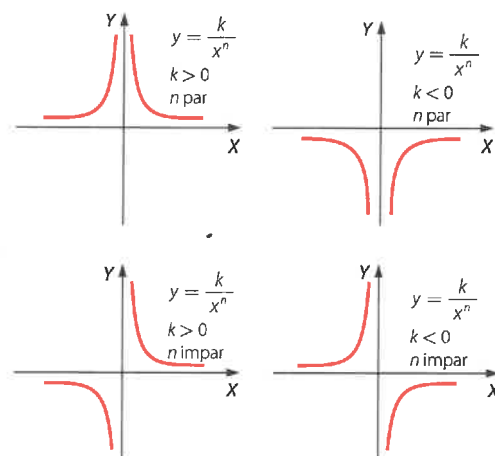
#### SOLUCIÓN

**PRIMEIRO.** Determináse se  $k$  é positivo ou negativo e se o expoñente  $n$  é par ou impar.

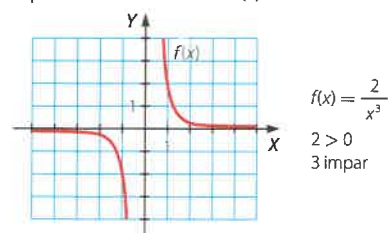
a)  $f(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow \begin{cases} n \text{ impar} \\ k = 2 > 0 \end{cases}$

b)  $g(x) = -\frac{2}{x^4} \rightarrow \begin{cases} n \text{ par} \\ k = -2 < 0 \end{cases}$

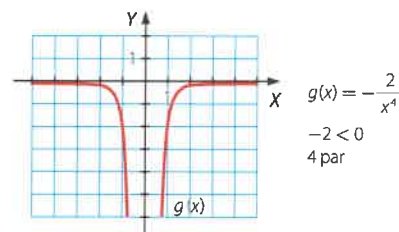
**SEGUNDO.** Debúxase a gráfica da función, tendo en conta os valores de  $k$  e  $n$ .



a) Representáse a función  $f(x)$ .



b) Representáse a función  $g(x)$ .



## Funcións con radicais

### 1. COMO SE REPRESENTAN AS FUNCIÓNS

DO TIPO  $f(x) = \frac{k}{\sqrt[n]{x}}$

- 5 Representa graficamente as seguintes funcións.

a)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$       b)  $g(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

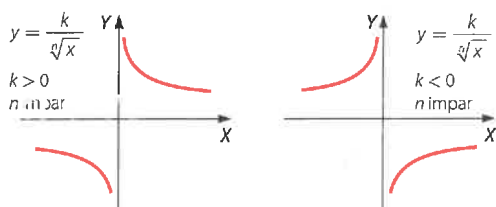
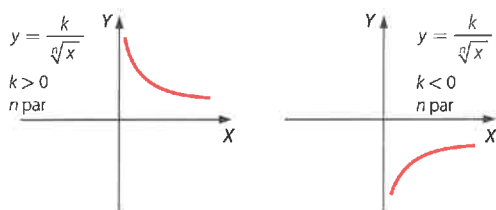
#### SOLUCIÓN

**PRIMEIRO.** Determináse se  $k$  é positivo ou negativo e se o índice  $n$  da raíz é par ou impar.

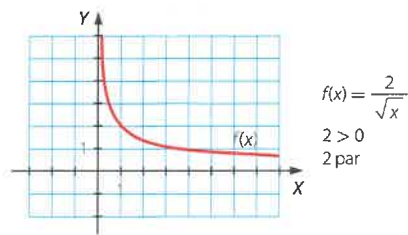
a)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow \begin{cases} n \text{ par} \\ k = 2 > 0 \end{cases}$

b)  $g(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}} \rightarrow \begin{cases} n \text{ impar} \\ k = -2 < 0 \end{cases}$

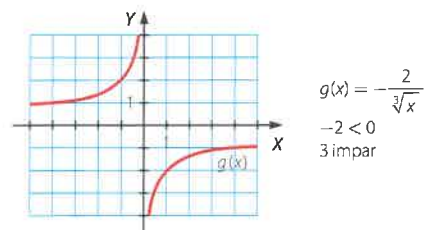
**SEGUNDO.** Representáse a función, tendo en conta os valores de  $k$  e  $n$ .



- a) Representáse a función  $f(x)$ .



- b) Representáse a función  $g(x)$ .



## Funcións exponenciais

### 1. COMO SE REPRESENTAN AS FUNCIÓNS

DO TIPO  $f(x) = a^{kx}$

- 6 Representa graficamente estas funcións.

a)  $f(x) = 2^{3x}$       b)  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

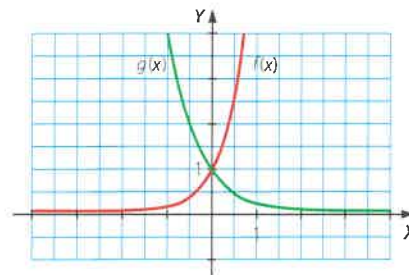
#### SOLUCIÓN

**PRIMEIRO.** Escríbese a función como  $y = (a^k)^x$ .

a)  $f(x) = 2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$

b)  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1^2}{2^2}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

**SEGUNDO.** Representáse a función resultante como unha función exponencial do tipo  $y = a^x$ .



### 2. COMO SE REPRESENTAN AS FUNCIÓNS DO TIPO

$g(x) = a^{x-b} + c$  A PARTIR DE  $f(x) = a^x$

- 7 Representa graficamente esta función.

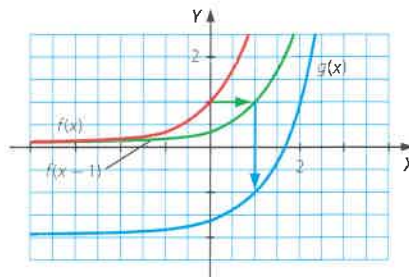
$g(x) = 3^{x-1} - 2$

#### SOLUCIÓN

**PRIMEIRO.** Tórmase  $f(x) = a^x$  e exprésase  $g(x)$  en función de  $f(x)$ .

$f(x) = 3^x \rightarrow g(x) = 3^{x-1} - 2 = f(x-1) - 2$

**SEGUNDO.** Obtense a gráfica de  $g(x)$  trasladando a gráfica de  $f(x)$  horizontal e verticalmente.



## Funcións logarítmicas

### 1. COMO SE REPRESENTAN AS FUNCIÓNS DO TIPO $f(x) = \log_a kx$

8 Representa graficamente as seguintes funcións.

a)  $f(x) = \log_2 4x$

b)  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{4}$

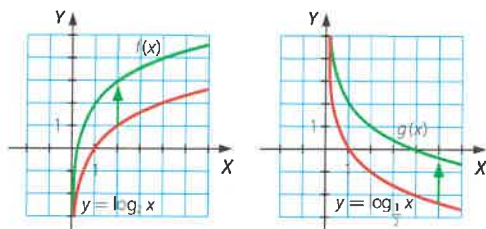
#### SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Aplícanse as propiedades dos logaritmos.

a)  $f(x) = \log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$

b)  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{4} = \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} 4 =$   
 $= \log_{\frac{1}{2}} x - (-2) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$

SEGUNDO. Representáanse as funcións facendo as transformacións necesarias sobre a gráfica de  $y = \log_a x$ .



### 2. COMO SE REPRESENTAN AS FUNCIÓNS DO TIPO $f(x) = \log_a x^b$

9 Representa graficamente as seguintes funcións.

a)  $f(x) = \log_5 x^5$

b)  $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{x^5}$

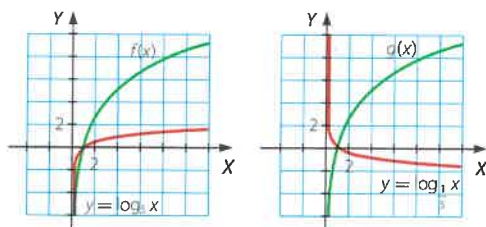
#### SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Aplícanse as propiedades dos logaritmos.

a)  $f(x) = \log_5 x^5 = 5 \log_5 x$

b)  $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{x^5} = \log_{\frac{1}{5}} x^{-5} = -5 \log_{\frac{1}{5}} x$

SEGUNDO. Representáanse as funcións facendo as transformacións necesarias sobre a gráfica de  $y = \log_a x$ .



## Funcións trigonométricas

### 1. COMO SE REPRESENTAN FUNCIÓNS TRIGONOMÉTRICAS SINXELAS E COMO SE RECOÑECEN AS SÚAS PROPIEDADES

10 Representa graficamente estas funcións.

a)  $g(x) = 2 \cos x$

b)  $h(x) = \cos 2x$

#### SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Exprésase a función como unha transformación dalgunha das funcións trigonométricas coñecidas.

a)  $f(x) = \cos x \rightarrow g(x) = 2f(x)$

b)  $f(x) = \cos x \rightarrow h(x) = f(2x)$

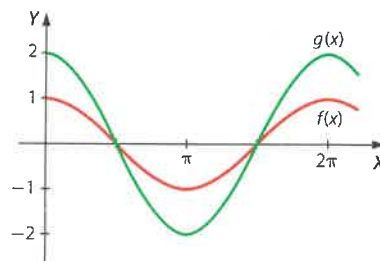
SEGUNDO. Estudáanse as transformacións das novas funcións.

a)  $g(x) = 2f(x)$

O factor 2 amplifica as imaxes da función  $f(x) = \cos x$ .

O único que varía é o percorrido, que se transforma en  $[-2, 2]$ .

Non modifica a periodicidade, nin os puntos de corte co eixe X.



b)  $h(x) = f(2x)$

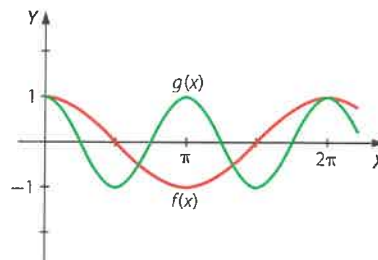
O factor 2 afecta ao dominio de  $f(x) = \cos x$ , e non modifica o percorrido, pero si o período.

Para calculalo hai que determinar o valor de  $T$  que cumpra que:

$$\cos 2(x + T) = \cos 2x$$

$$2(x + T) - 2x = 2\pi \rightarrow T = \pi$$

A función  $g(x)$  é periódica, de período  $\pi$ .



## Función valor absoluto

### 1. COMO SE REPRESENTA UNHA FUNCIÓN DO TIPO $g(x) = |f(x)|$

- 11 Representa graficamente esta función.

$$g(x) = |-x^2 + 4x|$$

A partir da gráfica, escribe a súa expresión como unha función definida a anacos.

#### SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Representase a función sen o valor absoluto.

$$f(x) = -x^2 + 4x$$

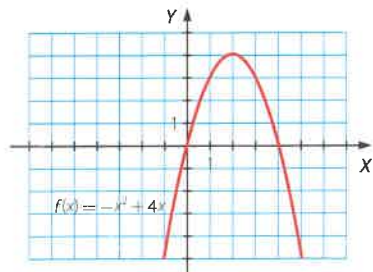
$f(x)$  é unha función cuadrática; por tanto, determinase o seu vértice e se é un máximo ou un mínimo.

$$\text{Vértice: } \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right)$$

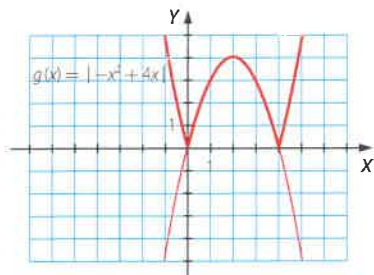
$$a = -1, b = 4, c = 0$$

$$\left( \frac{-4}{-2}, \frac{-16}{-4} \right) = (2, 4)$$

Como  $a = -1 < 0$ , o vértice é un máximo.



SEGUNDO. Debúxanse as figuras simétricas, con respecto ao eixe X, das partes da gráfica que correspondan a valores negativos da función.



TERCEIRO. Escríbese a expresión alxébrica da función, tendo en conta os puntos de corte cos eixes.

$$g(x) = |-x^2 + 4x| = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{se } x < 0 \\ -x^2 + 4x & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 4x & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

### 2. COMO SE REPRESENTAN AS FUNCIÓNS NAS QUE INTERVÉN O VALOR ABSOLUTO

- 12 Debuxa a gráfica da seguinte función.

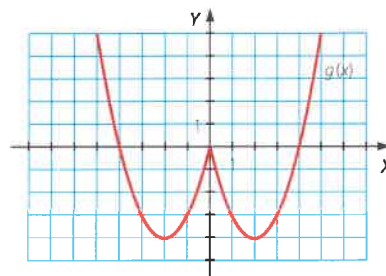
$$g(x) = x^2 - 4|x|$$

#### SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Defínese a función como unha función definida a anacos, tendo en conta que  $|x|$  é  $x$  cando é un número positivo, e é  $-x$  cando é negativo.

$$g(x) = x^2 - 4|x| = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 4x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

SEGUNDO. Representase a función definida a anacos en cada un dos tramos.



## Función parte enteira

### 1. COMO SE REPRESENTAN AS FUNCIÓNS NAS QUE INTERVÉN A FUNCIÓN PARTE ENTEIRA

- 13 A partir da gráfica da función parte enteira,  $f(x) = [x]$ , debuxa a gráfica da función  $g(x) = [x] - 2$ .

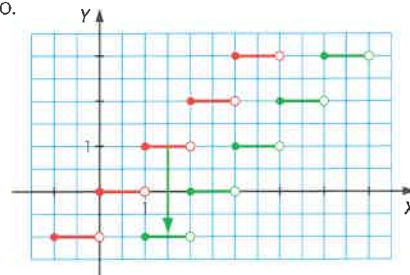
#### SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Exprésase a función como unha transformación da función parte enteira.

$$f(x) = [x] \rightarrow g(x) = [x] - 2 = f(x) - 2$$

SEGUNDO. Representase a función, facendo as transformacións necesarias sobre a gráfica de  $f(x) = [x]$ .

Ao restarlle 2 aos valores da función  $[x]$ , graficamente equivale a desprazar a súa gráfica 2 unidades cara abaixo.

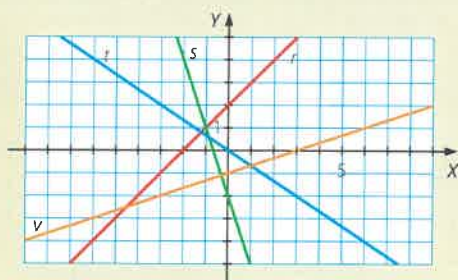


# Funcións polinómicas

- 21** Representa, sen facer as táboas de valores correspondentes, as funcións lineais e afíns.

a)  $y = \frac{x-3}{3}$       c)  $y = \frac{1}{2}x + 1$   
 b)  $y = -x + 4$       d)  $y = -2x$

- 22** Escribe a expresión alxébrica das funcións representadas, e calcula a súa pendente e a súa ordenada na orixe.



- 23** Representa as funcións nos mesmos eixes de coordenadas, e relaciona a abertura das ramas de cada parábola co coeficiente de  $x^2$ .

a)  $y = x^2$       c)  $y = 2x^2$   
 b)  $y = \frac{1}{2}x^2$       d)  $y = \frac{1}{4}x^2$

- 24** Calcula os vértices e os puntos de corte cos eixes das seguintes parábolas.

a)  $f(x) = x^2 - 2x + 2$   
 b)  $g(x) = -2x^2 + x - 1$   
 c)  $h(x) = -x^2 - 2$

- 25** Fai a representación gráfica das seguintes funcións cuadráticas, indicando o vértice e os cortes cos eixes.

a)  $y = x^2 - 2x - 8$       c)  $y = x^2 + 4x + 4$   
 b)  $y = -x^2 + 3x$       d)  $y = 2x^2 + 3x - 2$

- 26** Representa a función  $y = x^2$  e, a partir dela, debuxa as gráficas destas funcións polinómicas.

a)  $y = (x-2)^2$   
 b)  $y = x^2 + 3$   
 c)  $y = (x+3)^2$   
 d)  $y = x^2 - 4$

Que relación gardan as gráficas das últimas catro funcións coa gráfica da primeira?

- 27** Fai a gráfica da función  $f(x) = x^2 + 2x$ . Obtén a expresión alxébrica das seguintes funcións e represéntaa.

a)  $f(x-2)$       c)  $f(x+1)$   
 b)  $f(x)-4$       d)  $f(x)+2$

Hai algunha relación entre estas gráficas?

- 28** Considera as seguintes funcións.

$f(x) = x^2 - 2x + 1$        $g(x) = (x-1)^2$        $h(x) = 3x$

Calcula a expresión alxébrica da función que se indica en cada apartado, e represéntaa graficamente.

a)  $f(-x)$       d)  $-g(x)$   
 b)  $-f(x)$       e)  $h(-x)$   
 c)  $g(-x)$       f)  $-h(x)$

- 29** Constrúe a táboa de valores e debuxa a gráfica das funcións.

a)  $y = x^3 + 2x^2 + 3$   
 b)  $y = -x^3 + 6x + 1$

- 30** Calcula os puntos onde cortan as seguintes funcións polinómicas ao eixe X.

a)  $y = 3x + 9$   
 b)  $y = -2x + 5$   
 c)  $y = 6x^2 + 17x - 3$   
 d)  $y = 8x^2 + 10x - 3$   
 e)  $y = 2x^2 + x + 3$

- 31** Calcula os puntos onde estas funcións cortan o eixe X.

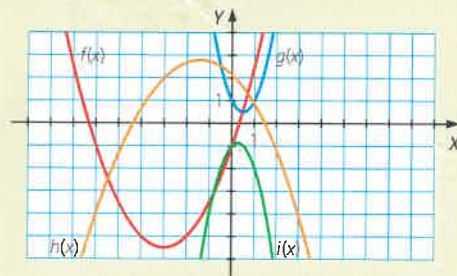
a)  $y = (x-1)(x+2)$   
 b)  $y = (2x-1)^2$   
 c)  $y = (x-2)(x+3)(2x+1)$

- 32** Representa as seguintes funcións polinómicas, indicando os puntos de corte cos eixes.

a)  $y = 4x^2 + 4x + 1$   
 b)  $y = x^3 - x^2 - 9x + 9$   
 c)  $y = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$   
 d)  $y = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$   
 e)  $y = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

- 33** Relaciona cada gráfica coa súa expresión alxébrica.

a)  $y = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$       c)  $y = -\frac{x^2}{3} - x + 2$   
 b)  $y = 2x^2 - 2x + 1$       d)  $y = -2x^2 + x + 1$



- 34** Representa funcións da forma  $y = ax^2 - 3x + 2$  con distintos valores de  $a$ , e estuda a súa variación en función do parámetro.

- 35** Representa funcións da forma  $y = x^2 + bx + 2$  con distintos valores de  $b$ , e explica como varían en función do parámetro.

- 36** Representa funcións da forma  $y = x^2 + 2x + c$  con distintos valores de  $c$ , e analiza a súa variación en función do parámetro.

- 37** Escribe funcións coas seguintes características.

- a) Unha parábola que corte o eixe  $X$  en  $x = 3$  e  $x = 5$ .  
 b) Unha parábola que corte o eixe  $X$  en  $x = -2$  e  $x = 1$ .  
 c) Unha parábola que corte dúas veces o eixe  $X$  en  $x = 2$ .  
 d) Unha función cúbica que corte o eixe  $X$  en  $x = -3$ ,  $x = -1$  e  $x = 1$ .  
 e) Unha función cúbica que corte o eixe  $X$  dúas veces en  $x = 2$  e unha vez en  $x = -1$ .  
 f) Unha función cúbica que corte unha vez o eixe  $X$  en  $x = 5$ .  
 g) Unha función polinómica de cuarto grao que corte o eixe  $X$  en  $x = -1$ ,  $x = 3$ ,  $x = 4$  e  $x = 5$ .  
 h) Unha función de cuarto grao que só corte dúas veces o eixe de abscisas, en  $x = -2$  e en  $x = 5$ .

- 38** Explica as diferentes situacións que poden producirse ao determinar onde corta o eixe  $X$  unha función polinómica de cuarto grao.

- 39** Obtén a expresión alxébrica e representa a función cuadrática que pasa polos puntos  $A(1, -2)$ ,  $B(2, -2)$  e  $C(3, 0)$ .

- 40** Calcula e representa as funcións polinómicas de grao mínimo que pasan polos seguintes puntos.

- a)  $A(0, 0)$ ,  $B\left(5, \frac{5}{2}\right)$  e  $C(-2, -1)$   
 b)  $A(-1, 0)$ ,  $B(0, -1)$  e  $C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$   
 c)  $A(3, 0)$ ,  $B(4, 1)$  e  $C(5, 0)$   
 d)  $A(1, 0)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $C(3, 0)$  e  $D(4, 1)$   
 e)  $A(-2, 3)$ ,  $B\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$  e  $C(2, 2)$   
 f)  $A(-2, -2)$ ,  $B(1, 1)$  e  $C(4, -3)$

## Funcións racionais

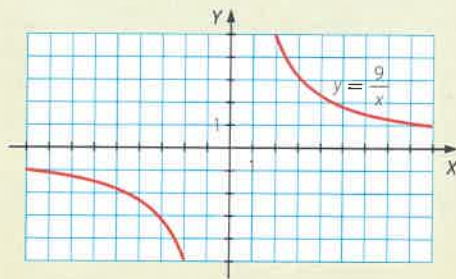
- 41** Cal é o dominio destas funcións racionais?

- a)  $f(x) = \frac{7}{(x+7)(x-4)}$   
 b)  $g(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-10}$

- 42** Dada a función  $f(x) = \frac{2}{x}$ , determina a expresión alxébrica das seguintes funcións.

- a)  $g(x) = f(x-3)$       d)  $g(x) = f(x) + 3$   
 b)  $g(x) = f(x+1)$       e)  $g(x) = f(-x)$   
 c)  $g(x) = f(x) - 2$       f)  $g(x) = -f(x)$

- 43** Observa a gráfica da función  $y = \frac{9}{x}$ .



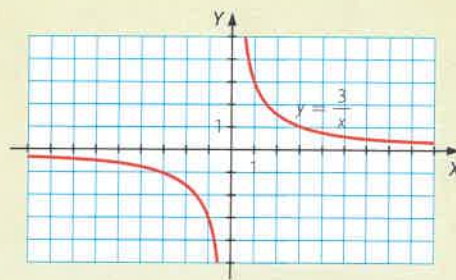
Representa as seguintes funcións.

- a)  $y = \frac{9}{x-3}$       d)  $y = \frac{9}{x+2}$   
 b)  $y = \frac{9}{x} - 3$       e)  $y = \frac{9}{x} + 2$   
 c)  $y = -\frac{9}{x}$       f)  $y = -\frac{9}{x-1}$

- 44** Sen representalas, escribe a relación que hai entre as gráficas destas funcións e a de  $y = \frac{12}{x}$ .

- a)  $y = \frac{12}{x+4}$       c)  $y = \frac{12}{x} + 1$   
 b)  $y = \frac{12}{x} - 2$       d)  $y = -\frac{12}{x}$

- 45** A gráfica da función  $y = \frac{3}{x}$  é:



Encontra a relación que teñen estas funcións coa función  $y = \frac{3}{x}$  e represéntaas.

- a)  $y = \frac{x+4}{x+1}$   
 Ten en conta que:  $y = \frac{x+4}{x+1} = 1 + \frac{3}{x+1}$ .  
 b)  $y = \frac{2x-5}{x-1}$   
 c)  $y = \frac{-2x+1}{x+1}$   
 d)  $y = \frac{-x-5}{x+2}$

## ACTIVIDADES

### Funcións con radicais

**46** Determina o dominio destas funcións con radicais.

•••

- a)  $f(x) = \sqrt{x} + 7$       c)  $h(x) = \sqrt{x+7}$   
b)  $g(x) = -\sqrt{x} + 5$       d)  $i(x) = -\sqrt{x+5}$

**47** Calcula o dominio das seguintes funcións con radicais.

•••

- a)  $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$   
b)  $g(x) = \sqrt{x^4 - 81}$   
c)  $h(x) = \sqrt[4]{1-x^3}$

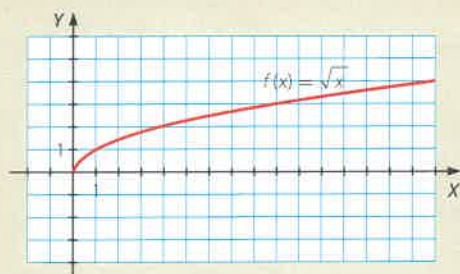
**48** Cal é o dominio destas funcións con radicais?

•••

- a)  $f(x) = \frac{7x}{2 - \sqrt{x-5}}$   
b)  $g(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{4 - \sqrt{x+1}}$

**49** A gráfica da función  $f(x) = \sqrt{x}$  é:

•••



Obtén a expresión alxébrica e representa as seguintes funcións.

- a)  $f(x-2)$       d)  $-f(x)$   
b)  $f(x+3)$       e)  $-1 - f(x)$   
c)  $1 + f(x)$       f)  $f(x) - 2$

**50** Coa axuda da calculadora, realiza unha táboa de valores

•••

para representar a función  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ . Determina o seu dominio e o seu percorrido.

**51** A partir da gráfica da función  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ , explica como farías a representación gráfica das seguintes funcións con radicais.

•••

- a)  $y = 1 + \sqrt{x^2 + 1}$       c)  $y = 1 - \sqrt{x^2 + 1}$   
b)  $y = -2 + \sqrt{x^2 + 1}$       d)  $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

**52** Calcula o dominio destas funcións.

•••

- a)  $y = \sqrt[4]{(x-1)^2}$       b)  $y = \sqrt{x-1}$

Utiliza o resultado para probar que as funcións non son iguais e represéntaa graficamente.

### Funcións exponenciais

**53** Representa a gráfica das funcións  $y = 2^x$  e  $y = 3^x$ .

•••

A partir delas, razoa como será a gráfica das funcións  $y = 5^x$  e  $y = 10^x$ .

**54** Utiliza a calculadora e realiza unha táboa de valores

•••

para representar a función exponencial  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ .

**55** Representa as funcións  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  e  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ .

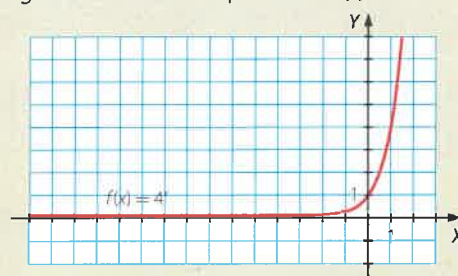
•••

A partir das gráficas, como serán

as gráficas das funcións  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$  e  $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ ?

**56** Esta é a gráfica da función exponencial  $f(x) = 4^x$ .

•••



Obtén a expresión alxébrica e representa as seguintes funcións.

- a)  $f(x-3)$       c)  $4 + f(x)$       e)  $2 - f(x)$   
b)  $f(x+1)$       d)  $-f(x)$       f)  $f(x) - 2$

**57** A partir da gráfica da función  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ , explica

•••

como farías a representación gráfica das seguintes funcións.

- a)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$       d)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$   
b)  $y = 3^x$       e)  $y = 3^{x+2}$   
c)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$       f)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$

### Funcións logarítmicas

**58** Coa calculadora, realiza unha táboa de valores

•••

para representar a función logarítmica  $y = \log_3 x$ .

**59** Representa a gráfica das funcións.

•••

$$y = \log_2 x \quad y = \log_3 x$$

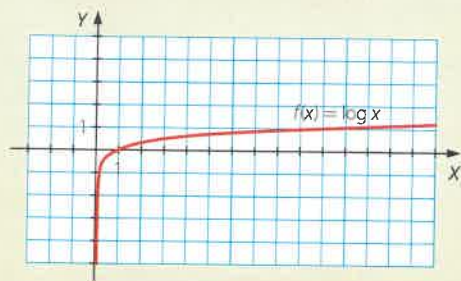
Deduce, a partir delas, como será a gráfica das funcións  $y = \log_5 x$  e  $y = \log x$ .

**60** Representa as funcións  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  e  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ .

•••

Como serán as gráficas das funcións  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$  e  $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ ?

**61** Esta é a gráfica da función logarítmica  $f(x) = \log x$ .



Obtén a expresión alxébrica e representa as seguintes funcións.

- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| a) $f(x - 4)$     | d) $-f(x)$        |
| b) $f(x + 3)$     | e) $2 - f(x - 2)$ |
| c) $4 + f(x + 1)$ | f) $f(2 - x)$     |

**62** A partir da gráfica da función logarítmica  $y = \log_3 x$ , explica como farías a representación gráfica das seguintes funcións.

- |                                            |                                                        |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| a) $y = \log_3 3x$                         | d) $y = \log_{\frac{1}{3}} \left( \frac{3}{x} \right)$ |
| b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$              | e) $y = \log_{\frac{1}{3}} 3x$                         |
| c) $y = \log_3 \left( \frac{1}{x} \right)$ | f) $y = \log_3 \left( \frac{x}{9} \right)$             |

## Funcións trigonométricas

**63** Debuxa a gráfica de  $y = \cos x$  e, a partir dela, fai a gráfica das seguintes funcións.

- $y = -\cos x$
- $y = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$
- $y = 1 + \cos x$
- $y = \cos(-x)$

**64** Debuxa a gráfica de  $y = \sin x$  e, a partir dela, fai a gráfica destas funcións.

- $y = -\sin x$
- $y = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$
- $y = -2 + \sin x$
- $y = -\sin(-x)$

**65** Realiza unha gráfica e estuda as características destas funcións.

$$y = \sin 2x \quad y = \sin 3x$$

A partir do anterior explica como serán as gráficas das funcións:

- $y = \sin 4x$
- $y = \sin 6x$

**66** Representa e estuda as características destas funcións.

$$y = \cos \frac{x}{2}$$

$$y = \cos \frac{x}{3}$$

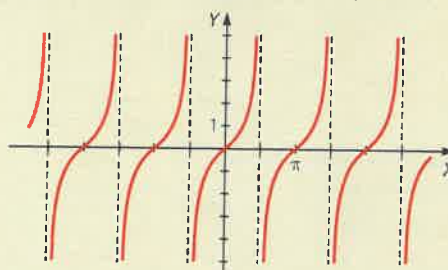
Explica a partir do estudo anterior, como serán as gráficas das seguintes funcións.

- $y = \cos \frac{x}{5}$
- $y = \cos \frac{x}{6}$

**67** Axudándote da súa gráfica, comproba que estes pares de funcións non son iguais.

- $y = \cos \left( \frac{x}{2} \right)$      $y = \frac{\cos x}{2}$
- $y = \sin \left( \frac{x}{2} \right)$      $y = \frac{\sin x}{2}$
- $y = tx \left( \frac{x}{2} \right)$      $y = \frac{tx x}{2}$

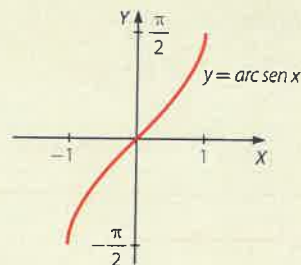
**68** Esta é a gráfica da función trigonométrica  $y = tx x$ .



Utiliza a gráfica anterior para construír as gráficas das seguintes funcións.

- $y = tx(x + \pi)$
- $y = 1 - tx x$

**69** A continuación podes ver a gráfica da función  $y = \arcsin x$ .

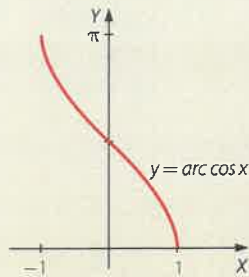


Realiza as gráficas das funcións.

- $y = 2 + \arcsin x$
- $y = 3 - \arcsin x$
- $y = \arcsin \left( x - \frac{1}{2} \right)$
- $y = \arcsin(x - 1)$

## ACTIVIDADES

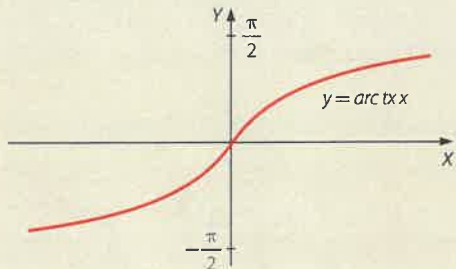
- 70** Esta é a gráfica da función  $y = \arccos x$ .  
○○○



Realiza as gráficas das funcións.

- a)  $y = 2 + \arccos x$
- b)  $y = 3 - \arccos x$
- c)  $y = \arccos \left( x - \frac{1}{2} \right)$
- d)  $y = \arccos (x - 1)$

- 71** Observa a gráfica da función  $y = \arctan x$ .  
○○○

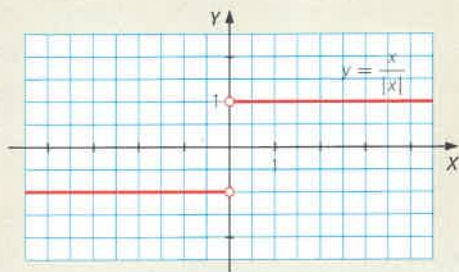


Realiza as gráficas das funcións.

- a)  $y = 2 + \arctan x$
- b)  $y = 3 - \arctan x$
- c)  $y = \arctan \left( x - \frac{1}{2} \right)$
- d)  $y = \arctan (x - 1)$

## Funcións definidas a anacos

- 72** A función cuxa expresión alxébrica é  $y = \frac{x}{|x|}$   
○○○ chámase *función signo de x*.



Encontra a súa expresión alxébrica como unha función definida a anacos.

- a) Canto vale se  $x = 3$ ?
- b) E se  $x = -5$ ?
- c) E se  $x = -3,4$ ?

- 73** Representa e describe as características das seguintes funcións.  
○○○

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x < 2 \\ x - 5 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{se } x < 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \\ -x + 3 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} \frac{6}{x-1} & \text{se } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

- 74** Representa e describe as características destas funcións definidas a anacos.  
○○○

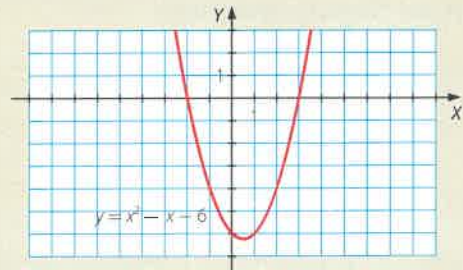
$$a) f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{2}{x-3} & \text{se } 0 < x \leq 4 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x \leq 1 \\ \log x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- 75** Escribe como funcións definidas a anacos.

- a)  $y = |x + 2|$
- b)  $y = |12 - 3x|$

- 76** Observa a gráfica da función  $y = x^2 - x - 6$ .  
○○○



Realiza a gráfica de  $y = |x^2 - x - 6|$ .

- 77** Representa a función.  
○○○

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{se } x < -1 \\ -4 & \text{se } x = -1 \\ -x + 3 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Estuda o valor que toma a función nos puntos próximos a  $-1$ , completando as táboas.

| Esquerda de $-1$ | $-2$ | $-1,5$ | $-1,1$ | $-1,05$ |
|------------------|------|--------|--------|---------|
| $f(x)$           |      |        |        |         |

| Dereita de $-1$ | $0$ | $-0,5$ | $-0,9$ | $-0,95$ |
|-----------------|-----|--------|--------|---------|
| $f(x)$          |     |        |        |         |

Describe o que lle sucede á función nas proximidades de  $-1$ .

**78** Escribe como unha función definida a anacos e representa as funcións.

- a)  $y = |x^2 - 4x - 5|$
- b)  $y = |x^2 - 4x + 5|$
- c)  $y = |2x^2 - 7x + 3|$
- d)  $y = |-x^2 + 4x - 5|$

**79** Expresa como unha función definida a anacos.

- a)  $y = |x| + |x + 2|$
- b)  $y = |x + 1| - |1 - x|$
- c)  $y = |x - 1| - |1 - x|$
- d)  $y = |2x + 1| - |2 - x|$

## Problemas con funcións

**80** O número de alumnos afectados por unha epidemia de gripe obtense a partir da función:

$$f(x) = \frac{30x}{x + 2}$$

sendo  $x$  o número de días transcorridos desde o comezo da epidemia.

- a) Cantos afectados houbo o primeiro día?
- b) En que momento o número de afectados foi 15?
- c) Representa a función e comproba os resultados que obtiveches nos apartados anteriores.

**81** Un capital de 5.000 € está depositado nun banco, e produce un xuro anual do 2%.

- a) Canto diñeiro hai ao cabo dun ano?
- b) E aos dous anos?
- c) E aos  $n$  anos?



**82** A táboa recolle o xuro que ofrece un banco ao ingresar diñeiro durante un ano.

| Diñeiro (€)      | Xuro (%) |
|------------------|----------|
| Ata 1.000        | 5        |
| De 1.000 a 2.500 | 10       |
| De 2.500 a 5.000 | 15       |
| Máis de 5.000    | 20       |

- a) Representa a función que determina o xuro obtido dependendo do diñeiro que se ingresa. De que tipo de función se trata?
- b) Se se ingresan 1.800 €, canto diñeiro terei ao final do ano?
- c) E se ingreso 500 €?

**83** Encontra as funcións inversas destas funcións.

- a)  $y = 3x - 1$
- b)  $y = \sqrt{x}$
- c)  $y = \sin 2x$
- d)  $y = \frac{1 + tx}{2}$
- e)  $y = \arccos(x - 2)$
- f)  $y = \ln(x + 3)$
- g)  $y = 3 + 4 \cdot 5^x$
- h)  $y = \frac{1 + \log_3 x}{5}$
- i)  $y = |x - 1|$
- l)  $y = x$

**84** Unha granxa de caracois axustou os seus gastos de produción por  $x$  quilogramos de caracois segundo a función:

$$G(x) = 2.000 + \frac{1}{200.000}x^3$$

Os seus ingresos réxense pola fórmula:

$$I(x) = 8.000 + 2x - \frac{1}{1.000}x^2 + \frac{1}{200.000}x^3$$

Investiga cal é o número de quilogramos de caracois co que se obtén o beneficio máximo.



**85** Unha ONG calculou que o número de persoas ingresadas nos hospitais tras un tsunami segue aproximadamente a fórmula:

$$P = 1 + \frac{110}{t^2 + 10} \quad t \in (0, 30)$$

onde  $P$  é o número de persoas hospitalizadas, en miles, e  $t$  é o número de días transcorridos desde o tsunami.

- a) Cantas persoas haberá hospitalizadas o primeiro día?
- b) E cantas haberá ao cabo de tres semanas?
- c) Se a capacidade hospitalaria dunha illa da área afectada é de 2.000 camas, ata que día estivo desbordada a capacidade?



**86** A evolución dunha poboación vén determinada pola función  $P(t) = 100 \cdot 2^t$ , e a dos alimentos que necesitan segue a función  $A(t) = 1.000t + 1.000$ .

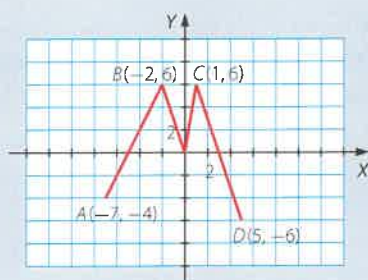
- a) Canto poboación había ao principio? E alimentos?
- b) E despois de 2 anos?
- c) A partir de que ano a poboación terá menos alimentos dos que son necesarios?

## PARA FINALIZAR...

### Reflexiona sobre a teoría

- 87 Razona para que valor de  $x$  se fai maior a diferenza  $\sqrt{x^2 + 1} - |x|$ .

- 88 A función  $f(x)$  está formada por catro segmentos. Cantas solucións ten a ecuación  $f[f(x)] = 6$ ?



#### IDEA CLAVE

Facendo  $f(x) = y$ , calcula canto debe valer  $y$  para que  $f(y) = 6$ .

- 89 Calcula os valores máximo e mínimo (extremos absolutos) que pode alcanzar a función  $f(x) = |1 - x^2|$  no intervalo  $[-2, 2]$ .

#### IDEA CLAVE

Representa a función  $y = 1 - x^2$ , e obtén  $f(x)$  a partir dela.

- 90 Cantas solucións teñen as seguintes ecuacións no intervalo  $[-\pi, \pi]$ ?

- $e^x = 2 - x^2$
- $\ln x = -x$
- $\operatorname{sen} x = \frac{x}{2}$

#### IDEA CLAVE

Representa graficamente as funcións que aparecen en cada membro das ecuacións, e conta os puntos de corte.

### Pensa un pouco máis

- 91 As agullas dun reloxo miden 20 e 30 cm. Entre as 12 horas e as 12 horas e 30 minutos:
- Expresa o ángulo que forman en función do tempo,  $t$ , medido en minutos.
  - Calcula a área do triángulo creado ao unir os seus extremos en función de  $t$ . Pode tomar o valor cero? A que hora alcanza o seu maior valor?
  - Expresa a distancia entre os extremos das agullas en función de  $t$ .

#### Análise do enunciado

Hai que expresar:

- O ángulo en función do tempo.
- A área en función do tempo.
- A distancia entre as puntas das agullas en función do tempo.

#### Deseño da resolución

Unha vez que expresamos o ángulo en función do tempo, con axuda da trigonometría, escribimos as funcións dos apartados b) e c).

#### Clave para resolver o problema

O máximo e o mínimo da función seno obtéñense cando o ángulo mide  $\frac{\pi}{2}$  rad e 0 rad, respectivamente.

- 92 A temperatura media diaria, medida en graos Celsius, nunha cidade, durante o ano pasado, vén dada pola seguinte función.

$$T = \frac{5}{9} \left[ 13 - 23 \cos \frac{2\pi}{365} (t - 32) \right]$$

onde  $t$  é o tempo en días, correspondendo  $t = 1$  ao 1 de xaneiro, e o ángulo está medido en radiáns. Calcula a temperatura correspondente aos días 1 de xaneiro e 10 de agosto.

Calcula as temperaturas máxima e mínima do ano.

#### Análise do enunciado

Proporcionánnos unha función que expresa a temperatura medida durante o ano pasado, e hai que calcular o seu valor nuns puntos e a obtención de máximos e mínimos.

#### Deseño da resolución

Temos que estudar a función e a súa derivada para calcular os puntos críticos.

#### Clave para resolver o problema

Coa función obtemos o valor da temperatura,  $T$ .

Os valores,  $t_0$ , que temos que substituír en  $T$  para calcular os valores máximo e mínimo de temperatura son os que fan que o coseno valla  $-1$  e  $1$ .